

СХЛОПЫВАНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

© А. А. Аганин¹, М. А. Ильгамов^{1,2}, Л. А. Косолапова^{1*}, В. Г. Малахов¹

¹Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
Россия, Республика Татарстан, 420111 г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31.
Тел.: +7 (843) 272 11 44.

E-mail: kosolapova@kfti.knc.ru

²Институт механики Уфимского научного центра РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.
Тел.: +7 (347) 235 52 55.

Рассматривается осесимметричная динамика кавитационного пузырька в процессе его схлопывания в жидкости вблизи плоской твердой стенки до момента начала его разрушения (потери односвязности). Деформация и перемещение поверхности пузырька и изменение скорости жидкости рассчитываются по схеме Эйлера с применением метода граничных элементов. Исследуются особенности схлопывания в зависимости от удаленности пузырька от стенки и начального отклонения его формы от сферической. Для эллипсоидальных начальных возмущений сферичности пузырька определен интервал значений отношения полуосей, при которых на поверхности пузырька образуется кумулятивная струя, направленная перпендикулярно плоскости стенки.

Ключевые слова: кавитационный пузырек, потенциальное течение жидкости, метод граничных элементов.

Введение

Изучение схлопывания пузырьков в жидкости около стенки является важной частью исследований кавитационного разрушения. Решение задачи о схлопывании пузырька вблизи стенки позволяет определить скорость и форму кумулятивной струи, возникающей при коллапсе пузырька на его поверхности и являющейся одной из причин эрозии твердых тел. В ряде работ на эту тему рассматривается влияние на процесс схлопывания веса жидкости [1–3], сил поверхностного натяжения [3, 4], теплообмена между газом в пузырьке и жидкостью [5], вязкости жидкости [6, 7].

Важными факторами, определяющими динамику пузырька у стенки, являющиеся его форма и расстояние до стенки в начале схлопывания. Влияние расстояния до стенки для первоначально сферического пузырька рассматривается, в частности, в работах [1–3, 8], а исследование влияния начальных отклонений формы от сферической – в [6, 9–10]. В [9] начальная форма пузырька взята в виде сплюснутого эллипсоида вращения (рассматривается случай пузырька, контактирующего со стенкой). Отмечено существенное влияние начальной несферичности на скорость струи и характер схлопывания.

В настоящей работе изучается процесс схлопывания кавитационного пузырька первоначальной формы в виде как сплюснутого, так и вытянутого эллипсоида вращения, в зависимости от отношения полуосей и начального расстояния до стенки.

1. Основные соотношения и метод решения

Предполагается, что жидкость, окружающая пузырек, идеальная несжимаемая, ее движение потенциальное и описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad (1)$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho_f} = 0, \quad (2)$$

где t – время, p , p_x – давление в жидкости в произвольной точке и на «бесконечности», ρ_f – плотность жидкости, Φ – потенциал скорости.

Считается, что пар в кавитационном пузырьке ведет себя как газ Ван-дер-Ваальса с равномерным распределением давления

$$p^- = p_b^0 \left[(1 + \bar{a}) \left(\frac{1 - \bar{b}}{V/V_0 - \bar{b}} \right)^\gamma - \bar{a} \left(\frac{V_0}{V} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где $\bar{a} = a/(V_0^2 p_b^0)$, $\bar{b} = b/V_0$, p_b^0 – начальное давление газа в пузырьке, V_0 , V – начальный и текущий удельные объемы пузырька, γ – показатель адиабаты, a , b – константы газа.

На поверхности пузырька выполняются динамическое

$$p^+ = p^- - 2\sigma H \quad (4)$$

и кинематическое

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v} \quad (5)$$

граничные условия. В (4), (5) p^+ – давление на поверхности со стороны жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, H – средняя кривизна в точке поверхности пузырька; \bar{x} , $\bar{v} = (\nabla\Phi)$ – радиус-вектор и скорость точки поверхности.

На жесткой стенке ставится условие непротекания

$$v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

где z – координата вдоль оси вращения.

Для отслеживания движения и деформации поверхности пузырька во времени и коррекции значений потенциала на ней применяется схема Эйлера первого порядка точности [1, 2], для определения скорости жидкости на контуре и потенциала скорости жидкости в некоторый момент времени используется метод граничных элементов [1, 11].

Потенциал скорости Φ и его нормальная производная $\partial\Phi/\partial n$ на поверхности связаны граничным интегральным уравнением (ГИУ) [12]

$$c(x)\Phi(x) = \int_S (G(x, y) \frac{\partial\Phi(y)}{\partial n} - \Phi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n}) dS(y), \quad (7)$$

где $x, y \in S$ – точки наблюдения и интегрирования, \bar{n} – вектор нормали, направленной внутрь пузырька, $G(x, y)$ – фундаментальное решение (функция Грина), которое для полупространства с границей в виде плоской жесткой стенки берется в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (8)$$

В (8) $r = |x - y|$, $r_2 = |x^* - y|$ – расстояния между точками x и y и между точкой x^* , симметричной точке x относительно стенки, и точкой y . Параметр $c(x)$ в (7) полагается равным 0.5 в случае гладкой в точке x границы и $\beta/(2\pi)$ – для угловой точки границы x с углом β при вершине.

При известном значении потенциала Φ на поверхности S из ГИУ (7) можно определить значения нормальной производной $\partial\Phi/\partial n$. Для осесимметричной задачи уравнение (7) записывается в цилиндрической системе координат в виде:

$$c\Phi(\rho, z) = \int_L \left\{ \Psi(\rho_0, z_0) K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0) K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) \right\} ds_0, \quad (9)$$

где

$$\Psi(\rho_0, z_0) = \frac{\partial\Phi(\rho_0, z_0)}{\partial n_0},$$

$$K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{\rho_0}{\pi} \left(\frac{K(m)}{A} + \frac{K(m_2)}{A_2} \right),$$

$$K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{K(m)}{A} + \frac{K(m_2)}{A_2} \right) \frac{dz_0}{ds_0} + \left(\frac{1}{2} \frac{dz_0}{ds_0} + \frac{\rho_0}{d^2} \left((\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} - (z - z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \right) \frac{E(m)}{A} + \left(\frac{1}{2} \frac{dz_0}{ds_0} + \frac{\rho_0}{d_2^2} \left((\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} + (z + z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \right) \frac{E(m_2)}{A_2} \right],$$

(ρ, φ, z) – координаты точки наблюдения x , (ρ_0, φ, z_0) – координаты точки интегрирования y , s_0 – дуговая координата контура,

$$A^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

$$d^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

$$A_2^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z + z_0)^2,$$

$$d_2^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z + z_0)^2$$

$$m^2 = 4\rho\rho_0 / A^2, \quad m_2^2 = 4\rho\rho_0 / A_2^2,$$

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}},$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad 0 \leq m \leq 1,$$

$K(m)$, $E(m)$ – полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода.

Для решения уравнения (9) используется метод граничных элементов. При этом контур поверхности пузырька аппроксимируется ломаной линией, состоящей из N элементов. В пределах элемента функции $\Psi(r_0, z_0)$ и $\Phi(r_0, z_0)$ предполагаются линейными.

Алгоритм решения задачи (1)–(6) реализован следующим образом. Пусть в момент $t^{(m)}$ известна геометрия контура пузырька, распределение потенциала $\Phi^{(m)}$ на нем и давление в пузырьке.

1. По значениям потенциала на контуре вычисляется производная $\partial\Phi/\partial s$ в точках контура.

2. Решением ГИУ определяется $\partial\Phi/\partial n$ на контуре в момент $t^{(m)}$.

3. Вычисляются радиальная v_ρ и осевая v_z составляющие скорости через $\partial\Phi/\partial s$, $\partial\Phi/\partial n$ с учетом выражений для компонентов нормали $n_\rho = z_s$,

$$n_z = -\rho_s$$

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \rho_s + \frac{\partial\Phi}{\partial n} z_s,$$

$$v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} z_s - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \rho_s.$$

4. Определяется положение точек контура в момент $t^{(m+1)} = t^{(m)} + \tau^{(m)}$ по формулам.

$$r^{(m+1)} = r^{(m)} + \tau^{(m)} \partial\Phi^{(m)} / \partial r, \quad z^{(m+1)} = z^{(m)} + \tau^{(m)} \partial\Phi^{(m)} / \partial z.$$

5. Вычисляется новый объем пузырька в момент $t^{(m+1)}$ и определяется текущее давление в нем из условия (3).

6. Рассчитывается значение потенциала на новом контуре для $t^{(m+1)}$

$$\Phi^{(m+1)} \approx \Phi^{(m)} + \frac{D\Phi}{Dt} \tau^{(m)} = \Phi^{(m)} + \tau^{(m)} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\nabla\Phi)^2 \right)^{(m)}.$$

Производная $\partial\Phi/\partial t$ вычисляется с использованием интеграла Коши-Лагранжа (2) на поверхности пузырька в момент $t^{(m)}$ с учетом динамического условия (4) и адиабатического закона изменения давления (3).

Устойчивость алгоритма обеспечивается условием [13]

$$\tau^{(m)} = a \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_f \max_i |D\Phi/Dt|}}, \quad (10)$$

где a – максимальный линейный размер пузырька, C – безразмерный параметр, определяемый численным экспериментом, обычно $0.001 < C < 0.02$, $m = 0, 1, \dots$

После определения положение контура и распределения потенциала на нем делается переход к п.1. Для начального момента $t^{(0)}$ принимается $\Phi^{(0)} = 0$.

При реализации приведенного шагового алгоритма может возникать численная неустойчивость, выражающаяся в появлении «пилообразных» высокочастотных искажений формы контура. Для устранения этой неустойчивости применяются различные способы сглаживания [5, 14]. В настоящей работе используется сглаживающий кубический сплайн: некоторая функция f , заданная своими значениями f_k в узлах разбиения интервала ее измене-

ния, аппроксимируется сплайном S_3 , являющимся решением вариационной задачи

$$\int_{s_1}^{s_{N+1}} (S_3''(s))^2 ds + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{w_k} (S_3(s_k) - f_k)^2 \rightarrow \min,$$

где w_k – задаваемые весовые коэффициенты. Сплайн S_3 определяется однозначно при задании двух граничных условий на концах интервала. Сплайны строятся на каждом временном шаге для сглаживания функций $r(s)$, $z(s)$ и $\Phi(s)$ с использованием граничных условий

$$r'(s_1) = 1, \quad r'(s_{N+1}) = -1, \quad z'(s_1) = 0, \quad z'(s_{N+1}) = 0, \\ \Phi'(s_1) = 0, \quad \Phi'(s_{N+1}) = 0.$$

Отметим, что при слишком больших значениях параметров сглаживания w_k численное решение задачи может оказаться существенно искаженным. Поэтому вычисления проводились с уменьшением значений w_k до тех пор, пока решения для двух последовательных наборов w_k не получатся достаточно близкими друг к другу. Расчеты показывают, что значения w_k следует выбирать из интервала $10^{-10} \leq w_k / V_0 \leq 10^{-6}$.

Применение описанного алгоритма может приводить к сильной неравномерности сетки узлов разбиения контура. Этот недостаток устраняется периодической перестройкой сетки.

2. Динамика пузырька у стенки

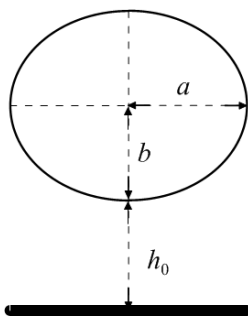


Рис. 1. Геометрические параметры пузырька у стенки.

Рассматривается схлопывание кавитационного пузырька в воде при комнатных условиях вблизи плоской жесткой стенки. Поверхность пузырька представляет собой эллипсоид вращения с сечением, изображенным на рис. 1. Полуоси a и b при заданном отношении $e = b/a$ определяются из условия равенства объема эллипсоида объему сферы радиуса R_0 . Давление на «бесконечности» постоянное. Изучается динамика пузырька в зависимости от его начальной формы, характеризуемой параметром e , и начального расстояния h_0 между пузырьком и стенкой. Задача решается для следующих исходных данных:

$$R_0 = 1 \text{ мм}, \quad p_\infty = 0.1 \text{ МПа}, \\ \rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \sigma = 0, \\ h_0/R_0 \in [0, 2], \quad e \in [0.5, 2], \\ p_b^0 = 0.0023 \text{ МПа}, \quad \gamma = 1.33, \\ \bar{a} = 8.4 \cdot 10^{-5}, \quad \bar{b} = 1.8 \cdot 10^{-5}$$

Результаты для пузырька, касающегося стенки ($h_0 = 0$), при $e = 0.5, 1, 2$ приведены на рис. 2 а, б, с соответственно. Для нескольких последовательных

моментов времени, последний из которых t_c совпадает с моментом начала разрушения пузырька (нарушения односвязности контура) изображены форма пузырька, радиальная v_ρ и осевая v_z составляющие скорости

жидкости на его контуре. Видно, что у первоначально сплюснутого эллипсоидального пузырька ($e = 0.5$, рис. 2 а) в момент t_c образуется малая тороидальная область, в окрестности которой наблюдаются наибольшие по контуру скорости v_ρ и v_z . Для вытянутого эллипсоидального пузырька ($e = 2$, рис. 2 с) локальный максимум радиальной скорости v_ρ вблизи

стенки приводит к образованию тонкой ножки с отделением малой полости. Наибольшие скорости возникают в верхней части контура, где также начинает образовываться малая тороидальная область. Деформация сферического пузырька происходит с образованием на его поверхности кумулятивной струи ($e = 1$, рис. 2 б), направленной к стенке вдоль оси z . В момент t_c струя достигает противоположной части поверхности пузырька в точке его контакта со стенкой. При этом наибольшая скорость жидкости в струе (157.8 м/с) наблюдается у ее основания в верхней части и направлена по касательной к поверхности пузырька, а скорость конца струи v_z равна 120.8 м/с (аналогичные значения получены в [9]).

Для различных значений e и расстояния до стенки h_0 на рис. 3, 4 показаны формы пузырька в момент начала разрушения t_c : на рис. 3 – для сплюснутого эллипсоида ($e < 1$), а на рис. 4 – для сферы и вытянутого эллипсоида ($e \geq 1$). Видно, что форма пузырька в момент t_c весьма различна. При небольшой начальной несферичности (рис. 3 д, е, рис. 4 б) образуется кумулятивная струя, направленная перпендикулярно стенке. При этом для $e = 0.82$ и $e = 1.05$ такая струя возникает только у пузырька, касающегося стенки ($h_0 = 0$). Наличие слоя жидкости между пузырьком и стенкой при $e = 0.82$ приводит к развитию радиально сходящейся струи и образованию в верхней части полости пузырька в момент t_c дочернего пузырька. По мере увеличения h_0 размеры дочернего пузырька возрастают. При $e = 1.05$ происходит смыкание двух частей поверхности пузырька по окружности, в результате чего в боковой части поверхности пузырька образуется малая тороидальная полость, а между концом струи и нижней частью его поверхности возникает дискообразный кавитационный фрагмент меньших размеров.

При увеличении расстояния до стенки и начальной несферичности пузырька его форма в момент начала разрушения t_c становится либо гантелевидной (рис. 3 б, с, д), либо образуются одна (рис. 4 с, д, е) или две тороидальные полости (рис. 3 а, рис. 4 ф).

На рис. 5 для ряда значений e представлены формы пузырька в момент t_c в случае отсутствия стенки. Сопоставив их с тем, что приведено на рис. 3, 4, можно заключить, что при существенной несферичности ($e = 0.5, 0.67, 1.5, 2$) влияние стенки на форму пузырька в момент t_c при удаленности пузырька от стенки $h_0/R_0 \geq 2$ незначительно.

Расчеты показывают, что возникновение кумулятивной струи, направленной перпендикулярно стенке, наблюдается для пузырьков, примыкающих к стенке, при значениях e , принадлежащих интервалу $[0.82, 1.05]$. На рис. 6 изображено изменение формы пузырька во времени и скорость жидкости на контуре в момент начала его разрушения для $e = 0.9, 1, 1.05$. Отметим, что у первоначально сплющенного пузырька струя тоньше, а ее скорость значительно больше, чем у сферического или вытянутого.

На рис. 7 пузырек, полученный в расчетах настоящей работы в момент начала разрушения, сравнивается с пузырьком, сфотографированным примерно в этот же момент в эксперименте [15]. Видно, что форма рассчитанной кумулятивной струи качественно согласуется с тем, что наблюдается в эксперименте.

Зависимости среднего диаметра струи d_{st} и нормальной скорости ее конца $v_z(s_0)$ от начальной формы пузырька, контактирующего со стенкой, для $e \in [0.82, 1.05]$ представлены на рис. 8. За средний диаметр струи выбиралось значение r , соответствующее середине интервала изменения z . Видно, что с уменьшением параметра e диаметр струи

уменьшается примерно в 7 раз, а ее скорость возрастает в 6 раз. Для оценки влияния пара в пузырьке были выполнены аналогичные расчеты для пустого пузырька ($p_b^0 = 0$). Сравнение результатов для кавитационного и пустого пузырьков показало, что влияние пара незначительно, когда в момент начала разрушения t_c отношение текущего объема к начальному $V/V_0 > 10^{-3}$. Это соотношение, в основном, выполняется для пузырьков, контактирующих со стенкой, или при их существенной начальной несферичности. При меньших значениях V/V_0 влияние пара становится более значительным. На рис. 9 приведены формы пустого (пунктирные линии) и кавитационного (сплошные линии) пузырьков в момент начала разрушения t_c для $e=0.9, 1.0, 1.1$ и $h_0/R_0=1.5$ (a), 2.0 (b). При $e=1.0, 1.1$ у пустого пузырька наблюдается смыкание двух частей поверхности по некоторой окружности, а у кавитационного – контакт двух частей поверхности происходит в одной точке. При $e=0.9, h_0/R_0=1.5$ влияние пара на форму пузырька в момент t_c мало, а при $h_0/R_0=2.0$ формы пустого и кавитационного пузырьков существенно различны.

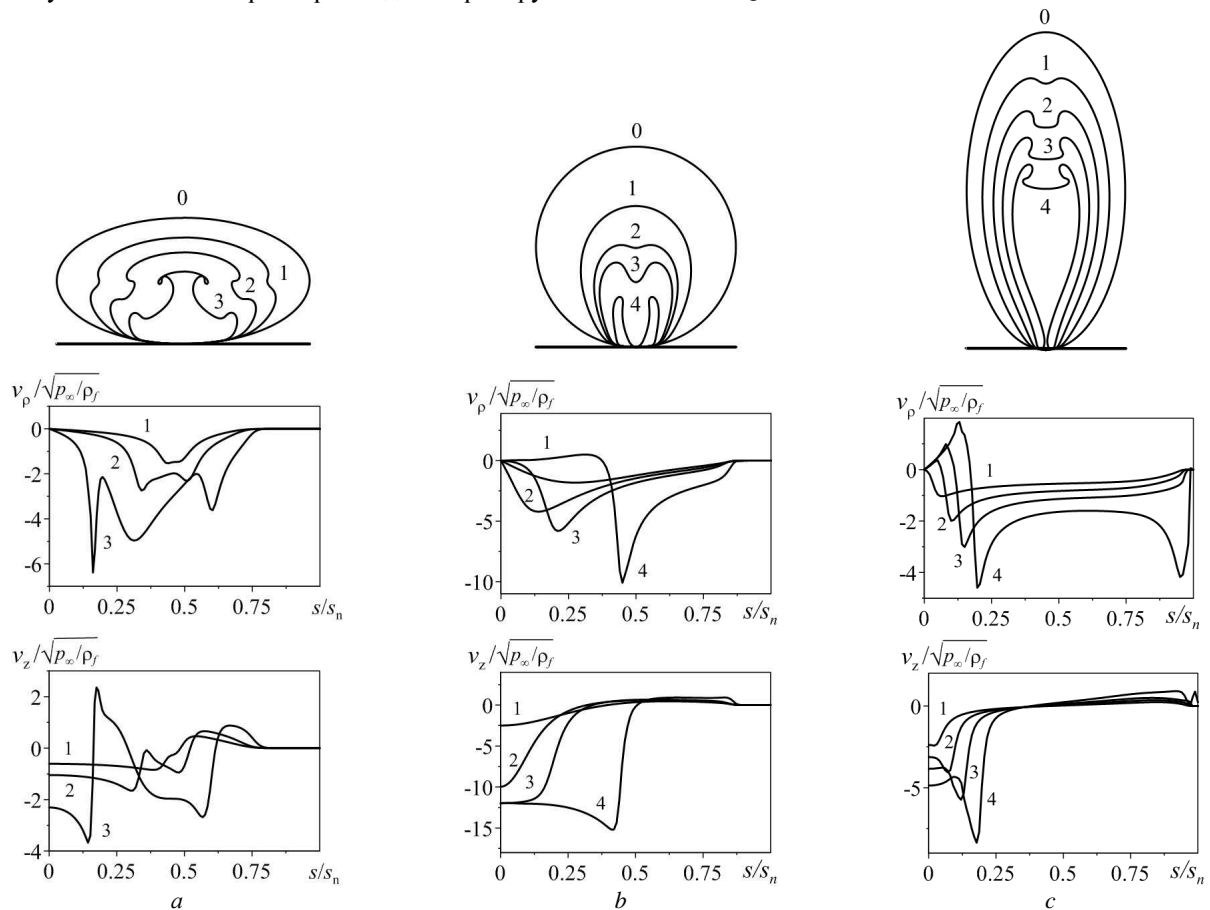


Рис. 2. Форма примыкающего к стенке пузырька ($h_0 = 0$), радиальная v_r и осевая v_z составляющие скорости жидкости на его контуре при начальной несферичности $e = 0.5$ (a), 1 (b), 2 (c) в моменты времени: a – $t = 75.4$ (кривая 1), 95.2 (2), 109.8 (3) мкс; b – $t = 92.2$ (кривая 1), 102.6 (2), 105.9 (3), 111.5 (4) мкс; c – $t = 64.6$ (кривая 1), 81.3 (2), 91.0 (3), 98.4 (4) мкс. Кривые 0 – начальная форма пузырька в момент $t = 0$.

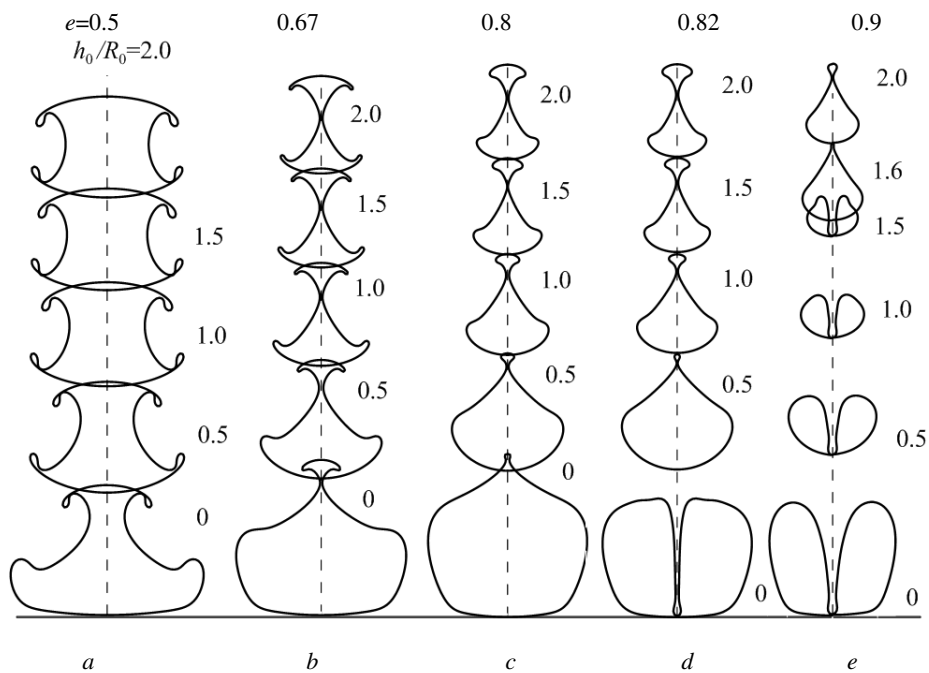


Рис. 3. Форма пузырька в момент начала его разрушения t_c при разных начальном расстоянии до стенки h_0 и начальной несферичности $e < 1$.

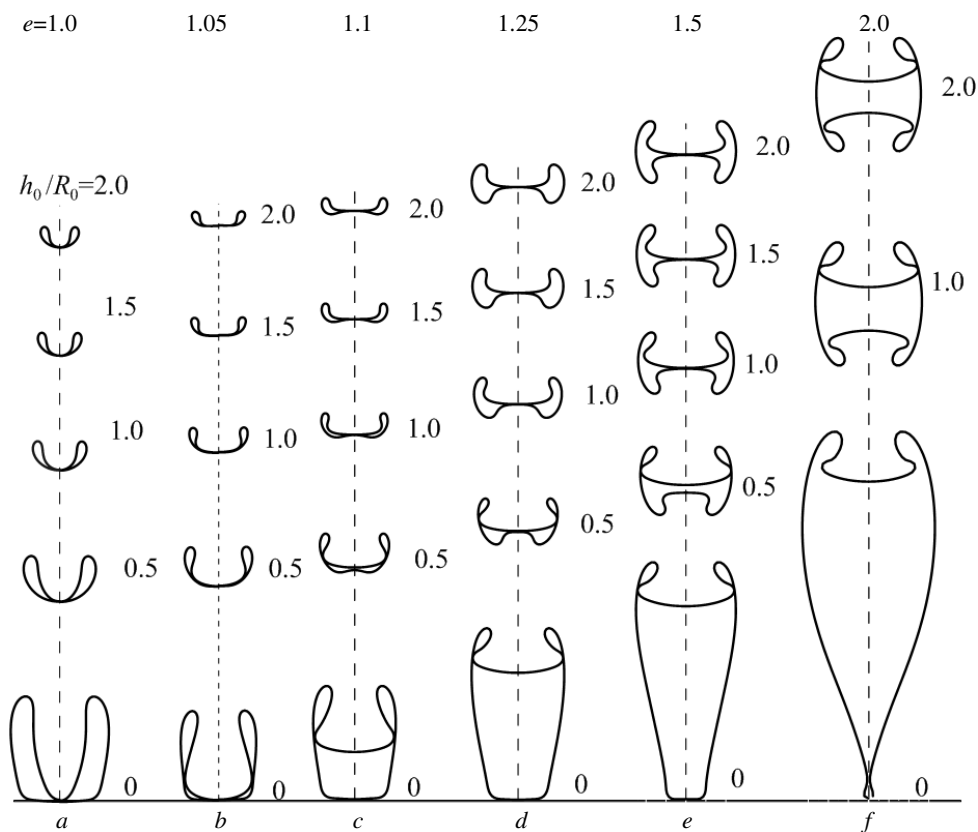


Рис. 4. Форма пузырька в момент начала его разрушения t_c при разных начальном расстоянии до стенки h_0 и начальной несферичности $e \geq 1$.

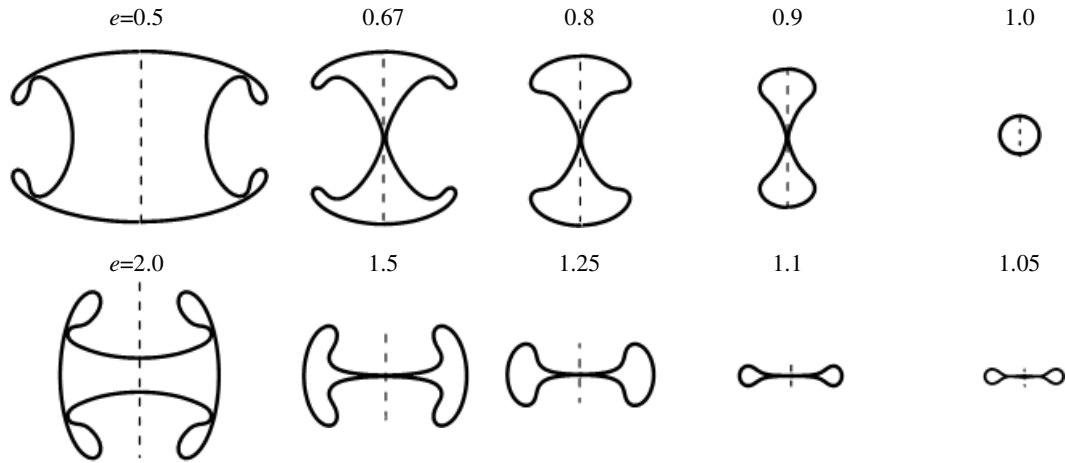


Рис. 5. Форма пузырька в момент начала его разрушения t_c в отсутствии стенки ($h_0/R_0=\infty$) при разной начальной несферичности e .

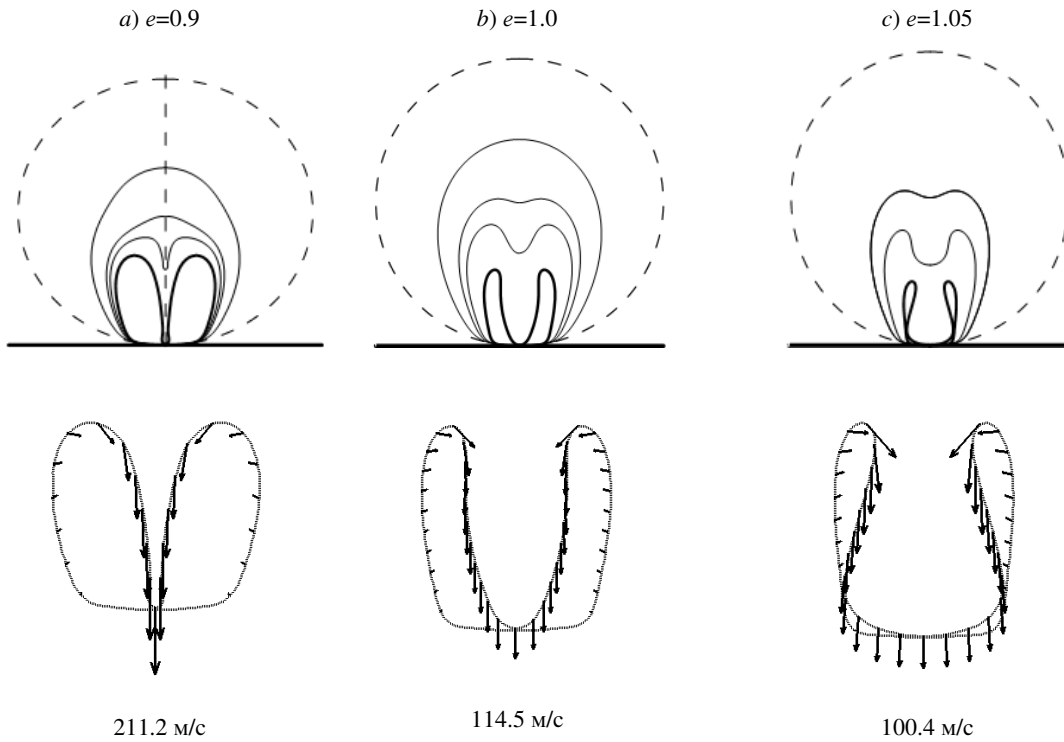


Рис. 6. Изменение формы пузырька во времени и скорость жидкости на контуре в момент начала его разрушения для $e = 0.9$ (a), 1(b), 1.05(c).



a



b

Рис. 7. Пузырек в момент начала разрушения в расчетах при $e = 0.82$ (a) и в эксперименте (b, фотография из [15]).

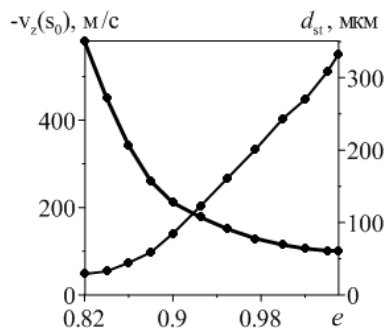


Рис. 8. Зависимости среднего диаметра струи d_{st} и нормальной скорости ее конца $v_z(s_0)$ от e для пузырька у стенки.

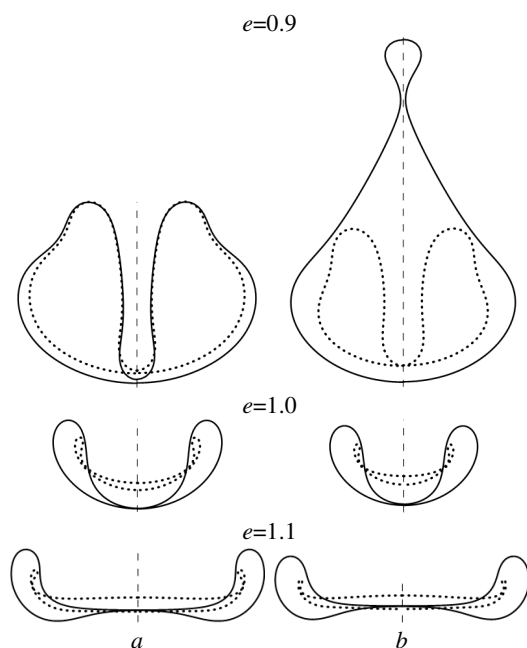


Рис. 9. Формы пустого (пунктирные линии) и парового (сплошные линии) пузырьков в момент t_c для $h_0/R_0 = 1.5 - a, 2.0 - b$ и $e = 0.9, 1.0, 1.1$.

Выводы

Исследован процесс схлопывания осесимметричного кавитационного пузырька в идеальной несжимаемой жидкости вблизи плоской твердой стенки в зависимости от расстояния до стенки и начального отклонения формы пузырька от сферической. Использован численный метод, основанный на схеме Эйлера для коррекции положения контура пу-

зырька и значений потенциала скорости по времени и методе граничных элементов. Расчет проводился до начала разрушения пузырька (до потери его односвязности). Для эллипсоидальных возмущений сферической формы пузырька в начале схлопывания определен интервал значений отношения полуосей, при которых на поверхности пузырька образуется кумулятивная струя, направленная перпендикулярно плоскости стенки. Показано, что влияние стенки уменьшается не только с ее удалением от пузырька, но и по мере увеличения начального отклонения формы пузырька от сферической.

Приведены зависимости среднего диаметра струи и скорости ее конца от начальной формы пузырька у стенки. Показано, что с увеличением начальной несферичности в сплюснутых эллипсоидальных пузырьках диаметр струи уменьшается, а скорость ее конца возрастает. Сравнение результатов для кавитационного и пустого пузырьков показывает, что для пузырька, контактирующего со стенкой, влияние пара на его форму в момент начала разрушения незначительно.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00341a).

ЛИТЕРАТУРА

1. Blake J. R., Taib B. B., Doherty G. // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 479–497.
2. Blake J. R., Gibson D. C. // A. Rev. Fluid Mech. 1987. V.19. P. 99–123.
3. Zhang Z. Y., Zhang H. S. // Physical Review E. 2004. V. 70. 056310.
4. Blake J. R., Hooton M. C., Robinson P. B. and Tong R. P. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1997. V. 355. P. 537–550.
5. Yuan H., Prosperetti A. // Phys. Fluids. 1997. V. 9. P. 127–142.
6. Tsigliffis K., Pelekasis N. // Physics of Fluids. 2005. V. 17. P. 1–18.
7. Popinet S., Zaleski S. // J. Fluid Mech. 2002. V. 464. P. 137–163.
8. Shervani-Tabar M. T. // PhD Thesis, 1995. University of Wollongong, Wollongong, Australia.
9. Войнов О. В., Войнов В. В. // ДАН СССР. 1976. Т. 227. №1. С. 63–66.
10. Longuet-Higgins M. S., Oguz H. N. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1997. V. 355. P. 625–639.
11. Войнов О. В., Войнов В. В. // ДАН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 559–562.
12. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов М.: Мир, 1987. 524 с.
13. Best J. P., Kucera A. // J. Fluid Mech. 1992. V. 245. P. 137–154.
14. Wang Q. X., Yeo K. S., Khoo B. C., Lam K. Y. // Computers and Fluids. 1996. V. 25. N. 7. P. 607–628.
15. Crum L. A. // J. Physique. 1979. V. 40. C. 285–288.

Поступила в редакцию 31.10.2012 г.