раздел **ФИЛОСОФИЯ, СОЦИОЛОГИЯ, КУЛЬТУРОЛОГИЯ и ПОЛИТОЛОГИЯ**

УДК 51.1

АНАЛИТИКИ И ИНТУИТИВИСТЫ В МАТЕМАТИКЕ

© Л. Б. Султанова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел./факс: +7 (347) 229 96 64.
Email: sultanova2002@yandex.ru

В статье исследуются аналитический и интуитивный типы математического мышления и выявляется значение интуиции как основного фактора, формирующего математика именно как аналитика или интуитивиста. Обосновывается, что интуиция играет определенную роль и в деятельности математиков-аналитиков, для чего привлекается соответствующий историко-математический материал.

Ключевые слова: *математическая интуиция, неявное знание, логический «разрыв», геделевская процедура, априорное знание, уникальность мышления, социокультурная среда, ограниченность личной интерпретации в математике.*

Вопрос об основных типах мышления, в том числе и математического, обычно исследуют с точки зрения психологии или педагогики. При этом обычно речь идет о том, какие же типы математического мышления существуют и каким образом можно влиять на их формирование в конкретных случаях. Основная задача данной статьи иная – охарактеризовать специфику аналитического и интуитивного стилей математического мышления с учетом факторов, их определяющих, и привести яркие и убедительные исторические примеры.

Доказано, что именно интуицию в математическом познании необходимо квалифицировать в качестве важнейшего фактора, определяющего в основном тип мышления того или иного конкретного математика [1]. Обычно говорят о более или менее интуитивном стиле математического мышления, т.е. о математиках-интуитивистах и о математиках-рационалистах, или, следуя терминологии А. Пуанкаре, математиках-аналитиках. Иначе он их называет соответственно геометрами и логиками [2]. К первым А. Пуанкаре причисляет Ли и Римана, ко вторым – Эрмита и Вейерштрасса. Очень высоко редкостную математическую интуицию Римана оценивал и Ф. Клейн, отмечая при этом ведущую роль интуиции в математическом исследовании [3]. Представляется, что в принципе математическая интуиция может рассматриваться как важнейший фактор, определяющий тип мышления конкретного математика. А поскольку в результате работы математической интуиции вырабатывается в т.ч. и неявное знание, то его также можно рассматривать в качестве фактора, оказывающего существенное влияние на формирование типа математического мышления того или иного конкретного математика.

Говорят, что математик обладает интуитивным стилем мышления, когда, работая долго над проблемой, он неожиданно получает решение, которое он еще формально не проверил. Также интуитивисту присуща способность быстро делать очень удачные предположения о том, какой из подходов к решению задачи окажется наиболее продуктивным. В противоположность аналитическому интуитивное мышление характеризуется тем, что в нем отсутствуют четко определенные этапы. Интуитивное мышление основано на «свернутом» восприятии всей проблемы сразу. Математик получает ответ, который может быть правильным или неправильным, мало осознавая при этом процесс, посредством которого он этот ответ получил. Обычно интуитивное мышление осуществляется в виде скачков, быстрых переходов, с пропусками отдельных звеньев в процессе решения. Эти особенности интуитивного типа математического мышления требуют тщательной проверки выводов аналитическими средствами.

Аналитическое мышление, в противоположность интуитивному, позволяет отчетливо выразить отдельные этапы в процессе решения задачи и кому-либо рассказать о них. Аналитическое мышление явно тяготеет к алгоритмизации. Его результаты могут быть оформлены в виде отточенного дедуктивного рассуждения, в котором используется логика и которое имеет четкий план. Можно сказать, что интуитивное и аналитическое математическое мышление дополняют друг друга.

Разница в специфике математического мышления интуитивистов и аналитиков очевидна, хотя и те, и другие могут стать выдающимися учеными-математиками. Вместе с тем совершенно определенно А. Пуанкаре утверждает, что не только интуитивистами, но и логиками управляет интуиция – некоторая особая чисто математическая интуиция чистого числа. Она помогает увидеть скрытые аналогии, что в математике играет зачастую решающую роль, и затем уже продуктивно воспользоваться аксиомой математической индукции. Поэтому, как считает А. Пуанкаре, аналитики – искусные мастера силлогизма. Интуиция чистого числа, им свойственная, не является чувственной, и поэтому аналитики почти не ошибаются. Но именно такой тип математического мышления по-настоящему уникален. Аналитики-творцы очень редки. Так оценивает роль интуиции в развитии математического мышления А. Пуанкаре [1].

Здесь возникает вполне законный вопрос – насколько далеки друг от друга эти два вида интуиции? И правомерно ли вообще аналитикам приписывать какую-либо интуицию? Ясно одно – в действиях аналитиков мы видим не одну только логику. Ведь прежде, чем будет применена аксиома математической индукции, необходимо «увидеть» некоторую скрытую аналогию. А при этом выход за рамки тавтологии и дискурсивного мышления неизбежен.

Сам А. Пуанкаре оставляет этот вопрос открытым, настаивая лишь на незаменимости термина «интуиция». Другой исследователь научного творчества, американский философ науки М. Полани, считает, что в любом случае, в т.ч. и для аналитиков, в эвристическом процессе необходимо преодоление логического «разрыва», а значит, необходимо и участие интуитивных элементов [4]. Этот вывод М. Полани обосновывает построением аналогии между так называемой геделевской процедурой и правилами открытия, выработанными А. Пуанкаре. Геделевская процедура заключается в прибавлении формально неразрешимого в какой-либо богатой системе высказывания в качестве независимой аксиомы. Напомним, что истинность геделевского высказывания не может быть проверена в рамках существующей аксиоматической системы. Эта система может, по К. Геделю, все время таким образом пополняться. При этом, однако, не может быть построена универсальная система аксиом, не нуждающаяся в дополнении. Это следует из теорем К. Геделя по следствию, называемому теоремой К. Геделя о неполноте [5]. Открытие, по А. Пуанкаре, совершается по принципу аналогии и далее опирается на аксиому математической индукции. При этом каждая последующая теорема есть следствие предыдущей. В заключение остается повторить все эти действия в обратном порядке. Теперь, если учесть, что в геделевской процедуре включение новой аксиомы обосновывается личностными суждениями, поскольку новая аксиома независима по отношению к уже имеющимся аксиомам, можно сделать вывод о правомерности построенной аналогии [4]. Таким образом, заключаем, что и мышление математиков-аналитиков все же не может быть свободно от влияния интуиции.

В качестве другого фактора, существенно влияющего на формирование типа математического мышления конкретного математика, необходимо рассматривать неявное знание, которое можно квалифицировать в качестве результата неосознанного умозаключения. Вследствие неосознаваемости этого знания математик вне зависимости от типа мышления не может включить утверждение неявного характера в доказательство, хотя оно и незримо там присутствует, например, в качестве скрытых лемм. Вообще все неявное знание, присущее конкретной личности, многослойно и неоднородно. В целом оно опирается на так называемый комплекс неосознанных ощущений, полностью определяющийся психологией личностно-индивидуального восприятия. Поэтому неявное знание личностно, т.е. целиком связано с индивидуально-психологическими особенностями личности.

Вследствие особого статуса априорного знания в познании оно является необходимым условием его возможности независимо от конкретного типа математического мышления. К априорному знанию необходимо отнести слой неявных онтологических предпосылок, относящихся к пониманию мира в целом. В частности, это представление о трехмерности пространства, единстве мира. Неявные онтологические предпосылки представляют собой фундамент для формирования всего компендиума знания конкретной личности, в том числе и математического знания. В слой неявного знания входят и предпосылки гносеологического характера – такие как количество, множество, непрерывность, дискретность; а также числа от нуля до девяти включительно и простейшие геометрические фигуры, в том числе и пространственные. Можно сказать, что неявное знание и представляет собой тот инструмент, посредством которого и осуществляется в дальнейшем само математическое познание. Это именно та основа, на которой и формируются предпосылки, составляющие костяк метода, позволяющего получить теоретические утверждения, которыми, по выражению М. Полани, наполнены учебники [4]. Необходимость опоры на неявное знание объединяет и интуитивистов, и аналитиков.

В целом все неявное знание как таковое можно рассматривать как материал для мыслительной деятельности математика как источник гипотез и догадок. Понятно, что чем более мощным слоем неявного знания обладает математик, тем больше оригинальных идей он может высказать. Однако иногда неявное знание конкретного математика, накапливаясь в процессе математического познания, может породить путаный, непоследовательный стиль математического мышления. В отдельных случаях может возникнуть иллюзия доказательства. Видимо, это и происходило в основном долгие десятилетия в случаях получения все новых ошибочных «доказательств» теоремы Ферма, пока в итоге не было все же получено компьютерное доказательство, признанное в математическом сообществе.

Именно интуиция и неявное знание практически формируют не только тип, но и специфику математического мышления. По крайней мере, можно утверждать, что именно эти факторы формируют математика, прежде всего, как интуитивиста, в идеале – как генератора новых идей. Однако необходимо отметить, что иногда специфика мышления математиков-интуитивистов настолько необычна, что ни они сами, ни исследователи их творчества не могут дать их математическим новациям убедительное теоретическое обоснование.

В частности, это характерно для эвристического процесса индийского математика С. Рамануджана, который суммировал сложнейшие ряды и при этом не оставил никакого вразумительного обоснования своих методов, никаких промежуточных результатов [6].

Представляется, что никакая рационализация уникального стиля математического мышления С. Рамануджана невозможна вообще, если она оказалась невозможной для него самого. В дальнейшем, для того, чтобы получить какое-то представление о методах вычислений рядов, которыми пользовался С. Рамануджан, пришлось буквально «переоткрыть» эти результаты заново, как если бы они были неизвестны вообще. Показательно, что С. Рамануджан любил подчеркивать, что формулы ему внушает некая богиня Намаккаль. И, действительно, часто вставая по утрам с кровати, он тут же записывал готовые формулы, после чего быстро проверял их. Впрочем, строгие доказательства не всегда ему удавались, что показывает пределы возможностей математической интуиции С. Рамануджана и его стиля математического мышления [6]. Кембриджский математик Харди, работавший вместе с ним, отмечает: «...он пришел ко всем своим выводам как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений....» [6]. Отметим, что уникальная специфичность стиля математического мышления С.Рамануджана отнюдь не помешала его успешному сотрудничеству с кембриджским математиком Харди.

Разумеется, ситуация с уникальностью мышления С. Рамануджана нетипична для математики в целом, однако все же не является единственной в своем роде. Известно, что еще до формализации метода интерпретаций Д. Гильбертом в XX в. создатель булевой алгебры – одной из важнейших отраслей математической логики – выдающийся английский математик Дж. Буль сформулировал правила интерпретации коэффициентов нуля и единицы. Это интуитивное прозрение Дж. Буля позволило впоследствии, после того как Д. Гильбертом был разработан формальный аксиоматический метод, заметить, что «Буль предвосхищает гильбертову идею математической теории и связанное с ней понятие о математике как о чисто структурном исследовании с такой степенью точности, которая вряд ли могла быть превзойдена самим Гильбертом» [7]. Вместе с тем отмечается также, что вопрос о методологических воззрениях Буля достаточно сложен, и в науке пока не существует его однозначного удовлетворительного решения. По этому поводу киевский логик Ф. Козловский писал: « ...не может быть, чтобы такая сложная система, будучи в своих основах ошибочной, во всех своих выводах совпадала с истиной» [7]. Существует и другая точка зрения, принадлежащая известному математику Д. Венну, который, в частности, отмечал, что «... множество читателей, просматривая книгу Буля, не обнаруживают понимания употребленных в ней процессов доказательства …» [7]. В целом выводы Д. Венн вполне допускают, что методы Дж. Буля могли быть и ошибочными, а верные результаты получены чисто случайно. Все это также позволяет говорить об особом значении интуиции и неявного знания в стиле мышления Дж. Буля.

Итак, неявное знание личностно и, следовательно, строго индивидуально. Именно эта его особенность и обусловливает уникальность, ценность и незаменимость каждой творческой личности, независимо от рода деятельности. Например, Я. Штейнер, швейцарский пастух, который только в девятнадцать лет научился у Песталоцци читать и писать, благодаря своей геометрической интуиции, в конечном счете, достиг положения профессора Берлинского университета [8]. Он высказывал идеи, выходящие за рамки математики девятнадцатого века, хотя они и были лишены доказательств. Этот не единственный, но редкий случай, тем не менее, достаточно показателен.

Дело в том, что Я. Штейнер был в течение долгого времени не просто лишен благотворного влияния подходящей для будущего незаурядного математика социокультурной среды, но возможно, испытывал ее отрицательное влияние. Тем не менее, поскольку Я. Штейнер все же, по всей видимости, обладал незаурядной математической интуицией, обусловившей его тягу к математике, при благоприятных изменениях социокультурной среды он смог, несмотря на свой достаточно поздний для начала обучения возраст, не просто обучиться грамоте, что в принципе не так уж удивительно, но и достичь выдающихся успехов в занятиях математикой.

Разумеется, тот факт, что интуиция и неявное знание в основном определяют тип и специфику математического мышления и имеют при этом личностный характер, не может не осложнять взаимопонимание между математиками и затрудняет освоение математическим сообществом новых оригинальных идей. Действительно, участие личностного фактора необходимо уже при осуществлении элементарной математической символизации на уровне интуитивной очевидности, которой нельзя избежать даже при действии в рамках простейших алгоритмов, когда речь идет об элементарнейшей подстановке в уже готовый алгоритм – это имеет место, например, в ситуации вычисления корней квадратного уравнения.

Но поскольку математика отличается строгой интерсубъективностью своих символов и терминов, а также тяготеет к предельному дедуктивизму, по крайней мере, теоретически, подлинное понимание в области математического мышления предполагает сведение личностного фактора к минимуму и не приветствует интерпретативных отклонений от общепринятого научного контекста. Следствием ограниченности личностной интерпретации в математике является необходимость серьезных личностных затрат на практическое освоение теоретического материала в целях его практического применения, например, для решения задач. Наверное, тот, кто имеет хотя бы школьный опыт практического освоения математики, согласится с тем, что математика – особый предмет, требующий углубленного изучения и раскрывающий свои «секреты» далеко не всем.

Конечно, возникает вопрос о том, какой тип мышления в математике имеет приоритетное – аналитический или интуитивный? Перефразируя Маяковского, можно сказать: «какой тип мышления матери-математике наиболее ценен»?

Феликс Клейн считал, что, исторически приоритет в математическом познании имеют интуитивисты, поскольку главное – это создать новое знание, дать идею, на что способны единицы, а разворачивать и доказывать могут, хотя и не все, но все-таки многие... [3]. Думается все же, что аналитики и интуитивисты в математике важны одинаково, тем более, что, как здесь и обосновано, в интуиции, правда, в разной степени нуждаются все математики – и аналитики, и интуитивисты. Не будем забывать о том, что великий Р. Декарт считал математическую интуицию рациональной и называл ее «естественным светом разума» [9].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Султанова Л. Б. Интуиция и эвристика в математике // Российский гуманитарный журнал. 2013. №3. С. 237–251.
2. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.
3. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989. С. 300.
4. Полани М. Личностное знание. М.: Прогресс, 1985.
5. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте. М.: Наука, 1982.
6. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. М.: ЕЕ Медиа, 2012.
7. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
8. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины X1X столетия [History of Mathematics from Descartes to the Middle of XIXth Century]. М.: Наука, 1966. С. 441.
9. Декарт Р. Разыскание истины [Search for Truth]. СПб.: Азбука, 2000.

Поступила в редакцию 25.05.2014 г.

ANALYSTS AND INTUITIONALISTS IN MATHEMATICS

© L. B. Sultanova

Bashkir State University
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 64.
Email: sultanova2002@yandex.ru

Studying of the specificity of scientific thinking is regarded as the most important task of modern epistemology, which has not only fundamentally theoretical, but also practical character. Research in the field of philosophy and methodology of mathematics is considered to be most effective as mathematics is the science that operates with abstract objects, autonomous in relation to the outside world. This means that mathematical thinking is most adequate in expressing features or so-called “pure thinking”. The main objective of this article – to characterize the specificity of the analytical and intuitive styles of mathematical thinking taking into account the factors that determine them, and confirm the conclusions by convincing historical examples. This will confirm the value of intuition as a major factor shaping mathematics is as an analyst or intuitionalist. Intuitive thinking is carried out in the form of “jumping”, rapid transitions when there is no some “units” in a deductive “chain” of a mathematical proof. These features are intuitive style of mathematical thinking require thorough verification of the conclusions using analytical tools. The article proves that: 1) not only for the intuitionalists, but also for analysts in the heuristic process of forming a new mathematical knowledge necessary to overcome the logical “gaps”, which means that participation of intuitive elements is necessary; 2) intuition and implicit knowledge in mathematics generally form the type and specificity of mathematical thinking; 3) limited personal interpretation of mathematics causes a unique difficulty of mathematical knowledge and the need for mathematical creativity especially in the process of solving actual problems and non-standard tasks.

Keywords: *mathematical intuition, implicit knowledge, logical “gaps”, Gödel’s procedure, a priori knowledge, unique difficulty of mathematical knowledge, socio-cultural environment, limited personal interpretation of mathematics.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Sultanova L. B. Rossiiskii gumanitarnyi zhurnal. 2013. No. 3. Pp. 237–251.
2. Puankare A. O nauke [About the Science]. Moscow: Nauka, 1990.
3. Klein F. Lektsii o razvitii matematiki v XIX stoletii [Lections about Development of the Science in XIXth Century]. Moscow: Nauka, 1989. Pp. 300.
4. Polani M. Lichnostnoe znanie [Personal Knowlege]. Moscow: Progress, 1985.
5. Uspenskii V. A. Teorema Gedelya o nepolnote [Gödel's Incompleteness Theorem]. Moscow: Nauka, 1982.
6. Levin V. I. Ramanudzhan – matematicheskii genii Indii [Ramanujan Mathematical Genius of India]. Moscow: EE Media, 2012.
7. Styazhkin N. I. Formirovanie matematicheskoi logiki [Formation of Mathematical Logic]. Moscow: Nauka, 1967.
8. Vileitner G. Istoriya matematiki ot Descartesa do serediny Kh1Kh stoletiya. Moscow: Nauka, 1966. Pp. 441.
9. Descartes R. Razyskanie istiny. Saint Petersburg: Azbuka, 2000.

Received 25.05.2014.