

УДК 532.546:536.421

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ЛЬДА ПРИ ИНЖЕКЦИИ ВОДЫ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ, НАСЫЩЕННУЮ ЛЬДОМ И ГАЗОМ

© В. Ш. Шагапов<sup>1,3</sup>, М. Н. Галимзянов<sup>1,2\*</sup>, М. Н. Запивахина<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН  
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, Проспект Октября, 71.

Тел./факс: +7 (347) 235 52 55.

E-mail: monk@anrb.ru

<sup>2</sup>Башкирский государственный университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450074 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел./факс: +7 (347) 273 67 27.

E-mail: monk@anrb.ru

<sup>3</sup>Бирский филиал Башкирского государственного университета  
Россия, Республика Башкортостан, 452453 г. Бирск, ул. Интернациональная, 10.

Тел./факс: +7 (34784) 4 04 55.

E-mail: zapivakhina-marina@rambler.ru

*В плоскоодномерной авторемодельной постановке изучен процесс образования льда при инжекции воды в пористую среду. Проанализировано влияние параметров пористой среды, а так же температуры нагнетаемой воды на протяженность области образования льда в пористом пласте.*

**Ключевые слова:** инжекция, фильтрация, пористая среда, образование льда.

### Введение

В связи с интенсивным освоением северных территорий, находящихся в районах с холодным климатом, большая часть которых располагается в зонах распространения вечной мерзлоты, особенно актуальным становится изучение процессов, связанных с тепломассопереносом в почвах, грунтах и горных породах. Методы математического моделирования процессов, связанных с фазовыми переходами вода-лед, находят применение при проектировании инженерных сооружений, разработки способов добычи полезных ископаемых, прогнозировании различных природных явлений и аварий. Опыт показывает, что физико-математические свойства грунтов и пород зависят от количества содержащихся в них льда и воды. В связи с этим особо важным является изучение механизма влагопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах.

### Постановка задачи и основные уравнения

В плоскоодномерной постановке рассмотрим задачу об инжекции воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом (воздухом). Будем полагать, что при закачке воды в пористой среде происходит прихват тепла скелетом и в порах образуется лед. Рассмотрим случай, когда фазовые переходы происходят в объемной области. Тогда в результате закачки воды от границы вглубь пласта начинает распространяться объемная область образования льда, разделяющая пласт на три зоны. В первой (ближней) области в порах присутствует вода, во второй (промежуточной) области содержится вода и лед, в третьей (дальней) области находится лед и газ. Насыщенность пор льдом в дальней области равна исходной льдонасыщенности пласта  $S_{i0}$ .

Будем полагать, что в начальный момент температура пористой среды равна  $T_0$ , а давление  $p_0$ :

$$t = 0: p = p_0, T = T_0$$

Пусть через границу закачивается вода с температурой  $T_e$  при постоянном давлении  $p_e$ . Схема процесса нагнетания воды в пористую среду, насыщенную газом, показана на рис. 1.

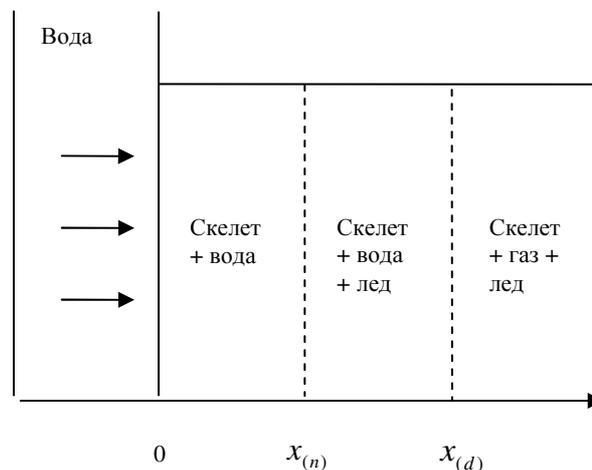


Рис. 1. Схема процесса нагнетания теплой воды в пористую среду, насыщенную газом.

Тогда граничное условие имеет вид:  $x=0: p = p_e, T = T_e (t > 0)$ . Кроме этого будем полагать, что температура на границах областей меняется скачкообразно. Температура в ближней зоне  $T_1$  равна температуре закачиваемой воды  $T_e$ , тем-

\* автор, ответственный за переписку

пература в промежуточной области  $T_2$  равна температуре плавления  $T_{(n)}$ , а температура в дальней области  $T_3$  равна исходной температуре пористой среды  $T_0$ .

Для описания процессов теплопереноса при закачке воды в пористый пласт примем следующие допущения. Будем считать, что процесс однотемпературный, т.е. температура пористой среды и насыщающего вещества (газа, льда и воды) одинаковы; скелет пористой среды, лед и вода несжимаемы; скелет и лед неподвижны, пористость скелета постоянна:

$$\rho_{sk}, \rho_l, \rho_i, m = const.$$

Здесь  $\rho_j (j = sk, l, i)$  – истинные плотности фаз;  $m$  – пористость; индексы  $sk, l, i$  соответствуют параметрам скелета, воды и льда.

С учетом принятых допущений для ближней области уравнения сохранения массы воды запишем в виде [1, 2]

$$m \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_l m v_l)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$S_l = 1,$$

где  $S_l$  – водонасыщенность,  $v_l$  – скорость фильтрации воды.

Процесс фильтрации воды подчиняется закону Дарси

$$m v_l = - \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2)$$

Зависимость коэффициента проницаемости скелета  $k_l$  от «живой» пористости  $mS_l$  будем задавать на основе формулы Козени [1]. Тогда для зависимости проницаемости от водонасыщенности будем иметь

$$k_l = k_* \frac{(mS_l)^3}{(1 - mS_l)^2} \quad (3)$$

Если  $m \ll 1$ , то  $mS_l \ll 1$ , и поэтому можно полагать

$$k_l = k_* (mS_l)^3 \approx k_0 S_l^3 \quad (k_0 = k_* m^3), \quad (4)$$

где  $k_0$  – соответствует проницаемости «чистого» скелета.

Уравнение сохранения массы воды для промежуточной зоны, где поры заполнены льдом и водой, запишется в виде [1, 2]

$$m(1 - S_i) \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_l m (1 - S_i) v_l)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где  $S_l$  – льдонасыщенность среды.

Процесс фильтрации воды в данной области также подчиняется закону Дарси

$$m(1 - S_i) v_l = - \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad S_l = 1 - S_i, \quad (6)$$

где коэффициент проницаемости  $k_l$  согласно формуле Козени равен  $k_l \approx k_0 (1 - S_i)^3$ .

На границе между образовавшимися областями должны выполняться условия баланса массы и тепла:

$x = x_{(n)}$  :

$$m v_{(n)}^- - m(1 - S_i) v_{(n)}^+ = m S_i (1 - \tilde{\rho}) \dot{x}_{(n)}$$

$$m \rho_l c_l \Delta T_{(n)} v_{(n)}^- = (\rho c \Delta T_{(n)} + m S_i \rho_l L) \dot{x}_{(n)} \quad (7)$$

$x = x_{(d)}$  :

$$m(1 - S_i) v_{(d)}^- = m(1 - S_i (1 - \tilde{\rho}) - \rho S_{i0}) \dot{x}_{(d)}$$

$$m c_l \rho_l \Delta T_{(d)} v_{(d)}^- + m \rho_l L (S_i - S_{i0}) \dot{x}_{(d)} = \rho c \Delta T_{(d)} \dot{x}_{(d)} \quad (8)$$

Здесь  $\rho c = (1 - m) \rho_{sk} c_{sk} + m \sum_{j=g,l,i} S_j \rho_j c_j$  –

удельная объемная теплоемкость системы;  $c_j$  – удельная теплоемкость фаз,  $L$  – удельная теплота плавления льда;  $\Delta T_{(d)} = T_0 - T_{(n)}$ ,  $\tilde{\rho} = \rho_i / \rho_l$ ,  $\Delta T_{(n)} = T_{(n)} - T_e$ . Верхние значки (+) и (–) соответствуют значению параметров, терпящих разрыв, перед и за границей. Во всем пласте величину  $\rho c$  будем считать постоянной, поскольку основной вклад в нее вносят параметры скелета пористой среды.

Из условия баланса тепла на дальней границе получаем температурный критерий проникания воды в пористый пласт:

$$\Delta T_{(d)} = \frac{m(1 - S_{i0}) \rho_l L}{\rho c}.$$

Анализ показывает, что для большинства пористых сред значение исходной температуры пласта, при которой еще возможно проникание воды в грунт, составляет около 253 K.

Сформулированная задача имеет автомодельное решение. Введем автомодельную переменную

$\xi = x / \sqrt{\mathfrak{K}^{(p)} t}$  ( $\mathfrak{K}^{(p)} = \frac{k_0 \Delta p}{m \mu_l}$ ), где  $\mathfrak{K}^{(p)}$  – пьезопроницаемость пласта,  $\Delta p = p_e - p_0$  – перепад давления в пласте,  $\mu_l$  – динамическая вязкость воды.

Закон движения границы фазовых переходов будем искать в виде  $x_{(s)} = \xi_{(s)} / \sqrt{\mathfrak{K}^{(p)} t}$ , где  $s = n, d$ .

Проинтегрировав уравнения (1) и (5) с учетом выражений (2) и (6), а так же начальных и граничных условий, для каждой из областей получаем следующие аналитические решения:

$$\xi = \xi_{(n)} : P_{(1)} = P_e + (P_{(n)} - P_e) \frac{\xi}{\xi_{(n)}} \quad (9)$$

$$\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)} :$$

$$P_{(2)} = P_{(n)} + (P_0 - P_{(n)}) \frac{\xi - \xi_{(n)}}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} \quad (10)$$

$$\xi = \xi_{(d)} : P_{(3)} = P_0 \quad (11)$$

После подстановки аналитических решений (9)–(11) в систему граничных условий (7) и (8) она принимает вид:

$$\xi = \xi_{(n)} :$$

$$\frac{(1-S_i)^3 \Delta P_{(d)}}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} - \frac{1 - \Delta P_{(d)}}{\xi_{(n)}} = \frac{\xi_{(n)}}{2} S_i (1 - \rho) \quad (12)$$

$$\frac{1 - \Delta P_{(d)}}{\xi_{(n)}} = \frac{\xi_{(n)}}{2} \frac{(1 - \theta_{(d)}) + m \hat{\rho}_i Ja S_{i0}}{m \hat{\rho}_i \hat{c}_i (1 - \theta_{(d)})}$$

$$\xi = \xi_{(d)} :$$

$$\frac{(1-S_i)^3 \Delta P_{(d)}}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} = \frac{\xi_{(d)}}{2} (1 - S_i (1 - \rho) - \rho S_{i0}) \quad (13)$$

$$\frac{(1-S_i)^2 \Delta P_{(d)}}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} = \frac{\xi_{(d)}}{2} \frac{\theta_{(d)} - m \hat{\rho}_i Ja (S_i - S_{i0})}{m \hat{\rho}_i \hat{c}_i \theta_{(d)}}$$

Здесь

$$\hat{\rho}_i = \rho_l / \rho, \hat{c}_i = c_l / c, J_a = L / c \Delta T,$$

$$\Delta T = T_e - T_0, \Delta P_{(d)} = \frac{P_{(n)} - P_0}{P_e - P_0}, \theta_{(d)} = \frac{T_{(n)} - T_0}{T_e - T_0}.$$

### Результаты расчетов

Таким образом, теоретическое описание полей давления и температур свелось к нахождению трех неизвестных параметров  $\xi_{(n)}$ ,  $\xi_{(d)}$  и  $P_{(d)}$  из системы (12) и (13). Такая система может быть решена численно, например, методом итераций. Для параметров, определяющих свойства пористой среды

(если специально не оговорено), воды и льда приняты следующие величины:  $k_0 = 10^{-12} \text{ м}^2$ ,  $\rho c = 1.6 \times 10^6 \text{ Дж/К} \cdot \text{кг}$ ,  $\lambda = 0.105 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ ,  $\rho_l = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_i = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $S_{i0} = 0.5$ ,  $\mu_l = 10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ ,  $L = 3.4 \times 10^5 \text{ Дж/кг}$ ,  $T_0 = 268 \text{ К}$ ,  $\rho_0 = 0.1 \text{ МПа}$ ,  $P_e = 0.12 \text{ МПа}$ ,  $c_l = 4200 \text{ Дж/К} \cdot \text{кг}$ .

На рис. 2 представлены картины полей давления и температуры для различных значений температур закачиваемой воды  $T_e$ . Линии 1, 2, 3 соответствуют значениям температур инжектируемой воды  $T_e = 300, 330, 350 \text{ К}$ . Как следует из данного рисунка, по мере увеличения температуры инжектируемой воды при одном и том же значении граничного давления увеличивается так же и скорость движения границы образования льда, определяемая значением  $\xi_{(n)}$ .

На рис. 3 представлены картины полей давления и температуры для различных исходных температур пористой среды  $T_0$ . Линии 1, 2, 3 соответствуют значениям температур пористой среды  $T_0 = 253, 263, 270 \text{ К}$ . Как следует из данного рисунка, по мере снижения температуры грунта процесс прихвата тепла холодной средой происходит более интенсивно. Видно, что при уменьшении исходной температуры пористой среды на 10 К скорость движения границы образования льда сокращается примерно в три раза, при этом льдонасыщенность пор увеличивается. Из рисунка также следует, что при низкой исходной температуре пористой среды прихват тепла происходит практически мгновенно. При этом область образования льда оказывается локализованной в узкой области, прилегающей к границе закачки воды, а льдонасыщенность пор стремится к единице.

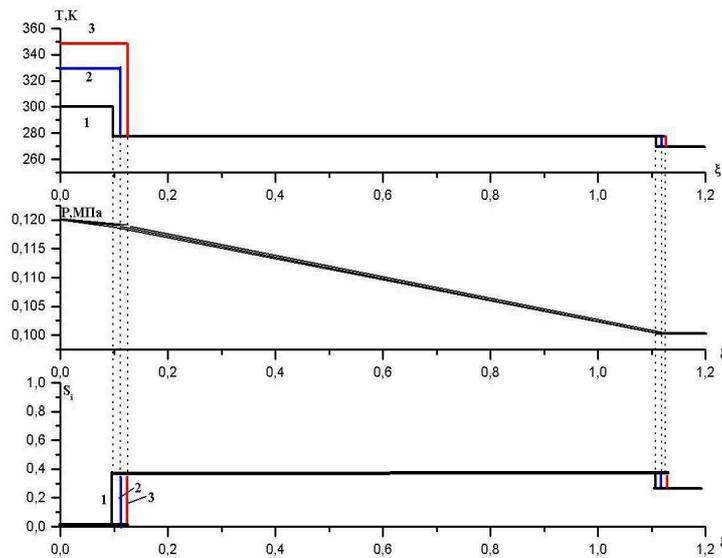


Рис. 2. Распределение температуры и давления в пористой среде при различных значениях нагнетаемой воды  $T_e = 300 \text{ К}$  (1),  $T_e = 330 \text{ К}$  (2),  $T_e = 350 \text{ К}$  (3).

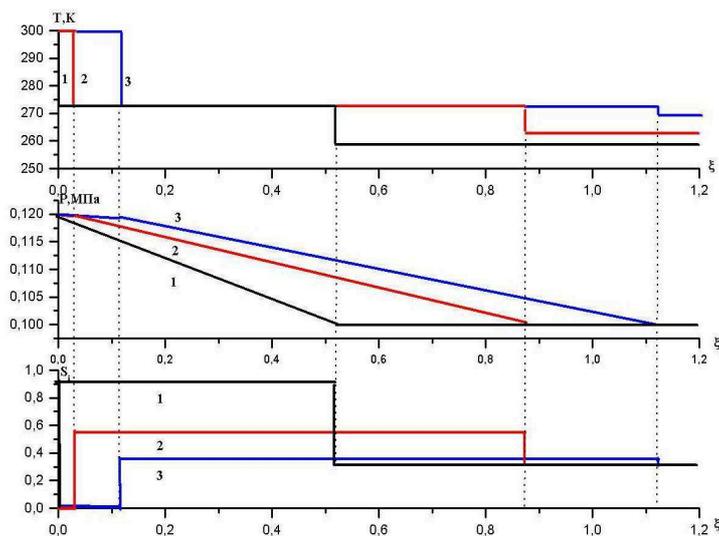


Рис. 3. Распределение температуры и давления в пористой среде при различных исходных температурах среды  $T_0 = 253K$  (1),  $T_0 = 263K$  (2),  $T_0 = 270K$  (3).

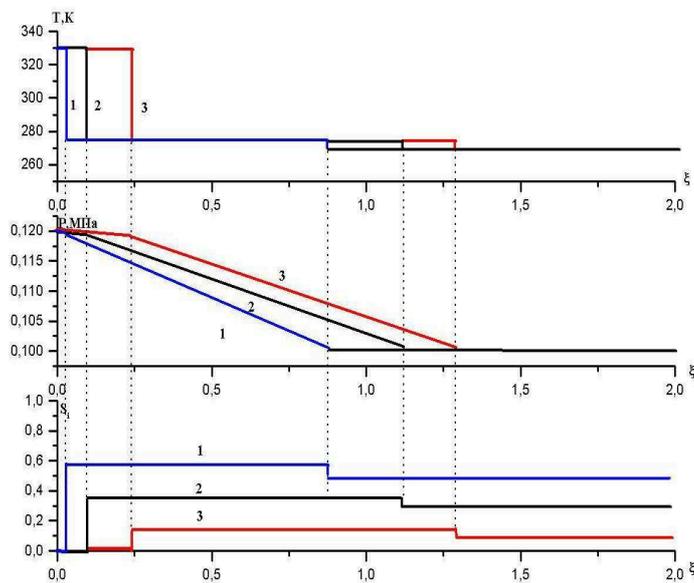


Рис. 4. Влияние исходной льдонасыщенности на распределение температуры и давления в пористой среде  $S_{i0} = 0.5$  (1),  $S_{i0} = 0.3$  (2),  $S_{i0} = 0.1$  (3).

На рис. 4 представлены картины полей давления и температуры для различных исходных льдонасыщенностей пористой среды. Линии 1, 2, 3 соответствуют значениям льдонасыщенности среды  $S_{i0} = 0.5; 0.3; 0.1$ . Видно, что увеличение льдонасыщенности среды приводит к снижению скорости движения границы образования льда. Объяснить это можно тем, что увеличение льдонасыщенности пор приводит к уменьшению скорости фильтрации воды и снижению температуры воды до температуры образования льда.

**Заключение**

На основе построенных авторемодельных решений, проведен численный анализ, иллюстрирую-

щий влияние исходных параметров пористой среды, насыщенной газом и льдом, а также температуры закачиваемой воды на распределение температуры и давления в пористой среде.

Установлено, что снижение температуры инжектируемой воды приводит к снижению скорости образования льда. При низкой исходной температуре пористой среды область образования льда оказывается локализованной около границы нагнетания воды, при этом льдонасыщенность пор стремится к единице. Получено условие проникания воды в холодный пористый пласт.

Данная задача в более простой постановке была решена в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Российской фонда фундаментальных исследований (11-01-97014-р\_поволжье\_а), Программы фонда фундаментальных исследования ОЭММПУ РАН (ОЕ-13) и Программы фонда фундаментальных исследований Президиума РАН (П-23).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон А. С. Движения природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, 1947. 244 с.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
3. Цыпкин Г. Г. Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 232 с.
4. Цытович Н. А. Механика мерзлых грунтов. М.: Высшая школа, 1973. 448 с.
5. Васильев В. И., Попов В. В., Цыпкин Г. Г. Нелинейная задача протаивания ненасыщенного мерзлого грунта при наличии капиллярных сил // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 119–128.
6. Шагалов В. Ш., Запивахина М. Н. Численное моделирование процесса разложения газогидратов при инъекции газа в пористую среду // Теоретические основы химических технологий. 2012. Т. 46. №3. С. 293–302.

*Поступила в редакцию 01.11.2012 г.*