

## О КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЯМИ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА

© А. Р. Манапова

*Башкирский государственный университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Тел.: +7 (347) 229 96 32.*

*Email: aygulrm@mail.ru*

*Настоящая работа посвящена вычислительным аспектам решения нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением, когда на контактирующих внутренних границах сред задаются условия сопряжения типа неидеального контакта (то есть задач со скачком коэффициентов уравнения и решения на внутренней поверхности контакта тел; скачок решения пропорционален потоку). В работе построен метод приближенного решения нелинейных уравнений эллиптического типа с условиями сопряжения типа неидеального контакта. Эффективность предложенного метода численного решения подтверждена результатами численных экспериментов для тестовых задач с известными аналитическими решениями.*

**Ключевые слова:** *контактные задачи, нелинейные эллиптические уравнения, разрывные коэффициенты и решение, конечно-разностные методы, итерационные методы, условия неидеального контакта.*

### Введение

Задачи для уравнений математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и решениями, называемые часто контактными задачами (в англоязычной литературе interface problems), возникают естественным образом при математическом моделировании различных процессов, таких как, потоки в пористых средах, перенос тепла или диффузия в сложных композитных материалах, и т.д. Разрыв коэффициентов и решения имеет место в случае, когда область является неоднородной и состоит из нескольких частей с разными свойствами, либо область содержит тонкие прослойки  $S$  с физическими характеристиками, резко отличающимися от основной среды [1–2]. В зависимости от условий на поверхности контакта тел (условий сопряжений), контактные задачи делятся главным образом на две группы: задачи с условиями сопряжения типа идеального контакта (решения и потоки на контактирующих поверхностях в обоих телах совпадают), и задачи с условиями сопряжения типа неидеального контакта (решение разрывно на поверхности контакта и его скачок пропорционален потоку). Последние условия описываются следующими соотношениями:

$$p(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^- = \left( \frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^+ = \theta(x)[u],$$

$$x \in S,$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^\pm = \left( \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n, x_\alpha) \right)^\pm,$$

где  $[u] = u^+(x) - u^-(x)$  – скачок функции  $u(x)$  на  $S$ ;  $p(x)$  – заранее известный поток вещества (теплоты) через элементарную

площадку;  $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$  – заданная функция;  $S = \bar{\Omega}^- \cap \bar{\Omega}^+$  – внутренняя граница раздела сред,  $\Omega^- \cap \Omega^+ = \emptyset$ ,  $\Omega^-$  и  $\Omega^+$  – некоторые области;  $k_1(x)$  и  $k_2(x)$  – коэффициенты диффузии (теплопроводности) сред  $\Omega^-$  и  $\Omega^+$ .

В последние годы активизировались исследования в области разработки методов построения и исследования аппроксимаций для контактных задач. Например, в работах [1, 3–7] построены и исследованы аппроксимации уравнений с условиями сопряжениями типа идеального контакта для УМФ с классическими решениями некоторой степени гладкости. Подробное обсуждение задач с условиями сопряжения типа неидеального контакта описано в работе [2], в которой доказана корректность постановки таких задач, и построены разностные аппроксимации класса задач с условиями сопряжения типа неидеального контакта для линейных эллиптических уравнений. Построение и исследование сходимости разностных схем методами конечных объемов для контактных задач с условиями сопряжения типа неидеального контакта изучалось в работах [8], [9]. В статьях [10–12] обоснована сходимость итерационных процессов решения контактных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, вопросы аппроксимации и численной реализации в этих работах не рассматривались. Заметим, что в выше перечисленных работах (кроме [11]) в случае неидеального контакта рассматриваются линейные эллиптические краевые задачи.

В последнее время за рубежом интенсивно исследуются вопросы численной реализации контактных задач (см., например, [6–9]), что отчасти послужило стимулом исследований, представленных в данной работе. В статье построен для случая неидеального контакта метод приближенного решения нелинейных уравнений эллиптического типа, с разрывными коэффициентами и решением в неоднородной анизотропной среде. Итерационный процесс с итерациями на внутренней границе области разрыва решения и коэффициентов сводит решение исходной контактной задачи к решению, на каждой итерации, двух краевых задач нелинейного типа в подобластях составной области. Для учета нелинейной составляющей уравнений, в каждой из подобластей применяется метод итераций с параметром, который сводит, на каждом шаге итерации, полученные нелинейные разностные задачи к линейным задачам. Реализация итерационных процессов проведена на основе метода верхней релаксации. Доказана сходимость итерационных процессов. Эффективность предложенного метода численного решения подтверждается результатами численных экспериментов. Вычислительные эксперименты проведены с использованием интегрированной среды разработки Embarcadero Delphi пакета Embarcadero RAD Studio на решении серии модельных примеров с известными точными решениями.

Отметим также, что аналогичные, как в настоящей работе, постановки граничных задач о сопряжении типа неидеального контакта в задачах оптимального управления, их разностные аппроксимации были рассмотрены в работах [13–15]. Однако в этих статьях не были рассмотрены вопросы численной реализации. И данную работу можно рассматривать как развитие результатов этих исследований.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in R^2 : 0 \leq r_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  – прямоугольник в  $R^2$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma$ . Область  $\Omega$  разделена прямой  $r_1 = \xi$ , где  $0 < \xi < l_1$  («внутренней контактной границей»)  $\bar{S} = \{r_1 = \xi, 0 \leq r_2 \leq l_2\}$ , где  $0 < \xi < l_1$ ) на левую  $\Omega_1 = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$  и правую  $\Omega_2 = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$  подобласти с границами  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$ . Таким образом, область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$ , а  $\partial\Omega$  – внешняя граница области  $\Omega$ . Через  $\bar{\Gamma}_k$  обозначим границу области  $\Omega_k$  без  $S$ ,  $k = 1, 2$ . Поэтому  $\partial\Omega_k = \bar{\Gamma}_k \cup S$ , где  $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots$  – открытое непустое подмножество из  $\partial\Omega_k, k = 1, 2$ ; и  $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$ . Через  $n_\alpha, \alpha = 1, 2$  обозначим внешнюю нормаль к границе  $\partial\Omega_\alpha$  области  $\Omega_\alpha, \alpha = 1, 2$ . Пусть  $n = n(x)$  – единичная нормаль к  $S$  в точке  $x \in S$ , направленная, например, так, что  $n$  – это внешняя нормаль к  $S$  по отношению к области  $\Omega_1$ , то есть нормаль  $n$  направлена внутрь области  $\Omega_2$ . Ниже при постановке краевых задач  $S$  – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обладают некоторой гладкостью. Введем следующие обозначения:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), x \in \Omega_1; \\ u_2(x), x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), \\ f_1(x), x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), \\ f_2(x), x \in \Omega_2, \\ \alpha = 1, 2; \end{cases}$$

$$q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), \xi_1 \in R; \\ q_2(\xi_2), \xi_2 \in R, \end{cases}$$

$$[\mathcal{G}] = \mathcal{G}_2(x) - \mathcal{G}_1(x)$$

– скачок функции  $\mathcal{G}(x)$  на  $S$ .

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и решением: найти функцию  $u(x)$ , определенную на  $\Omega$ , удовлетворяющую в каждой из областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уравнению

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) + d(x) q(u) = f(x), \quad (1a)$$

$$x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$$

и условию

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad (1b)$$

причем на линии разрыва  $S$  выполняются условия сопряжения

$$[k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}] = 0, \quad (1c)$$

$$G(x) = (k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S,$$

где  $k_\alpha(x), \alpha = 1, 2, d(x), f(x)$  – заданные функции, которые могут иметь разрыв первого рода на  $S$ ;  $q_\alpha(\xi_\alpha), \alpha = 1, 2$  – заданные функции, определенные для  $\xi_\alpha \in R, \alpha = 1, 2$ ;  $\theta(x_2)$  – заданная функция. Предположим, что данные функции удовлетворяют условиям:  $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2), \alpha = 1, 2, d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2), \theta(x_2) \in L_\infty(S); 0 < \nu \leq k_\alpha(x) \leq \bar{\nu}, \alpha = 1, 2, 0 \leq d_0 \leq d(x) \leq \bar{d}_0$ , для  $x \in \Omega_1 \times \Omega_2, 0 < \theta_0 \leq \theta(x_2) \leq \bar{\theta}_0$ , для  $x \in S$ , где  $\nu, \bar{\nu}, d_0, \bar{d}_0, \theta_0, \bar{\theta}_0$  – заданные константы; функции  $q_\alpha(\xi_\alpha)$  удовлетворяют условиям:  $q_\alpha(0) = 0$ ; для всех  $\xi_1, \xi_2 \in R, \xi_1 \neq \xi_2, 0 \leq q_0 \leq \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq L_q < \infty, \alpha = 1, 2, L_q$  – некоторая константа.

Под решением задачи (1a)–(1c) понимается функция  $u \in V_{\Gamma_1, \Gamma_2}^0(\Omega^{(1,2)})$ , удовлетворяющая тождеству:

$$Q(u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{G}(x)}{\partial x_\alpha} + d(x) q(u) \mathcal{G}(x) \right] d\Omega_0 +$$

$$+ \int_S \theta(x) [u] [\mathcal{G}] dS = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x) \mathcal{G}(x) d\Omega_0 = I(\mathcal{G}),$$

для  $\mathcal{G} \in \overset{0}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ . (2)

**Замечание 1.** Здесь через  $\overset{0}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  обозначено пространство пар функций  $u = (u_1, u_2) : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \{u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\}$  с нормой  $\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}}^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS$ , а через  $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$  обозначено замкнутое подпространство пространства  $W_2^1(\Omega_k)$ , в котором плотным множеством является множество всех функций из  $C^1(\overline{\Omega}_k)$ , равных нулю вблизи  $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k, k = 1, 2$  (см. [13, С. 1097]).

**2. Разностная аппроксимация краевых задач**

Для численного решения краевых задач вида (1a)–(1c) аппроксимируем их методом сеток [1, 2]. Для этого нам понадобятся сетки на  $[0, l_\alpha], \alpha = 1, 2$ , и в области  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ , скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках, и соответствующие сеточные пространства (см. подробное описание в работах [13–15]). В частности, введены в рассмотрение следующие пространства:  $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$  – подпространство сеточных функций из  $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$ , которое обращается в нуль на  $\gamma^{(k)}, k = 1, 2$ ; пространство  $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})\}$  с нормой  $\|v\|_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^2 \|v_k\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}^2 = \sum_{k=1}^2 (\|\nabla v_k\|^2 + \|v_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}^2)$ ; пространство  $\overset{\circ}{V}_{\gamma_1, \gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})$  пар функций  $y = (y_1, y_2)$ , определяемое как:  $\overset{\circ}{V}_{\gamma_1, \gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})\}$  с нормой  $\|v\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma_1, \gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})}^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla v_k\|^2 + \|v\|_{L_2(\gamma_S)}^2$ , где  $\|\nabla v_k\|^2 = |v_k|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}^2 = \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} v_{k\overline{x}_1}^2 h_1 \overline{h}_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2^+} v_{k\overline{x}_2}^2 \overline{h}_1 h_2, \|v\|_{L_2(\gamma_S)}^2 = \sum_{\omega_2} (v_2(\xi, x_2) - v_1(\xi, x_2))^2 h_2, \|v_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}^2 = \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)}} v_k^2 \overline{h}_1 \overline{h}_2, k = 1, 2$ . Отметим, что аппроксимации построены на прямоугольных сетках, равномерных в каждой из подобластей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответственно. Предполагается, что все границы области  $\overline{\Omega}$ , включая «внутреннюю границу»  $S$ , принадлежат одной из координатных линий сеток.

Краевой задаче (1a)–(1c) поставим в соответствие разностную краевую задачу [15], а именно – найти сеточную функцию  $y = (y_1, y_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma_1, \gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ , называемую решением разностной краевой задачи для задачи (1a)–(1c), удовлетворяющую для  $\forall v(x) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma_1, \gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})$  суммарному тождеству

$$\begin{aligned} Q_h(y, v) = & \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\ & + \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\ & + \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega^{(k)}} d_{kh}(x) q_k(y_k(x)) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega_2} d_{kh}(\xi, x_2) q_k(y_k(\xi, x_2)) v_k(\xi, x_2) h_1 h_2 + \quad (3) \\ & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] \cdot [v(\xi, x_2)] h_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega^{(k)}} f_{kh}(x) v_k(x) h_1 h_2 + \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega_2} f_{kh}(\xi, x_2) v_k(\xi, x_2) h_1 h_2 = l_h(v). \end{aligned}$$

Здесь  $a_{ch}^{(1)}(x), a_{ch}^{(2)}(x), d_{ch}(x), f_{ch}(x), \alpha = 1, 2, \theta_h(x_2)$  – сеточные аппроксимации функций  $k_\alpha^{(1)}(r), k_\alpha^{(2)}(r), d_\alpha(r), f_\alpha(r), \alpha = 1, 2, \theta(r)$ , определяемые через усреднения по Стеклову [13, 14].

Задача (3) является сеточным аналогом исходной задачи (1a)–(1c) с разрывными коэффициентами и решением.

**Замечание 2.** Корректность аппроксимаций (3) контактных задач (1a)–(1c) и их сходимости по решению доказана в [15].

**3. Сходимость итерационных процессов**

В этом разделе мы обсудим вопросы построения эффективного сходящегося итерационного процесса для решения сеточной задачи (3). Задаче (3) поставлен в соответствие следующий итерационный процесс на внутренней сеточной границе  $\gamma_S$  (в обобщенной постановке): найти последовательность пар функций  $\{y^n\}_{n=1}^\infty = \{y_1^n, y_2^n\}_{n=1}^\infty$ , таких что  $y_k^n \in W_2^1(\omega^{(k)}; \gamma^k), k = 1, 2$ , удовлетворяющих суммарному тождеству:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1}^n v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}^n v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}^n(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1^n(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1^n) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_1^n(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_2 = \sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_2^{n-1}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_2, \quad \forall v_1(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}); \\
 & \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1}^n v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}^n v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}^n(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2^n(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^n) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_2^n(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_2 = \sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_1^n(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_2, \quad \forall v_2(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)});
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $n = 1, 2, \dots$ ;  $y_2^0(x)$  – начальное приближение.

**Теорема 1.** Задача о нахождении решения разностной схемы (4)–(5) эквивалентна решению операторного уравнения

$$A_{ch} y_\alpha = F_{ch}, \quad \alpha = 1, 2 \tag{6}$$

где разностный оператор  $A_{ch}: W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}) \rightarrow W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и сеточная функция  $F_{ch} \in W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$  определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 (A_{ch} y_\alpha, v_\alpha)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} &= Q_{ch}(y_\alpha, v_\alpha), \quad (A_{ch}, v_\alpha)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} = l_{ch}(v_\alpha), \\
 \forall y_\alpha, v_\alpha &\in W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Разностная схема (4)–(5) однозначно разрешима, более того

$$\|y_\alpha\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq M_\alpha \|f_{ch}\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}, \quad \alpha = 1, 2.$$

**Доказательство** теоремы основано на теории монотонных операторов и методике работы [15, С. 80].

Таким образом, итерационный процесс (4)–(5) сводит решение разностной краевой задачи (3) с разрывными коэффициентами и решением к решению, на каждой итерации  $n$ , двух нелинейных разностных краевых задач (4) и (5) в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** Для любых функций  $v_1 \in W_2^1(\omega^{(1)})$  и  $v_2 \in W_2^1(\omega^{(2)})$  справедливы оценки

$$\|v_1\|_{L_2(\gamma_S)}^2 \leq \frac{2}{\xi} \|v_1\|_{L_2(\omega^{(1)})}^2 + 2\xi \|v_{1\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega^{(1)+})}^2, \tag{8a}$$

$$\|v_2\|_{L_2(\gamma_S)}^2 \leq \frac{2}{l_1 - \xi} \|v_2\|_{L_2(\omega^{(2)})}^2 + 2(l_1 - \xi) \|v_{2\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega^{(2)+})}^2. \tag{8б}$$

**Доказательство.** Докажем оценку (8a). Для этого зафиксируем произвольную точку  $0 \leq x_1 < \xi$  сетки  $\omega_1^{(1)}$ . Можно убедиться, что справедливо представление

$$v_1(\xi, x_2) = v_1(x_1, x_2) + \sum_{\substack{U_{z_1} \subset \omega_1^{(1)} \\ 0 \leq x_1 < z_1 \leq \xi}} v_{1\bar{x}_1}(z_1, x_2) h_1.$$

Тогда, используя разностный аналог неравенства Гельдера, имеем

$$\begin{aligned}
 \|v_1\|_{L_2(\gamma_S)}^2 &= \sum_{\omega_2} v_1^2(\xi, x_2) h_2 = \sum_{\omega_2} \frac{1}{\xi} \sum_{\omega_1^{(1)+}} (v_1(x_1, x_2) + \sum_{\substack{U_{z_1} \subset \omega_1^{(1)} \\ 0 \leq x_1 < z_1 \leq \xi}} v_{1\bar{x}_1}(z_1, x_2) h_1)^2 h_1 h_2 \leq \frac{2}{\xi} \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} v_1^2(x) h_1 h_2 + \\
 &+ \frac{2}{\xi} \sum_{\omega_2} h_2 \sum_{\omega_1^{(1)+}} (\sum_{\substack{U_{z_1} \\ 0 \leq x_1 < z_1 \leq \xi}} v_{1\bar{x}_1}(z_1, x_2) h_1)^2 h_1 \leq \frac{2}{\xi} \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} v_1^2(x) h_1 h_2 + \frac{2}{\xi} \sum_{\substack{U_{z_1} \\ 0 \leq x_1 < z_1 \leq \xi}} h_1 \sum_{\omega_1^{(1)+}} h_1 \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 = \\
 &= \frac{2}{\xi} \|v_1\|_{L_2(\omega^{(1)})}^2 + (\xi - x_1) \xi \frac{2}{\xi} \|v_{1\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega^{(1)+})}^2 \leq \frac{2}{\xi} \|v_1\|_{L_2(\omega^{(1)})}^2 + 2\xi \|v_{1\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega^{(1)+})}^2.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается оценка (8б). Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Для любых функций  $u_1 \in W_2^1(\omega^{(1)}; \gamma^{(1)})$  и  $u_2 \in W_2^1(\omega^{(2)}; \gamma^{(2)})$  справедливы оценки

$$\|u_1\|_{L_2(\omega^{(1)})}^2 \leq \max\{\xi^2; l_2^2\} \left\{ \|u_{1\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(1)+} \times \omega_2)}^2 + \|u_{1\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^{(1)} \times \omega_2^+)}^2 \right\},$$

$$\|u_2\|_{L_2(\omega^{(2)})}^2 \leq \max\{(l_1 - \xi)^2; l_2^2\} \left\{ \|u_{2\bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(2)+} \times \omega_2)}^2 + \|u_{2\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^{(2)} \times \omega_2^+)}^2 \right\}.$$

Утверждение леммы 2 доказывается аналогично лемме 1. Введем обозначения:

$$z^{(n)}(x) = \begin{cases} z_1^{(n)}(x) = y_1^{(n)}(x) - y_1(x), & x \in \omega^{(1)}; \\ z_2^{(n)}(x) = y_2^{(n)}(x) - y_2(x), & x \in \omega^{(2)}. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие  $q = q_1 \cdot q_2 < 1$ , где

$$q_1^2 = \frac{1}{\nu} \|\theta_h\|_{L_x(\gamma_s)} \left( \frac{l_1 - \xi}{2} + \frac{M_2^2}{2(l_1 - \xi)} \right), \quad q_2^2 = \frac{1}{\nu} \|\theta_h\|_{L_x(\gamma_s)} \left( \frac{\xi}{2} + \frac{M_1^2}{2\xi} \right),$$

$$M_1^2 = \max\{\xi^2; l_2^2\}, \quad M_2^2 = \max\{(l_1 - \xi)^2; l_2^2\}.$$

Тогда итерационный процесс (4)–(5) сходится по норме  $\|\cdot\|_{V_{\gamma_1, \gamma_2}(\bar{\omega}^{(1,2)})}$  (следовательно, и в норме  $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}$ , в силу их эквивалентности) к единственному решению задачи (3) при любом начальном приближении  $y_2^0(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})$  и справедливы оценки скорости сходимости:

$$\|z^{(n)}\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq \left\{ \left( \frac{2}{\xi} + 1 \right) M_1^2 + 2\xi + 1 \right\} (q_1 q^{n-1})^2 + \left\{ \left( \frac{2}{l_1 - \xi} + 1 \right) M_2^2 + 2(l_1 - \xi) + 1 \right\} (q^n)^2 \left\| z_2^{(0)} \right\|_{W_2^1(\omega^{(2)})}^2,$$

$$\|z^{(n)}\|_{V_{\gamma_1, \gamma_2}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq 2 \left\{ \left( \frac{2}{\xi} M_1^2 + 2\xi + \frac{1}{2} \right) (q_1 q^{n-1})^2 + \left( \frac{2}{l_1 - \xi} M_2^2 + 2(l_1 - \xi) + \frac{1}{2} \right) (q^n)^2 \right\} \left\| z_2^{(0)} \right\|_{W_2^1(\omega^{(2)})}^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Замечание 3.** В связи с ограниченным объемом статьи, мы не имеем возможности привести доказательство теоремы. Заметим, что доказательство основано на теории разностных схем, в частности, разностных аналогах формул интегрирования по частям, неравенствах Гельдера и Коши–Шварца [2], леммах 1 и 2, а также идеях работы [12].

Далее, для учета нелинейной составляющей сеточной задачи (3), а значит и исходной задачи (1a)–(1c), мы сводим нелинейные разностные схемы (4) и (5) в каждой из подобластей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  к линейным задачам, применяя стандартную методику, в частности, метод простой итерации с параметром [16]. А именно, нелинейные сеточные операторные уравнения (4) и (5) будем решать с помощью операторных уравнений (неявный метод простой итерации):

$$\begin{cases} B_h^{(\alpha)} y_\alpha^{(m+1)} = B_h^{(\alpha)} y_\alpha^{(m)} + \tau(F_{ah} - A_{ah} y_\alpha^{(m)}), \\ y_\alpha^{(0)} \in W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad \tau > 0, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad (9)$$

где  $B_h^{(\alpha)} : W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}) \rightarrow W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$  – линейный сеточный оператор, определяемый билинейной симметричной положительно-определенной формой на  $W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ :

$$B_h^{(\alpha)}(y, \nu) = \langle B_h^{(\alpha)} y, \nu \rangle_{(W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}))^*} = \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} y_{\alpha \bar{x}_1} \nu_{\alpha \bar{x}_1} h_1 \bar{h}_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+} y_{\alpha \bar{x}_2} \nu_{\alpha \bar{x}_2} \bar{h}_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \bar{\omega}_2} y_{\alpha} \nu_{\alpha} \bar{h}_1 \bar{h}_2,$$

$$\forall y_\alpha, \nu_\alpha \in W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\bar{h}_1 = \bar{h}_1(x_1) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}, \\ 0.5h_1(x_1), & x_1 = 0, \xi, l_1, \end{cases} \quad \bar{h}_2 = \bar{h}_2(x_2) = \begin{cases} h_2, & x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, & x_2 = 0, l_2, \end{cases}$$

$$\langle B_h^{(\alpha)} y_\alpha, y_\alpha \rangle_{(W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}))^*} = \|y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2, \quad (10)$$

который при фиксированном  $y_\alpha \in W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$  определяет линейный ограниченный функционал над  $W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ ; здесь разностный оператор  $A_{ah}$  и сеточная функция  $F_{ah}$ ,  $\alpha = 1, 2$  определены формулами (7).

Условия сходимости итерационных процессов (9) сформулируем в виде теоремы:

**Теорема 3.** Итерационный процесс (9) сходится к единственному решению  $u_\alpha$  уравнения  $A_{ah} u_\alpha = F_{ah}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , при любом начальном приближении  $y_\alpha^{(0)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и

$$\forall \tau: \quad 0 < \tau < 2\delta M_0^{-2},$$

где  $\delta = \min\{\nu, \theta_0\}$ ,  $M_0 = \max\{\bar{\nu}, \bar{d}_0, L_q, \bar{\theta}_0\}$  – константы в неравенствах сильной монотонности и Липшиц-непрерывности оператора  $A_{ah}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , соответственно, а  $\nu, \theta_0, \bar{\nu}, \bar{d}_0, L_q, \bar{\theta}_0$  – ограничения на входные данные исходной задачи, причем

$$\|y_\alpha^{(m+1)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq q^{m+1} \|y_\alpha^{(0)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}, \quad q < 1, \quad \alpha = 1, 2.$$

Параметр  $\tau = \tau_0 = \delta M_0^{-2}$  обеспечивает более высокую скорость сходимости процесса (9). Для получения решения

$$c \text{ заданной относительной точностью } \frac{\|y_\alpha^{(m)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}}{\|y_\alpha^{(0)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}} \leq \varepsilon, \quad \alpha = 1, 2, \text{ требуется не более } \frac{\ln(1/\varepsilon)}{|\ln q|} \text{ итераций.}$$

**Доказательство.** Для доказательства сходимости итерационного процесса (9) к единственному решению уравнения (6) для  $\alpha = 1, 2$ , воспользуемся принципом сжатых отображений С. Банаха [16, С. 228]. Запишем процесс (9) в виде

$$y_\alpha^{(m+1)} = y_\alpha^{(m)} + \tau \cdot \left( (B_h^{(\alpha)})^{-1} F_{ch} - (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} y_\alpha^{(m)} \right), \text{ или} \\ y_\alpha^{(m+1)} = C_{ch} y_\alpha^{(m)} + \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} F_{ch}, \quad (11)$$

где оператор  $C_{ch} = E - \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} : W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}) \rightarrow W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Покажем, что  $C_{ch}$  является оператором сжатия в норме  $\|\cdot\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}$ . Отсюда будет следовать однозначная разрешимость уравнения  $A_{ch} y_\alpha = F_{ch}$ ,  $\alpha = 1, 2$  и сходимость процесса (9).

Обозначив через  $z_\alpha = y_\alpha - \vartheta_\alpha$ , получим:

$$\begin{aligned} \|C_{ch} y_\alpha - C_{ch} \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 &= \langle B_h^{(\alpha)} (C_{ch} y_\alpha - C_{ch} \vartheta_\alpha), C_{ch} y_\alpha - C_{ch} \vartheta_\alpha \rangle = \\ &= \langle B_h^{(\alpha)} (y_\alpha - \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} y_\alpha - \vartheta_\alpha + \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} \vartheta_\alpha), \\ & y_\alpha - \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} y_\alpha - \vartheta_\alpha + \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} A_{ch} \vartheta_\alpha \rangle = \langle B_h^{(\alpha)} (y_\alpha - \vartheta_\alpha) - \tau (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha), (y_\alpha - \vartheta_\alpha) - \\ & - \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle = \langle B_h^{(\alpha)} z_\alpha, z \rangle - \tau \langle B_h^{(\alpha)} z_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle - \\ & - \tau \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, z_\alpha \rangle + \tau^2 \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle = \\ & = \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 - 2\tau \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, z_\alpha \rangle + \tau^2 \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

В силу сильной монотонности и Липшиц-непрерывности оператора  $A_{ch}$ ,  $\alpha = 1, 2$  [15, С. 80], выполняются неравенства:

$$\langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, y_\alpha - \vartheta_\alpha \rangle \geq \delta \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2; \quad (12a)$$

$$\|A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq M_0 \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}, \quad \forall y_\alpha, \vartheta_\alpha \in W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2. \quad (12b)$$

Далее, полагая в (12б)  $\vartheta_\alpha = (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha)$ , и используя (10), получим:

$$\begin{aligned} \left| \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle \right| &\leq M_0 \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \left\| (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \right\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} = \\ &= M_0 \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \langle B_h^{(\alpha)} \left( (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \right), (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle^{1/2} = \\ &= M_0 \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\left| \langle A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha, (B_h^{(\alpha)})^{-1} (A_{ch} y_\alpha - A_{ch} \vartheta_\alpha) \rangle \right| \leq M_0^2 \cdot \|y_\alpha - \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|C_{ch} y_\alpha - C_{ch} \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 &\leq \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 - 2\tau \delta \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 + \tau^2 M_0^2 \cdot \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2 = \\ &= (1 - 2\tau \delta + \tau^2 M_0^2) \cdot \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}^2, \\ \|C_{ch} y_\alpha - C_{ch} \vartheta_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} &\leq q \cdot \|z_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (13) \end{aligned}$$

где  $q^2 = 1 - 2\tau \delta + \tau^2 M_0^2$ .

Из (13) следует, что для того, чтобы оператор  $C_{ch}$  являлся оператором сжатия, достаточно, чтобы  $q$  было меньше 1, т.е. выполнялось неравенство:

$$1 - 2\tau \delta + \tau^2 M_0^2 < 1, \text{ откуда } \tau < 2\delta M_0^2.$$

Ясно, что минимум  $q^2$  достигается при  $\tau = \tau_0 = \delta M_0^2$ .

Итак, при  $0 < \tau < 2\delta M_0^2$  оператор  $C_{ch}$  является оператором сжатия. Из принципа сжатых отображений следует, что существует единственная неподвижная точка  $y_\alpha \in W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$  оператора  $C_{ch}$ , т.е.  $y_\alpha = C_{ch} y_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Далее, обозначив  $z_\alpha^{(m+1)} = y_\alpha^{(m+1)} - y_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , имеем из (11), что

$$z_\alpha^{(m+1)} = C_{ch} y_\alpha^{(m)} + \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} F_{ch} - C_{ch} y_\alpha - \tau (B_h^{(\alpha)})^{-1} F_h = C_{ch} y_\alpha^{(m)} - C_{ch} y_\alpha;$$

$$\|z_\alpha^{(m+1)}\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq q \|z_\alpha^{(m)}\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})};$$

$$\|y_\alpha^{(m+1)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq q \|y_\alpha^{(m)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq \dots \leq q^{m+1} \|y_\alpha^{(0)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}, \quad q < 1, \alpha = 1, 2.$$

Из последнего неравенства следует, что  $y_\alpha^{(m)}$  сходится к неподвижной точке  $y_\alpha$  оператора  $C_{ch}$  по норме пространства  $W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})$  при любом начальном приближении  $y_\alpha^{(0)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Тогда из (11) следует, что  $B_{ch} y_\alpha = B_{ch} y_\alpha - \tau (A_{ch} y_\alpha - F_{ch})$ ,  $A_{ch} y_\alpha = F_{ch}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , т.е.  $y_\alpha$  является решением уравнения  $A_{ch} y_\alpha = F_{ch}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Для нахождения числа итераций при заданной точности  $\varepsilon$

$$\frac{\|y_\alpha^{(m)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}}{\|y_\alpha^{(0)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}} \leq \varepsilon, \quad \alpha = 1, 2,$$

воспользуемся неравенством

$$\|y_\alpha^{(m)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})} \leq q^m \|y_\alpha^{(0)} - y_\alpha\|_{W_2^1(\omega^{(\alpha)}; \gamma^{(\alpha)})}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$q^m < \varepsilon, \quad \ln q^m \leq \ln \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малое число; тогда

$$\begin{aligned} |\ln q^m| &\geq |\ln \varepsilon|, \\ m |\ln q| &\geq -\ln \varepsilon, \\ m &\geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{|\ln q|}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Запишем в явном виде итерационный процесс (9) для решения нелинейных сеточных задач (6). Для этого в сумматорном тождестве, определяющем итерационный процесс (9) при  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{\omega_1^{(1)+} x \omega_2} y_{1\bar{x}_1}^{(m+1)n} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)} x \omega_2^+} y_{1\bar{x}_2}^{(m+1)n} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} y_{1\bar{x}_2}^{(m+1)n} (\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2} (\xi, x_2) h_1 h_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} y_1^{(m+1)n} (\xi, x_2) v_1 (\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} y_1^{(m+1)n} v_1 h_1 h_2 = \sum_{\omega_1^{(1)+} x \omega_2} y_{1\bar{x}_1}^{(m),n} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)} x \omega_2^+} y_{1\bar{x}_2}^{(m),n} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} y_{1\bar{x}_2}^{(m),n} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} y_1^{(m),n} (\xi, x_2) v_1 (\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} y_1^{(m),n} v_1 h_1 h_2 + \\ &+ \tau \cdot \left( \sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_2^{(m),n-1}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_2 - \right. \\ &- \sum_{\omega_1^{(1)+} x \omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1}^{(m),n} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 - \sum_{\omega_1^{(1)} x \omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}^{(m),n} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}^{(m),n}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 - \frac{1}{2} \sum_{\omega_{(2)}} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_2^{(m),n}) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 - \\ &\left. - \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1^{(m),n}) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 - \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_1^{(m),n}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_2 \right), \end{aligned}$$

при фиксированном  $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, \tau > 0$ , где  $v_1(x) \in W_2^1(\omega^{(1)}; \gamma^{(1)})$  – произвольная сеточная функция, положим  $v_1(x) = 1$  в некотором узле сетки  $\bar{\omega}^{(1)}$  и нулю в остальных узлах. Аналогично в сумматорном тождестве, определяющем итерационный процесс (9) при  $\alpha = 2$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{\omega_1^{(2)+} x \omega_2} y_{2\bar{x}_1}^{(m+1),n} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)} x \omega_2^+} y_{2\bar{x}_2}^{(m+1),n} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} y_{2\bar{x}_2}^{(m+1),n} (\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2} (\xi, x_2) h_1 h_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} y_2^{(m+1),n} (\xi, x_2) v_2 (\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(2)}} y_2^{(m+1),n} v_2 h_1 h_2 = \sum_{\omega_1^{(2)+} x \omega_2} y_{2\bar{x}_1}^{(m),n} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)} x \omega_2^+} y_{2\bar{x}_2}^{(m),n} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} y_{2\bar{x}_2}^{(m),n} (\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2} (\xi, x_2) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} y_2^{(m),n} (\xi, x_2) v_2 (\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(2)}} y_2^{(m),n} v_2 h_1 h_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau \cdot \left( \sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_1^{(m),n}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_2 - \right. \\
& - \sum_{\omega_1^{(2)+x\omega_2}} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1}^{(m),n} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 - \sum_{\omega_1^{(2)+x\omega_2^+}} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}^{(m),n} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}^{(m),n}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 - \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^{(m),n}) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 - \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^{(m),n}) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 - \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_2^{(m),n}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_2 \right),
\end{aligned}$$

при фиксированном  $n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, \tau > 0$ , где  $v_2(x) \in W_2^1(\omega^{(2)}; \gamma^{(2)})$  – произвольная сеточная функция, положим  $v_2(x) = 1$  в некотором узле сетки  $\bar{\omega}^{(2)}$  и нулю в остальных узлах. Перебирая, таким образом, все узлы сеток  $\bar{\omega}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}^{(2)}$ , получим явный вид итерационного процесса (9) для нелинейных сеточных задач (6). Выпишем явный вид операторов  $B_h^{(1)}$  и  $B_h^{(2)}$ :

$$B_h^{(1)} y_1 = \begin{cases} -\sum_{k=1}^2 y_{1\bar{x}_k x_k} + y_1, & x \in \omega^{(1)}; \\ 0, & x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S; \\ -y_{1\bar{x}_2 x_2} + \frac{2}{h_1} y_{1\bar{x}_1} + y_1, & x \in \gamma_S. \end{cases} \quad B_h^{(2)} y_2 = \begin{cases} -\sum_{k=1}^2 y_{2\bar{x}_k x_k} + y_2, & x \in \omega^{(2)}; \\ 0, & x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S; \\ -y_{2\bar{x}_2 x_2} - \frac{2}{h_1} y_{2x_1} + y_2, & x \in \gamma_S. \end{cases}$$

Таким образом, нелинейные разностные задачи (4) и (5) в подобластях составной области, на каждом шаге итерации, сводятся к линейным разностным задачам. Явный вид полученных задач (разностных схем) имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \underline{x \in \omega^{(1)}}: \\
& -y_{1\bar{x}_1 x_1}^{(m+1),n} - y_{1\bar{x}_1 x_1}^{(m+1),n} + y_1^{(m+1),n} = -y_{1\bar{x}_1 x_1}^{(m),n} - y_{1\bar{x}_1 x_1}^{(m),n} + y_1^{(m),n} + \tau \cdot \left\{ (a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1}^{(m),n}(x))_{x_1} + \right. \\
& \left. + (a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_2}^{(m),n}(x))_{x_2} - d_{1h}(x) q_1(y_1^{(m),n}(x)) + f_{1h}(x) \right\}; \\
& \underline{x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S}: \quad y_1^{(m+1),n}(x) = 0; \quad (14) \\
& \underline{x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 = \omega_2\}}: \\
& \frac{2}{h_1} y_{1\bar{x}_1}^{(m+1),n}(\xi, x_2) - y_{1\bar{x}_2 x_2}^{(m+1),n}(\xi, x_2) + y_1^{(m+1),n}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1} y_{1\bar{x}_1}^{(m),n}(\xi, x_2) - y_{1\bar{x}_2 x_2}^{(m),n}(\xi, x_2) + \\
& + y_1^{(m),n}(\xi, x_2) + \tau \cdot \left\{ f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_2^{(m),n-1}(\xi, x_2) - \frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_1}^{(m),n}(\xi, x_2) + \right. \\
& \left. + \theta_h(x_2) y_1^{(m),n}(\xi, x_2)] - d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1^{(m),n}(\xi, x_2)) + (a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}^{(m),n}(\xi, x_2))_{x_2} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{x \in \omega^{(2)}}: \\
& -y_{2\bar{x}_1 x_1}^{(m+1),n} - y_{2\bar{x}_2 x_2}^{(m+1),n} + y_2^{(m+1),n} = -y_{2\bar{x}_1 x_1}^{(m),n} - y_{2\bar{x}_2 x_2}^{(m),n} + y_2^{(m),n} + \tau \cdot \left\{ (a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_1}^{(m),n}(x))_{x_1} + \right. \\
& \left. + (a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_2}^{(m),n}(x))_{x_2} - d_{2h}(x) q_2(y_2^{(m),n}(x)) + f_{2h}(x) \right\}; \\
& \underline{x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S}: \quad y_2^{(m+1),n}(x) = 0; \quad (15) \\
& \underline{x \in \gamma_S}: \\
& \frac{2}{h_1} y_{2x_1}^{(m+1),n}(\xi, x_2) - y_{2\bar{x}_2 x_2}^{(m+1),n}(\xi, x_2) + y_2^{(m+1),n}(\xi, x_2) = -\frac{2}{h_1} y_{2x_1}^{(m),n}(\xi, x_2) - y_{2\bar{x}_2 x_2}^{(m),n}(\xi, x_2) + \\
& + y_2^{(m),n}(\xi, x_2) + \tau \cdot \left\{ f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_1^{(m),n}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(2)}(\xi + h_1, x_2) y_{2x_2}^{(m),n}(\xi, x_2) - \right. \\
& \left. - \theta_h(x_2) y_2^{(m),n}(\xi, x_2)] - d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^{(m),n}(\xi, x_2)) + (a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}^{(m),n}(\xi, x_2))_{x_2} \right\}.
\end{aligned}$$

Для решения сеточных задач (14) и (15) в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  используется итерационный метод верхней релаксации [16, с. 375].



### 4. Численные результаты

Здесь мы приводим результаты численных экспериментов, соответствующие применению исследований предыдущей секции. Вычислительные эксперименты проведены с использованием интегрированной среды разработки Embarcadero Delphi пакета Embarcadero RAD Studio. Мы приближенно решили несколько модельных задач с известными аналитическими решениями для того, чтобы добиться точности приближенного решения. Относительная погрешность приближенного решения вычислялась по формуле  $\max|u(x) - y(x)| \cdot (\max|u(x)|)^{-1}$ ,  $x \in \bar{\omega} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2) \cup (\bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2)$ . В связи с ограниченным объемом статьи мы приводим здесь только два тестовых примера. В обоих примерах расчетная область  $\Omega$  является квадратом с различными расположениями линии разрыва.

**Пример 1.** Задача о сопряжении неидеального контакта в единичном квадрате:  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2$ ,  $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1 = [0, \xi] \times [0, 1] = [0, 1/4] \times [0, 1]$ ,  $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2 = [\xi, 1] \times [0, 1] = [1/4, 1] \times [0, 1]$ . Линия разрыва проходит через точку  $\xi = 1/4$ . Входные данные:

$$k_1(x) = \begin{cases} k_1^{(1)}(x) = 2 - x_2; \\ k_1^{(2)}(x) = 1/4; \end{cases} \quad k_2(x) = \begin{cases} k_2^{(1)}(x) = 1 + x_1; \\ k_2^{(2)}(x) = 1 + x_2; \end{cases} \quad \theta(x_2) = \frac{20(2 - x_2)}{3(19 - 10x_2)};$$

$$f_1(x) = -\frac{2}{5}x_2(2 - x_2)(1 - x_2)(2 - 3x_1) + \frac{6}{5}x_1x_2(1 - x_2)(2 - x_2) - \frac{7}{5}x_1^2(1 + x_1)(2 - x_1) + (0.2x_1 + x_2)(0.2x_1^2x_2(2 - 2x_1)(1 - x_2))^3;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x_2(1 - x_2)(2 - x_2) - x_1(1 - x_1)(2 - 6x_2 + 3x_2^2) - x_1(1 + x_2)(1 - x_1)(-6 + 6x_2) +$$

$$(0.2x_1 + x_2)(x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2)(2 - x_2))^3; \quad d_1(x) = d_2(x) = 0.2x_1 + x_2; \quad q_i(u_i) = u_i^3, \quad i = 1, 2.$$

подобраны таким образом, что функция

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = 0.2x_1^2x_2(2 - 2x_1)(1 - x_2), \quad x \in \Omega_1, \\ u_2(x) = x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2)(2 - x_2), \quad x \in \Omega_2 \end{cases}$$

является точным решением задачи.

Расчеты проводились для разных вариантов задания сеток в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , и значениях параметра  $\tau$ . В частности, в табл. 1 и 2 представлены численные результаты при  $\tau = 0.5$  на сетках, содержащих  $24 \times 68$  и  $42 \times 68$  узлов в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Здесь  $\Delta_x = |u_{\text{точн.}}(x) - y(x)|$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$ .

Таблица 1

Приближенное решение  $y_1$  на сетке  $\bar{\omega}^{(1)} \subset \Omega_1$ ,  $24 \times 68$  узлов,  $\tau = 0.5$

| $x_2/x_1$ | 0 | 0.063   | $\Delta_x$ | 0.125   | $\Delta_x$ | 0.188   | $\Delta_x$ | 0.25    | $\Delta_x$ |
|-----------|---|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| 0         | 0 | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          |
| 0.12      | 0 | 0.00014 | 0.00001    | 0.00055 | 0.00002    | 0.00000 | 0.00005    | 0.00000 | 0.00006    |
| 0.24      | 0 | 0.00024 | 0.00003    | 0.00095 | 0.00005    | 0.00117 | 0.00009    | 0.00192 | 0.00012    |
| 0.35      | 0 | 0.00030 | 0.00004    | 0.00118 | 0.00006    | 0.00200 | 0.00010    | 0.00330 | 0.00011    |
| 0.47      | 0 | 0.00032 | 0.00005    | 0.00127 | 0.00009    | 0.00252 | 0.00014    | 0.00416 | 0.00016    |
| 0.59      | 0 | 0.00030 | 0.00006    | 0.00122 | 0.00010    | 0.00272 | 0.00015    | 0.00451 | 0.00018    |
| 0.71      | 0 | 0.00026 | 0.00005    | 0.00104 | 0.00008    | 0.00262 | 0.00012    | 0.00436 | 0.00014    |
| 0.82      | 0 | 0.00018 | 0.00004    | 0.00073 | 0.00007    | 0.00224 | 0.00013    | 0.00372 | 0.00017    |
| 0.94      | 0 | 0.00007 | 0.00001    | 0.00028 | 0.00003    | 0.00157 | 0.00004    | 0.00260 | 0.00006    |
| 1         | 0 | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          |

Таблица 2

Приближенное решение  $y_2$  на сетке  $\bar{\omega}^{(2)} \subset \Omega_2$ ,  $42 \times 68$  узлов,  $\tau = 0.5$

| $x_2/x_1$ | 0.25    | $\Delta_x$ | 0.464   | $\Delta_x$ | 0.679   | $\Delta_x$ | 0.893   | $\Delta_x$ | 1 |
|-----------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---|
| 0         | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0 |
| 0.12      | 0.03651 | 0.00013    | 0.04855 | 0.00005    | 0.04262 | 0.00000    | 0.01867 | 0.00002    | 0 |
| 0.24      | 0.05931 | 0.00023    | 0.07890 | 0.00008    | 0.06926 | 0.00001    | 0.03034 | 0.00004    | 0 |
| 0.35      | 0.07023 | 0.00030    | 0.09347 | 0.00008    | 0.08205 | 0.00001    | 0.03594 | 0.00005    | 0 |
| 0.47      | 0.07112 | 0.00033    | 0.09470 | 0.00007    | 0.08312 | 0.00002    | 0.03641 | 0.00005    | 0 |
| 0.59      | 0.06380 | 0.00031    | 0.08499 | 0.00006    | 0.07460 | 0.00002    | 0.03267 | 0.00004    | 0 |
| 0.71      | 0.05012 | 0.00026    | 0.06679 | 0.00004    | 0.05862 | 0.00001    | 0.02567 | 0.00003    | 0 |
| 0.82      | 0.03189 | 0.00017    | 0.04250 | 0.00002    | 0.03730 | 0.00001    | 0.01634 | 0.00002    | 0 |
| 0.94      | 0.01093 | 0.00006    | 0.01457 | 0.00001    | 0.01279 | 0.00000    | 0.00560 | 0.00001    | 0 |
| 1         | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0 |

Относительная погрешность приближенного решения в подобласти  $\Omega_1$  равна 0.04372, а в  $\Omega_2 - 0.0034$ . Сходимость метода численного решения контактной задачи ухудшается, когда значения функции приближаются к линии разрыва (рис. 1).

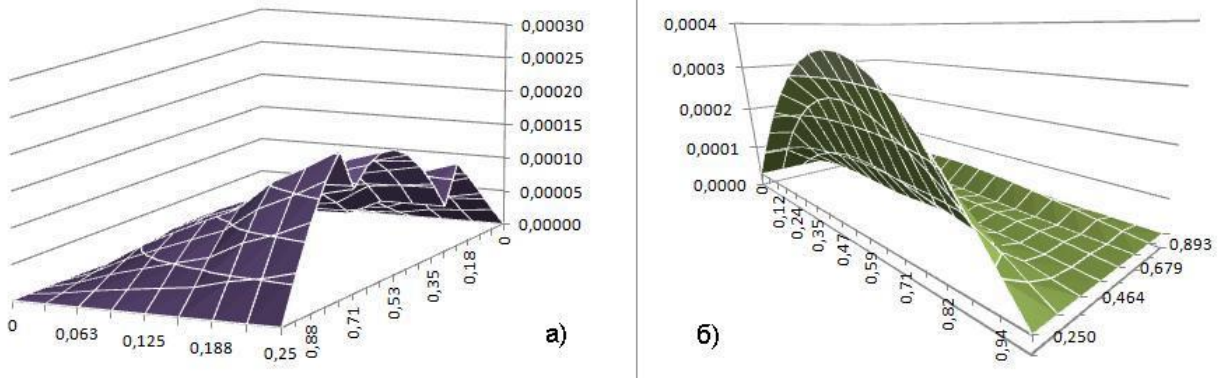


Рис. 1. График абсолютной погрешности  $\Delta_x$  приближенного решения  $y$  в подобластях  $\Omega_1$  (а) и  $\Omega_2$  (б).

**Пример 2.** Задача о сопряжении неидеального контакта с линией разрыва в точке  $\xi = 1/3$ , с известным точным решением:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) = x_2(2 - 2x_2) \sin 2\pi x_1, & x \in \Omega_1, \\ u_2(x) = 0.25x_2(2 - 2x_2) \sin^2(2\pi x_1), & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Входные данные:  $k_1^{(1)}(x) = \sqrt{3}/4$ ,  $k_1^{(2)}(x) = k_2^{(1)}(x) = k_2^{(2)}(x) = 1$ ,  $q_1(u_1) = u_1^3$ ,  $q_2(u_2) = u_2^3$ ,  
 $f_1(x) = \sqrt{3}\pi^2 x_2(2 - 2x_2) \sin 2\pi x_1 + 4 \sin 2\pi x_1$ ,  $f_2(x) = -2\pi^2 x_2(2 - 2x_2) \cos 4\pi x_1 + \sin^2 2\pi x_1$ ,  $d_1(x) = d_2(x) = 0.4x_1 + x_2$ ,  
 $\theta(x_2) = 4\sqrt{3}\pi / (8\sqrt{3} - 3)$ .

В табл. 3 и 4 приведены результаты расчетов при  $\tau = 0.7$  на сетках, содержащих  $24 \times 51$  и  $35 \times 51$  узлов в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. На рис. 2 отображен график погрешности  $\Delta_x$  приближенного решения  $y$ .

Таблица 3

Приближенное решение  $y_1$  на сетке  $\bar{\omega}^{(1)} \subset \Omega_1$ ,  $24 \times 51$  узлов,  $\tau = 0.7$

| $x_2/x_1$ | 0 | 0.083   | $\Delta_x$ | 0.167   | $\Delta_x$ | 0.25    | $\Delta_x$ | 0.333   | $\Delta_x$ |
|-----------|---|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|
| 0         | 0 | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          |
| 0.12      | 0 | 0.10386 | 0.00136    | 0.17989 | 0.00323    | 0.20774 | 0.00346    | 0.17995 | 0.00318    |
| 0.24      | 0 | 0.18003 | 0.00171    | 0.31183 | 0.00448    | 0.36010 | 0.00470    | 0.31192 | 0.00438    |
| 0.35      | 0 | 0.22850 | 0.00183    | 0.39579 | 0.00127    | 0.45706 | 0.00206    | 0.39592 | 0.00140    |
| 0.47      | 0 | 0.24928 | 0.00108    | 0.43177 | 0.00020    | 0.49861 | 0.00041    | 0.43191 | 0.00006    |
| 0.59      | 0 | 0.24235 | 0.00133    | 0.41978 | 0.00029    | 0.48476 | 0.00096    | 0.41991 | 0.00043    |
| 0.71      | 0 | 0.20773 | 0.00257    | 0.35980 | 0.00275    | 0.41550 | 0.00370    | 0.35992 | 0.00286    |
| 0.82      | 0 | 0.14540 | 0.00166    | 0.25186 | 0.00410    | 0.29084 | 0.00436    | 0.25193 | 0.00403    |
| 0.94      | 0 | 0.05539 | 0.00081    | 0.09594 | 0.00186    | 0.11079 | 0.00201    | 0.09597 | 0.00184    |
| 1         | 0 | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          |

Таблица 4

Приближенное решение  $y_2$  на сетке  $\bar{\omega}^{(2)} \subset \Omega_2$ ,  $35 \times 51$  узлов,  $\tau = 0.7$

| $x_2/x_1$ | 0.333   | $\Delta_x$ | 0.524   | $\Delta_x$ | 0.714   | $\Delta_x$ | 0.905   | $\Delta_x$ | 1 |
|-----------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---------|------------|---|
| 0         | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0 |
| 0.12      | 0.03930 | 0.00040    | 0.00122 | 0.00003    | 0.04955 | 0.00059    | 0.01653 | 0.00015    | 0 |
| 0.24      | 0.06814 | 0.00043    | 0.00213 | 0.00007    | 0.08591 | 0.00071    | 0.02866 | 0.00015    | 0 |
| 0.35      | 0.08650 | 0.00098    | 0.00272 | 0.00015    | 0.10905 | 0.00102    | 0.03639 | 0.00045    | 0 |
| 0.47      | 0.09437 | 0.00073    | 0.00297 | 0.00016    | 0.11897 | 0.00069    | 0.03970 | 0.00035    | 0 |
| 0.59      | 0.09175 | 0.00081    | 0.00289 | 0.00016    | 0.11566 | 0.00080    | 0.03859 | 0.00038    | 0 |
| 0.71      | 0.07863 | 0.00123    | 0.00247 | 0.00014    | 0.09913 | 0.00136    | 0.03308 | 0.00055    | 0 |
| 0.82      | 0.05502 | 0.00046    | 0.00172 | 0.00005    | 0.06938 | 0.00071    | 0.02315 | 0.00017    | 0 |
| 0.94      | 0.02095 | 0.00025    | 0.00065 | 0.00001    | 0.02642 | 0.00036    | 0.00882 | 0.00009    | 0 |
| 1         | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0       | 0          | 0 |

Относительная погрешность приближенного решения в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равна 0.0094 и 0.0115 соответственно.

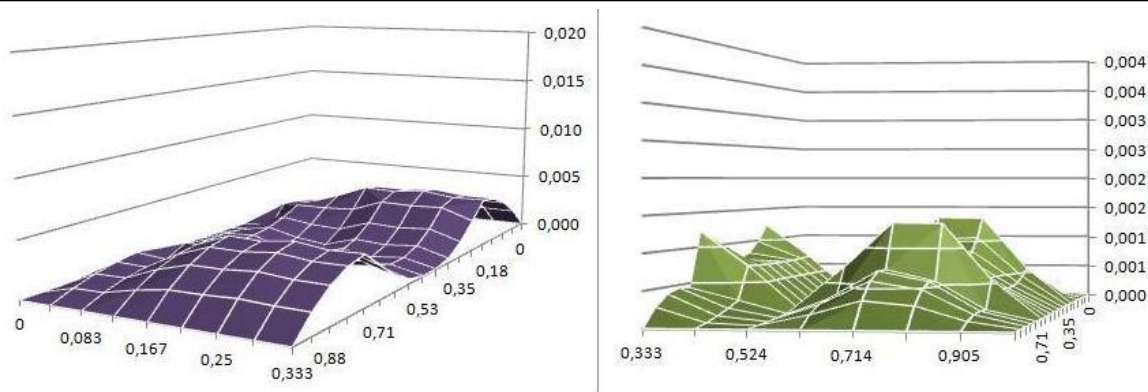


Рис. 2. График абсолютной погрешности  $\Delta x$  приближенного решения  $u$  в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

### Заключение

Проведено численное исследование задачи Дирихле для нелинейных уравнений эллиптического типа с условиями сопряжения типа неидеального контакта. Численные эксперименты подтвердили эффективность предложенного в работе метода численного решения. В рассмотренных выше примерах сходимость метода ухудшается, когда значения функции приближаются к линии разрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4147.2015.1).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
3. Wesseling P. An introduction to Multigrid Methods. Wiley, N. Y., 1991.
4. Ильин В. П. Балансные аппроксимации повышенной точности для уравнения Пуассона // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. №1. С. 151–169.
5. LeVeque R. J., Li Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources // In SIAM J. Num. Anal., 31. 1994. Pp. 1019–1044.
6. Iliev O. P. On second-order-accurate discretization of 3D interface problems and its fast solution with a pointwise multigrid solver // IMA Journal of Numerical Analysis. 2002. Vol. 22. No. 3. Pp. 391–406.
7. Ewing R., Iliev O., Lazarov R. A modified finite volume approximation of second-order elliptic equations with discontinuous coefficients // SIAM Journal on Scientific Computing. 2001. Vol. 23. No. 4. Pp. 1334–1350.
8. Chernogorova T., Iliev O. A 2nd Order Discretization of Imperfect Contact Problems with Piece-Wise Constant Coefficients on Cell-Centred Grids. // Large-Scale Scientific Computations of Engineering and Environmental Problems II, Proc. of the Second Workshop on “Large-Scale Scientific Computations”, Sozopol, Bulgaria, June 2–6, 1999, Notes on Numerical Fluid Mechanics, v. 73, Vieweg, 2000. Pp. 171–179.
9. Chernogorova T., Ewing R., Iliev O., Lazarov R. On the Discretization of Interface Problems with Perfect and Imperfect contact. // Proc. of the Int. Workshop on Computational Physics: Fluid Flow and Transport in Porous Media (Z. Chen, R. Ewing and Z. Shi, Eds.), Lecture Notes in Physics, v. 552, Springer-Verlag, Heidelberg. 2000. Pp. 93–103.
10. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. Об одном итерационном процессе для граничных задач о сопряжении с разрывным решением // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. №3. С. 30–31.
11. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., Галеева Г. Я. Итерационные процессы для состояний с разрывными коэффициентами и решениями в задачах оптимального управления квазилинейными уравнениями // Журнал СВМО, 2011. Т. 13. №2. С. 36–46.
12. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. О некоторых итерационных процессах решения эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями с конструктивными оценками скорости сходимости итераций // Журнал СВМО. 2014. Т. 16, №1. С. 89–105.
13. Lubyshev F. V. Finite difference approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions // Comp. Math. and Math. Physics. 2012. Vol. 52. No. 8. Pp. 1094–1114. DOI: 10.1134/S0965542512080088
14. Lubyshev F. V., Manapova A. R., Fairuzov M. E. Approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions and with control in matching boundary conditions // Comp. Math. and Math. Physics. 2014. Vol. 54. No. 11. Pp. 1700–1724. DOI: 10.7868/S0044466914110088
15. Manapova A. R., Lubyshev F. V. Accuracy estimate with respect to state of finite-dimensional approximations for optimization problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions // Ufa Mathematical Journal. 2014. Vol. 6. No. 3. Pp. 69–84. DOI: 10.13108/2014-6-3-69
16. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Поступила в редакцию 18.08.2015 г.

**ON FINITE DIFFERENCE METHOD OF SOLVING IMPERFECT CONTACT DIRICHLET'S PROBLEM FOR NON-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS**

© A. R. Manapova

*Bashkir State University  
32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.**Phone: +7 (347) 229 96 32.**Email: aygulrm@mail.ru*

The present work is devoted to computational aspects of solving non-linear boundary value problems for elliptic equations in inhomogeneous anisotropic media with discontinuous coefficients and a solution, where imperfect-contact matching condition is given at the inner boundary between media. I.e., the problems having a jump of the coefficients and the solution on the inner surface of body contact; the jump of the solution is proportional to the normal component of the flux. We develop approximate method for solving non-linear elliptic equations with imperfect-contact matching condition. Iterative processes with iterations on the inner boundary of the domain, where the coefficients and the solution are discontinuous, reduce the initial problem to solving non-linear boundary value problems in each contacting sub-domain of an integral domain at each iteration. By applying iteration method with a parameter, we reduce the non-linear problems in each of the sub-areas to linear ones. We implement iterative processes based on the upper relaxation method. Results from computations for model examples with known analytical solutions are presented in order to demonstrate the effectiveness of the proposed method. Computer experiments are included, using IDE Embarcadero Delphi.

**Keywords:** *contact problems, non-linear elliptic equations, discontinuous coefficients and solution, finite-difference method, iterative method, imperfect-contact matching condition.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at [bulletin\\_bsu@mail.ru](mailto:bulletin_bsu@mail.ru) if you need translation of the article.

**REFERENCES**

1. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1983.
2. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravnenii* [Difference methods for solving elliptic equations]. Moscow: Nauka, 1976.
3. Wesseling P. *An introduction to Multigrid Methods*. Wiley, N. Y., 1991.
4. Il'in V. P. *Sib. matem. zhurn.* 1996. Vol. 37. No. 1. Pp. 151–169.
5. LeVeque R. J., Li Z. *In SIAM J. Num. Anal.*, 31. 1994. Pp. 1019–1044.
6. Iliev O. P. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2002. Vol. 22. No. 3. Pp. 391–406.
7. Ewing R., Iliev O., Lazarov R. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2001. Vol. 23. No. 4. Pp. 1334–1350.
8. Chernogorova T., Iliev O. *Large-Scale Scientific Computations of Engineering and Environmental Problems II*, Proc. of the Second Workshop on “Large-Scale Scientific Computations”, Sozopol, Bulgaria, June 2–6, 1999, Notes on Numerical Fluid Mechanics, v. 73, Vieweg, 2000. Pp. 171–179.
9. Chernogorova T., Ewing R., Iliev O., Lazarov R. *Proc. of the Int. Workshop on Computational Physics: Fluid Flow and Transport in Porous Media* (Z. Chen, R. Ewing and Z. Shi, Eds.), Lecture Notes in Physics, v. 552, Springer-Verlag, Heidelberg. 2000. Pp. 93–103.
10. Lubyshev F. V., Fairuzov M. E. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2000. Vol. 12. No. 3. Pp. 30–31.
11. Lubyshev F. V., Fairuzov M. E., Galeeva G. Ya. *Zhurnal SVMO*, 2011. Vol. 13. No. 2. Pp. 36–46.
12. Lubyshev F. V., Fairuzov M. E. *Zhurnal SVMO*. 2014. Vol. 16. No. 1. Pp. 89–105.
13. Lubyshev F. V. *Comp. Math. and Math. Physics*. 2012. Vol. 52. No. 8. Pp. 1094–1114. DOI: 10.1134/S0965542512080088
14. Lubyshev F. V., Manapova A. R., Fairuzov M. E. *Comp. Math. and Math. Physics*. 2014. Vol. 54. No. 11. Pp. 1700–1724. DOI: 10.7868/S0044466914110088
15. Manapova A. R., Lubyshev F. V. *Ufa Mathematical Journal*. 2014. Vol. 6. No. 3. Pp. 69–84. DOI: 10.13108/2014-6-3-69
16. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Metody resheniya setochnykh uravnenii* [Methods of solving difference equations]. Moscow: Nauka, 1978.

*Received 18.08.2015.*