УДК 534.1

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИНЕРЦИОННОГО ЭЛЕМЕНТА НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ

© А. М. Ахтямов[1,2]*, А. А. Ахтямова[1,2]

[1]Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450074 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.
Тел./факс: +7 (347) 229 96 65.
E-mail: akhtyamovam@mail.ru
[2]Институт механики Уфимского научного центра РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.
Тел./факс: +7 (347) 235 52 55.

Рассматривается задача идентификации массы и момента инерции груза, сосредоточенного на одном из концов стержня, по двум (трем) собственным частотам свободных колебаний стержня. Показано, что для однозначной идентификации двух неизвестных – массы и момента инерции груза – достаточно использования трех собственных частот. Для решения задачи предложен метод введения дополнительной неизвестной величины. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А. Н. Тихонову.

Ключевые слова: *собственные значения, обратная задача, собственные частоты, балка, сосредоточенный инерционный элемент.*

Введение

Задачи вычисления собственных частот механических систем достаточно хорошо изучены [1, 2]. Обратные задачи для таких систем стали исследоваться сравнительно недавно [3–11]. Наиболее близки нашей статье работы [3–9]. В работах [3–6] изучаются задачи восстановления масс по частотам или смещениям продольных колебаний системы. В нашей же статье массы восстанавливаются по собственным частотам изгибных, а не продольных колебаний. В отличие от [7, 8] в настоящей работе по собственным частотам изгибных колебаний определяются параметры концевого груза, а не груза, расположенного между концами стержня. Кроме того, в нашей работе в дополнение определятся момент инерции, чего не было выполнено в [7, 8]. Ранее [9] методом сравнения целых функций доказана однозначность восстановления параметров твердого тела (массы, момента инерции, статического момента инерции), прикрепленного к одному из концов балки Тимошенко, по всем собственным частотам ее колебаний. Приведен пример восстановления трех параметров твердого тела, присоединенного к балке, по четырем собственным частотам. Однако в упомянутой работе нет общего доказательства того факта, что параметры твердого тела можно однозначно восстановить по конечному набору собственных частот. В настоящей работе такое доказательство найдено и приводится здесь для новой задачи – для балки Эйлера–Бернулли. Предложен метод введения дополнительной неизвестной величины, на основе которого и доказана теорема об однозначности восстановления параметров твердого тела. При доказательстве использована также теория некорректных задач [12–18].

Постановка обратной задачи

Рассмотрим однородную балку Эйлера–Бернулли, длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан, на правом конце сосредоточен груз массой m и моментом инерции I_1. Пусть масса m и момент инерции I_1 груза неизвестны. Требуется их найти по собственным частотам колебаний балки. Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [2, с. 152]:

$$EI\frac{\partial^4 U(x,t)}{dx^4}+\rho F\frac{\partial^2 U(x,t)}{dt^2}=0,$$

где $U=U(x,t)$ – прогиб текущей точки оси балки, EI – изгибная жесткость стержня, ρ – плотность балки, F – площадь поперечного сечения балки.

При $t=0$ должны выполняться начальные условия

$$U(X,0)=f(X),\frac{\partial U}{\partial t}(X,0)=\mathrm{g}(X),$$

Если левый конец заделан, а на правом конце имеется сосредоточенный инерционный элемент, то краевые условия записываются в следующем виде [2, с. 153]:

$$U=0,\frac{\partial U}{\partial X}=0\ (\text{при } X=0)$$

$$EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-mL^3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-I_1L\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\ (\text{при } x=1).$$

Вводя обозначения

$$x=\frac{X}{L},u=\frac{U}{L},$$

запишем уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня и краевые условия в виде

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\rho FL^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

$$u=0,\frac{\partial u}{\partial x}=0\ (\text{при x}=0),$$

$$EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\ (\text{при x}=1).$$

Обозначим $\rho FL^4\omega^2/(EI)$ через λ^4. Тогда поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t)=y(x)\cos(\omega t)$ сводится (см., например, [1]) к следующей спектральной задаче [2]:

$$y^{(4)}=\lambda^4 y, \qquad (1)$$

* автор, ответственный за переписку

$$U_1 = y(0) = 0,\ U_2 = y'(0) = 0,$$
$$U_3(y) = y'''(1) - a_1\lambda^4 y(1) = 0, \qquad (2)$$
$$U_4(y) = y''(1) - a_2\lambda^4 y'(1) = 0$$

где $a_1 = m/(\rho FL)$, $a_2 = I_1/(\rho FL^3)$.

Таким образом, поставленная нами задача определения массы и момента инерции груза, сосредоточенного на одном из концов стержня, свелась к следующей обратной задаче: Дана краевая задача (*1*), (*2*) со спектральным параметром λ и неизвестными коэффициентами a_1 и a_2. Требуется по ненулевым собственным значениям λ_i задачи (*1*), (*2*) найти неизвестные коэффициенты a_1 и a_2.

В дальнейшем будем рассматривать именно эту обратную задачу.

Покажем, что эта задача может быть переформулирована в терминах характеристического определителя.

Функции

$$y_1(x,\lambda) = (\cos\lambda x + \operatorname{ch}\lambda x)/2,$$
$$y_2(x,\lambda) = (\sin\lambda x + \operatorname{sh}\lambda x)/(2\lambda), \qquad (3)$$
$$y_3(x,\lambda) = (-\cos\lambda x + \operatorname{ch}\lambda x)/(2\lambda^2),$$
$$y_4(x,\lambda) = (-\sin\lambda x + \operatorname{sh}\lambda x)/(2\lambda^3)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4 y(x,\lambda), \qquad (4)$$

удовлетворяющие условиям

$$y_j^{r-1}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, \text{при } j \neq r \\ 1, \text{при } j = r \end{cases} \quad j,r = 1,2,3,4 \qquad (5)$$

(другими словами, решения $y_j(x,\lambda)$ $(j = 1,2,3,4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [2]).

Общее решение уравнения (*4*) представляется в следующем

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) +$$
$$+ C_3 y_3(x,\lambda) + C_4 y_4(x,\lambda).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия из (*1*), (*2*):

$$U_i(y) = U_i(C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4) =$$
$$= C_1U_i(y_1) + C_2U_i(y_2) + C_3U_i(y_3) + C_4U_i(y_4) = \qquad (6)$$
$$= 0,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (*1*), (*2*) получают из условия существования ненулевого решения C_i из системы (*6*). Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \qquad (7)$$

соответствующей системы. Этот определитель называют характеристическим определителем спектральной задачи (*1*), (*2*). Его нули совпадают с собственными значениями задачи (*1*), (*2*) [19]. Учитывая условия (*5*), из (*7*) получаем

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Отсюда из *(1)*, *(2)* имеем

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_3'''(1) - a_1\lambda^4 y_3(1) & y_4'''(1) - a_1\lambda^4 y_4(1) \\ y_3''(1) - a_2\lambda^4 y_3'(1) & y_4''(1) - a_2\lambda^4 y_4'(1) \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta(\lambda) = -f_0(\lambda) + a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) - a_1 a_2 f_3(\lambda), \quad (9)$$

где

$$f_0(\lambda) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda);$$
$$f_1(\lambda) = \tfrac{\lambda}{2}(\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda \operatorname{ch}\lambda);$$
$$f_2(\lambda) = \tfrac{\lambda^2}{2}(\sin\lambda \operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda \operatorname{sh}\lambda); \qquad (10)$$
$$f_3(\lambda) = \tfrac{\lambda^4}{2}(\cos\lambda \operatorname{ch}\lambda - 1).$$

Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции *(9)* можно сформулировать следующим образом:

Требуется идентифицировать неизвестные коэффициенты a_i $(i = 1,2)$ по известным ненулевым корням λ_k характеристического определителя (*9*).

Метод системы двух нелинейных уравнений.

Поставленную задачу можно решить следующим способом. Пусть λ_i являются собственными значениями краевой задачи (*1*), (*2*). Тогда λ_i корни уравнения характеристического определителя (*9*) [19]. Поэтому подставив эти три значения в (*9*), получим систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов a_1 и a_2:

$$a_1 f_1(\lambda_i) + a_2 f_2(\lambda_i) - a_1 a_2 f_3(\lambda_i) = f_0(\lambda_i) \qquad (11)$$

Сколько собственных значений нужно для однозначной идентификации коэффициентов a_1 и a_2? Если подставить два собственных значения, то решение этой системы уравнений сведется к решению квадратного уравнения, которое, как правило, имеет два решения. Значит, для однозначной идентификации двух собственных значений еще недостаточно. Покажем это на примерах.

<u>*Пример 1.*</u> Пусть $\lambda_1 = 3.8614829, \lambda_2 = 7.0316430$. Подставив эти значения в *(11)* и решив соответствующую систему нелинейных уравнений, получим два решения: $a_1 = 2{,}000$ и $a_2 = 0{,}000$ или $a_1 = 0.254$ и $a_2 = 0.017$.

<u>*Пример 2.*</u> Пусть $\lambda_1 = 1.1217345$, $\lambda_2 = 4.6238916$. Подставив эти значения в *(11)* и решив соответствующую систему нелинейных уравнений, получим два решения: $a_1 = 2.000$ и $a_2 = 1.000$ или $a_1 = -1.740$ и $a_2 = -0.037$.

Выделить все случаи решений системы нелинейных уравнений (бесчисленное множество решений, два, одно, ноль решений) оказывается достаточно сложной задачей. Численные эксперименты показывают, что во всех реальных задачах использование дополнительно третьего собственного значения позволяет однозначно идентифицировать коэффициенты a_1 и a_2. Так, если в первом примере дополнительно использовать еще и третье собственное значение $\lambda_3 = 10.1850206$ и решить систему уравнений *(11)* с $\lambda_1 = 3.8614829$ и $\lambda_3 = 10.1850206$, получим снова два решения: $a_1 = 2.000$ и $a_2 = 0.000$ или $a_1 = 0.185$ и $a_2 = 0.013$. Общим для этих решений и решений примера 1 оказывается единственное решение $a_1 = 2.000$ и $a_2 = 0.000$. Ниже показано, что это является общей закономерностью, а именно для однозначной идентификации действительных коэффициентов a_1 и a_2 достаточно трех собственных значений.

Метод введения дополнительной неизвестной величины.

Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 — собственные значения задачи *(1)*, *(2)*. Введем дополнительное неизвестное

$$a_3 = -a_1 a_2 \qquad (12)$$

и подставим его вместе с собственными значениями λ_1, λ_2 и λ_3 в уравнение (*11*). В результате получим систему трех линейных уравнений от трех неизвестных a_1, a_2 и a_3:

$$a_1 f_1(\lambda_i) + a_2 f_2(\lambda_i) + a_3 f_3(\lambda_i) = f_0(\lambda_i), \quad i = 1,2,3. \qquad (13)$$

Из правила Крамера следует, что если определитель

$$D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix} \qquad (14)$$

системы уравнений (*13*) отличен от нуля, то коэффициенты a_1 и a_2 находятся однозначно по формулам

$$a_1 = \frac{D_1}{D}, a_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad (15)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_0(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_0(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_0(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) & f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) & f_3(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) & f_3(\lambda_3) \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

При этом коэффициент $\boldsymbol{a_3}$ находится по формуле

$$a_3 = \frac{D_3}{D}, \text{ где } D_3 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & f_0(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & f_0(\lambda_2) \\ f_1(\lambda_3) & f_2(\lambda_3) & f_0(\lambda_3) \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

В случае, если собственные значения λ_1, λ_2 и λ_3 найдены с большой погрешностью, то может оказаться, что

$$\frac{D_3}{D} \neq -\frac{D_1}{D} \cdot \frac{D_2}{D} \qquad (18)$$

и тогда система уравнений для определения неизвестных a_1 и a_2 оказывается переопределенной. Т.е. задача определения неизвестных a_1 и a_2 по трем значениям λ_1, λ_2 и λ_3 может не иметь решения, а поэтому является некорректной по Адамару. Однако она корректна по А. Н. Тихонову.

Действительно, для подхода А. Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$ называется корректной по А.Н. Тихонову (условно корректной), если выполнены следующие условия [13–15]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \tilde{z} \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \tilde{v}\|_V < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (*13*), переводящее тройку чисел a_1, a_2 и a_3 в тройку значений λ_1, λ_2 и λ_3, у которой матрица системы имеет определитель $D \neq 0$.

Будем называть множеством корректности M такое множество троек $v = (a_1, a_2, a_3)$, для которого выполнено условие (*12*).

С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания a_1, a_2 по значениям λ_1, λ_2 и λ_3 для которых система уравнений *(13)* имеет определитель, отличный от нуля.

Пусть V – это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $v = (v_1, v_2, v_3)$ с нормой $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|, |v_3|)$; Z – это пространство $\mathbb{R}^3$ элементов $z = (z_1, z_2, z_3)$ с нормой $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество Λ, т.е. $\Lambda = RM$.

Тогда задача $Rv = z$ будет корректной по А. Н. Тихонову, так как все три условия определения выполнены (третье условие вытекает из аналитичности $f_i(\lambda)$ $(i = 0,1,2,3)$ по λ).

Наиболее известны два метода решения корректных по А. Н. Тихонову задач – метод квазирешения и метод подбора. В настоящей статье предлагается метод решения задачи идентификации краевых условий, который, по сути, представляет собой метод подбора.

Если априори известно, что искомые числа a_1, a_2 существуют, действительные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и определители $D \neq 0$, D_1, D_2, D_3 найдены точно, то условия (*12*) выполнены, причем числа a_1, a_2, a_3 находятся однозначно по формулам (*15*)–(*17*). Все условия корректности по А. Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tilde{z} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_{\mathbb{R}^3} < \delta$ выполнено неравенство $\left\|\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right) - \left(\frac{\tilde{D}_1}{D}, \frac{\tilde{D}_2}{D}, \frac{\tilde{D}_3}{D}\right)\right\|_{\mathbb{R}^3} < \varepsilon$. Последнее вытекает из аналитичности функций $f_i(\lambda)$ $(i = 0,1,2,3,4)$ по параметру λ.

Если числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а значит, и $D \neq 0$, D_1, D_2, D_3 даны приближенно, то равенство (*18*) может не выполняться и поэтому формально по $D \neq 0$, D_1, D_2, D_3 тройку чисел a_1, a_2 и a_3 найти невозможно. Однако нам выполнение (*18*) не нужно. Решением будем считать следующую тройку значений: числа a_1 и a_2 найденные по формулам *(15)*, где значения $D \neq 0, D_1, D_2, D_3$ являются приближенными, и a_3, найденное по формуле (*12*), а не *(17)*. Эта тройка значений a_1, a_2 и a_3 лежит в множестве корректности, т.к. для нее выполнено условие (*12*) и это решение тем ближе к точному, чем ближе к точным собственным значениям числа λ_1, λ_2, λ_3.

Таким образом, верна следующая

Теорема. Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются действительными собственными значениями краевой задачи (*1*), (*2*), причем определитель (*14*) системы уравнений (*13*) отличен от нуля, то задача отыскания коэффициентов a_1 и a_2 по собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, является корректной по А.Н. Тихонову. А ее единственное решение дается формулами (*15*).

Пример 3. Пусть $\lambda_1 = 3.8614829, \lambda_2 = 7.0316430, \lambda_3 = 10.1850206$. Подставив эти значения в (*14*)–(*16*), получим: $D = 0.66435 \cdot 10^{13}$, $D_1 = 0.1328704 \cdot 10^{14}$, $D_2 = -0.2090646 \cdot 10^5$, $a_1 = D_1/D = 2.000$ и $a_2 = D_2/D = 0.000$.

Пример 4. Пусть $\lambda_1 = 1.1217345, \lambda_2 = 4.6238916$, $\lambda_3 = 10.9485549$. Подставив эти значения в (*14*)–(*16*), получим: $D = 0.7221436 \cdot 10^9$, $D_1 = 0.1444287 \cdot 10^{10}$, $D_2 = 0.7221436 \cdot 10^9$, $a_1 = D_1/D = 2.000$ и $a_2 = D_2/D = 1.000$.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе показано, что для однозначной идентификации двух неизвестных – массы и момента инерции груза, прикрепленного к балке Эйлера–Бернулли – достаточно использования трех собственных частот. Для решения задачи предложен метод введения дополнительной неизвестной величины. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А. Н. Тихонову.

С помощью введения новой неизвестной величины легко доказать и соответствующую теорему об однозначности восстановления параметров твердого тела (массы, момента инерции, статического момента инерции), прикрепленного к одному из концов балки Тимошенко [9]. В разложении характеристического определителя задачи о колебаниях балки Тимошенко присутствуют четыре слагаемых с неизвестными величинами: одно – с массой твердого тела m_0, второе – с моментом инерции твердого тела I_{y1} относительно оси O_1y_1, третье – со статическим моментом инерции твердого тела L_{03} относительно плоскости $O_1y_1z_1$, четвертое – с их комбинацией $L_{03} + m\, I_{y1}$. Обозначим эту комбинацию как новую четвертую неизвестную. Тогда для однозначного нахождения этих четырех неизвестных, которые входят в характеристический определитель линейно, нам понадобится четыре уравнения (четыре собственных частоты). И если определитель системы отличен от нуля, то параметры твердого тела (масса, момент инерции, статический момент инерции), прикрепленного к одному из концов балки Тимошенко, находятся однозначно.

Предложенный метод введения дополнительных неизвестных может быть использован и при решении других задач. Он позволяет сравнительно легко находить минимальное количество собственных частот, достаточных для однозначного восстановления неизвестных параметров механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
3. Гладвелл Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
4. Gladwell G. M. L. and Movahhedy M. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. I: Theory // Inverse problems in enginering. 1995. V. 1. P. 179–189.
5. Movahhedy M., Ismail F. and Gladwell G. M. L. Reconstruction of mass-spring system from spectral data. II: Experiment // Inverse problems in enginering. 1995. V. 1. P. 315–327.
6. Ахтямов А. М. Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. 2007. №11. С. 59–60.
7. Morassi A. and Dilena M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse problems in engineering. 2002, V. 10. P. 183–201
8. Ахтямов А. М, Аюпова А. Р. Диагностирование двух масс, сосредоточенных на балке // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2010, №1. С. 42–44.
9. Ахтямов А. М., Урманчеев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, №4. С. 19–24.
10. Ахтямов А. М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. №8. С. 1011–1015.
11. Ильгамов М. А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Тр. ин-та механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2007. Вып. 5. С. 201–211.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1974. 224 с.
13. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 200 с.
14. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
15. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численныеметоды решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
16. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
17. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Х., Яхно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
18. Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
19. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

Поступила в редакцию 12.09.2012 г.