раздел **МАТЕМАТИКА**

УДК 517.977+669.046

УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ХРУПКИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙИЙ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ И МАКСИМАЛЬНУЮ ТЕМПЕРАТУРУ

© Н. Д. Морозкин*, Н. Н. Морозкин

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.
Тел./факс: +7 (347) 273 32 87.
E-mail: morozkin@bashedu.ru

Рассматривается одномерная задача оптимального наиточнейшего нагрева пластины с учетом ограничений на максимальную температуру и на сжимающие и растягивающие термонапряжения. Предполагается, что нагрев осесимметричный, а в качестве управления выступает температура внешней (греющей) среды. Учитывается нелинейная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Все остальные теплофизические коэффициенты считаются постоянными. Предложен итерационный способ, основанный на сведении исходной нелинейной задачи к последовательности линейных задач оптимального управления, а также способ поиска управления, который позволяет за фиксированное время получить распределение температур в теле максимально близкое к заданному.

Ключевые слова: *оптимизация, теплопроводность, нагрев, термонапряжения, интегральные преобразования, аппроксимация, оптимальное управление.*

Введение

При высокотемпературном нагреве теплофизические параметры нагреваемых материалов (пределы прочности, коэффициент теплопроводности и др.) претерпевают значительные изменения. Так, например, коэффициент теплопроводности материала ЖС6У, используемый при высокотемпературной штамповке в диапазоне температур от 20 °С до 1000 °С изменятся в 2.8 раза, а пределы прочности на сжатие и растяжение в этом же диапазоне температур в 6 раз. Учет таких нелинейностей значительно усложняет задачу. Поэтому при исследовании задач оптимального нагрева с фазовыми ограничениями эти факторы, как правило, не учитываются, либо учитываются не в полной мере. Так, в работе [1] рассматриваются задачи одномерного нагрева с учетом сжимающих и растягивающих термонапряжений и линейной зависимости пределов прочности от температуры, в предположении, что все остальные механические и теплофизические коэффициенты постоянны. Решение задачи находится лишь в предположении, что оптимальный нагрев можно осуществить, двигаясь только по верхним границам наложенных ограничений.

В настоящей работе развивается подход, предложенный в работах [2, 3]. Исходная нелинейная задача с использованием метода последовательных приближений [4] сведена к итерационному процессу, где на каждом шаге решается задача, описываемая линейным уравнением параболического типа с линейными фазовыми ограничениями. Доказана сходимость решений задач, построенных таким образом, к решению исходной задачи в некоторой норме типа нормы $W_2^{1,0}$. Задача оптимального управления с фазовыми ограничениями и с линейным уравнением состояния решается с использованием метода условного градиента [3].

Постановка задачи

Процесс нагрева пластины внешними тепловыми источниками описывается следующими соотношениями

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\bar{t}), \quad 0 < \bar{t} < \infty, \tag{1}$$

$$T(x,0) = T^0 = const, \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = \alpha\left(v(\tau) - T(l,t)\right), \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{4}$$

где T – температура (°С), t – время, c – коэффициент теплоемкости, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, l – толщина пластины, x – пространственная координата, α – коэффициент теплообмена, $v(t)$ – управление,
$v(t) \in V, V = \{v = v(t) : v(t) \in L_2[0,\bar{t}], {}^{+}\}$.

Предположим, что в промежутке изменения температур $[T_1, T_2]$ функция $\lambda(T)$ положительна и имеет ограниченную производную по *T*. Кроме того, предположим, что

$$0 < \lambda_1 \le \lambda(T) \le \lambda_2, \quad \forall T \in [T_1, T_2] \tag{5}$$

При указанных условиях система уравнений (1)–(4) при каждом фиксированном $v(t) \in V$ имеет обобщенное решение из пространства $V_2^{1,0}(Q_{\bar{t}})$ [5], где $Q_{\bar{t}} = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0,\bar{t})\}$.

По условию задачи недопустимо, чтобы нагреваемое тело в процессе нагрева получило бы необратимые деформации.

Задача термоупругости в квазистатической постановке и в предположении, что α_T, E не зависят от температуры решается аналитически. Анализ термонапряжений показывает [1, 6], что в условиях рассматриваемой задачи растягивающие напряжения наибольших значений достигают на оси, а сжимающие – на поверхности нагреваемого тела. С

* автор, ответственный за переписку

учетом вышесказанного ограничения на термонапряжения можно записать в виде

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}(-T(0,t)+\frac{1+3\Gamma}{l}\int_0^l T(\xi,t)d\xi - -\frac{6\Gamma}{l^2}\int_0^l \xi T(\xi,t)d\xi) \le \sigma_1(T(0,t)) \quad (6)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}(T(l,t)-\frac{1-3\Gamma}{l}\int_0^l T(\xi,t)d\xi - -\frac{6\Gamma}{l^2}\int_0^l \xi T(\xi,t)d\xi) \le \sigma_2(T(l,t)) \quad (7)$$

Здесь α_T – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, параметр $\Gamma \in [0,1]$ характеризует степень защемления от поворота краев пластины, $\sigma(T), \sigma_c(T)$ – соответственно пределы прочности на растяжение и сжатие.

Кроме выполнения неравенств (*6*), и (*7*) потребуем выполнения ограничения на максимальную температуру в теле, которая в рассматриваемом случае внешнего нагрева достигается на поверхности

$$T(l,t) \le T^{\text{доп}} \quad (8)$$

Задача 1. При фиксированной длительности нагрева $\bar{t} > 0$ найти управление $v^0(t) \in V, t \in [0, t^0]$, обеспечивающее при всех $t \in (0, \bar{t}]$ выполнение неравенств (*6*)–(*8*) и минимизирующее функционал

$$\mathrm{I} = \int_0^l \left[T(x, t^0, v^0) - \hat{T}(x)\right]^2 dx, \quad (9)$$

на решениях системы (1)–(4). Здесь $\hat{T}(x)$ заданное конечное распределение температур в теле.

Линеаризация

Для решения поставленной задачи воспользуемся идеей метода последовательных приближений, изложенной в работе [4].

Пусть

$$\lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2. \quad (10)$$

Системе уравнений (1)–(4) поставим в соответствие следующий итерационный процесс

$$c\rho\frac{\partial T_{k+1}}{\partial t} - \lambda_0\frac{\partial^2 T_{k+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda(T_k)-\lambda_0)\frac{\partial T_k}{\partial x}\right), \quad (11)$$

$$T_{k+1}(x,0) = T^0, \quad x \in [0,l], \quad (12)$$

$$\lambda_0\frac{\partial T_{k+1}}{\partial x} - \alpha(v(t) - T_{k+1}(x,t))\Big|_{x=l} = =(\lambda_0 - \lambda(T_k))\frac{\partial T_k}{\partial x}\Big|_{x=l}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_{k+1}}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

Решение задачи (*1*)–(*4*) будем искать как предел решений задач (*11*)–(*14*) в пространстве $W_2^{1,0}(Q_{\bar{t}})$, где $Q_{\bar{t}} = \{(x,t): x \in (0,l), t \in (0,\bar{t})\}$. Сходимость данного итерационного процесса показано в работе [2].

Переход в безразмерные переменные

Запишем систему уравнений (*11*)–(*14*) и ограничения (*6*)–(*7*) в безразмерных единицах. Вводя обозначение $a_0 = \lambda_0 / c\rho$ и безразмерные переменные

$$r = \frac{x}{l},\ \theta = \alpha_T(T - T^0),\ \tau = \frac{a_0 t}{l^2}, \\ u = \alpha_T(v - T^0),\ u^- = \alpha_T(v^- - T^0), \\ u^+ = \alpha_T(v^+ - T^0), \quad (15) \\ \sigma_1^* = (1-\nu)\sigma_1 / E, \\ \sigma_2^* = (1-\nu)\sigma_2 / E,\ \theta^{доп} = \alpha_T(T^{доп} - T^0), \\ \bar{T} = a_0\bar{t}/l^2,\ Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_0},\ \hat{\theta} = \alpha_T(\hat{T} - T^0)$$

получим

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0} - 1\right)\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial r}\right], \\ r \in (0,1), \quad \tau \in (0, \bar{T}) \quad (16)$$

$$\theta_k(r,0) = 0, \quad r \in [0,1], \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial r}\Big|_{r=1} = Bi(u(\tau) - \theta_k(1,\tau)) + + \frac{\lambda_0 - \lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial r}\Big|_{r=1}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad (19)$$

где $u(\tau)$ – управление, $u(\tau) \in U, U = = \{u = u(\tau): u(\tau) \in L_2[0,\bar{T}], 0 \le u^- \le u(\tau) \le u^+\}$

$$-\theta_k(0,\tau) + (1+3\Gamma)\int_0^1 \theta_k(\xi,\tau)d\xi + + 6\Gamma\int_0^1 \xi\theta_k(\xi,\tau)d\xi \le \sigma_1^*(\theta_k(0,\tau)), \quad (20)$$

$$\theta_k(1,\tau) - (1-3\Gamma)\int_0^1 \theta_k(\xi,\tau)d\xi - - 6\Gamma\int_0^1 \xi\theta_k(\xi,\tau)d\xi \le \sigma_2^*(\theta_k(1,\tau)), \quad (21)$$

Ограничения на максимальную температуру соответственно будут иметь вид

$$\theta_k(1,\tau) \le \theta^{доп} \quad (22)$$

Конечномерная аппроксимация

Воспользовавшись конечным интегральным преобразованием Фурье

$$\theta_F(\mu,\tau) = \int_0^1 \theta(r,\tau)\cos(\mu r)dr, \quad (23)$$

запишем решение системы уравнений (*16*)–(*19*) в виде ряда

$$\theta_k(r,\tau,u)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n^{(k)}(u,\tau)\cos(\mu_n r), \qquad (24)$$

где $D_n=\dfrac{2Bi}{\left(\mu_n^2+Bi^2+Bi\right)\cos(\mu_n)}$, $\mu_n \ge 0$ – корни уравнения

$$Bi\cos(\mu_n)=\mu_n\sin(\mu_n), \qquad (25)$$

$x_n^{(k)}(u,\tau)$, $n=1,2,...$ – компоненты вектора решений бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_n^{(k)}}{d\tau}=-\mu_n^2 x_n^{(k)}+\mu_n^2(u+I_n^{k-1}),$$

$$I_n^{(k-1)}=\int_0^1\left(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}-1\right)\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial r}\frac{\sin(\mu_n r)}{\sin(\mu_n)}dr, \qquad (26)$$

$$x_n^{(k)}(0)=0 \qquad (27)$$

Аппроксимировав зависимости $\sigma_1^*(\theta)$ и $\sigma_2^*(\theta)$ линейными функциями

$\sigma_c^*(\theta)=\alpha_1+\beta_1\theta$, $\sigma_p^*(\theta)=\alpha_2+\beta_2\theta$, неравенства (20)–(22) примут вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{in}x_n^{(k)}-e_i\le 0,\quad i=\overline{1,3}, \qquad (28)$$

где $$c_{3n}=F_n=\frac{2Bi}{(\mu_n^2+Bi^2+Bi)},$$

$$c_{2n}=F_n\left(1-\beta_1-\frac{6\Gamma}{\mu_n^2}-\frac{(1+3\Gamma)Bi}{\mu_n^2}+\frac{6\Gamma}{\mu_n^2\cos(\mu_n)}\right),$$

$$c_{1n}=F_n\left(\begin{array}{l}\dfrac{(1-3\Gamma)Bi-6\Gamma}{\mu_n^2}-\\ -\dfrac{1}{\cos(\mu_n)}\left(1+\beta_2-\dfrac{6\Gamma}{\mu_n^2}\right)\end{array}\right),\quad \Gamma\in[0,1],$$

$$e_1=\alpha_1,\ e_2=\alpha_2 \qquad (29)$$

$$e_3=\theta^{доп}$$

Система функций $\{\cos(\mu_n r)\}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,1]$, поэтому почти при всех $r\in[0,1]$ для функции $\hat\theta(r)$ справедливо разложение

$$\hat\theta(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|\cos(\mu_n r)\|^2}g_n\cos(\mu_n r),$$

где $$g_n=\int_0^1\hat\theta(r)\cos(\mu_n r)dr,$$

$$\|\cos(\mu_n r)\|^2=\frac{(\mu_n^2+Bi^2+Bi)\sin^2(\mu_n)}{2Bi^2} \qquad (30)$$

Ограничившись в соотношениях (*24*), (*26*), (28) первыми N членами, получим

$$\frac{dx^N}{d\tau}=-A^N(x^N-I^N)+B^N u,$$

$$x^N(0)=0_{R^N}, \qquad (31)$$

$$c^N x^N\le E, \qquad (32)$$

где $(x^N-I^N)=(x_1^{(k)}-I_1^{(k-1)},...,x_N^{(k)}-I_N^{(k-1)})$ – N-мерная вектор-функция; $A^N=diag(\mu_1^2,...,\mu_N^2)$ диагональная матрица $(N\times N)$, ($B^N=(\mu_1^2,...,\mu_N^2)^T$, c^N – матрица $(3\times N)$ с элементами c_{in}, $i=\overline{1,3}$, $n=\overline{1,N}$, $E=(e_1,e_2,e_3)^T$.

Бесконечномерной задаче 1 поставим в соответствие следующую конечномерную задачу 2.

Задача 2. Найти управление $u\in U$, обеспечивающее при всех $\tau\in(0,\overline{T})$ выполнение неравенств (32) и минимизирующее функционал

$$I_N=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(\mu_n r)}{\|\cos(\mu_n r)\|^2}\left(\frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n}x_n^{(k)}-g_n\right)\right]^2dr \qquad (33)$$

на решениях системы (31).

Учитывая ортогональность системы функций $\{\cos(\mu_n r)\}$ функционал (33) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|\cos(\mu_n r)\|^2}\left(\frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n}x_n^{(k)}-g_n\right)^2$$

На каждой итерации конечномерная задача 2 решается способом, изложенным в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наукова Думка, 1988. 313 с.
2. Голичев И. И., Дульцев А. В., Морозкин Н. Д. Об одном итерационном методе решения задачи оптимального нелинейного нагрева с фазовыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000 г. Т. 40. №11. С. 1615–1632.
3. Морозкин Н. Д., Морозкин Н. Н. Оптимизация процессов внешнего нагрева с учетом ограничений на термонапряжения и на максимальную температуру // Вестник Башкирского университета. 2012 г. Т. 17. №1. С. 5–9.
4. Голичев И. И. Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989. 172 с.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. Морозкин Н. Д. Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. Уфа: БашГУ, 1997. 114 с.

Поступила в редакцию 18.02.2013 г.