УДК 536.37:538.36

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

**© И. Л. Хабибуллин, Л. А. Садыкова***

*Башкирский государственный университет*
*Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, Заки Валиди 32.*

*Тел.: +7 (347) 229 96 43.*
**Email: galiakberova-la@yandex.ru*

*В работе получены решения уравнения теплопроводности, описывающие распределение температуры в движущихся средах, нагреваемых электромагнитным излучением микроволнового диапазона. Нагрев реализуется за счет диссипации энергии плоской электромагнитной волны. При этом плотность, распределенных по объему нагреваемой среды, тепловых источников зависит от координаты по направлению распространения волны по экспоненциальному закону Бугера-Ламберта. Решение уравнения теплопроводности построено методом функций Грина для граничного условия третьего рода. Из полученного решения в частных случаях следуют известные в литературе решения при граничных условиях 1-го и 2-го родов. Полученные решения позволяют проводить анализ динамики нагрева движущихся сред в зависимости от таких определяющих параметров, как частота и интенсивность электромагнитного излучения, скорость движения и теплофизические характеристики нагреваемой среды, интенсивность теплообмена с окружающей средой.*

***Ключевые слова:*** *электромагнитное излучение, нагрев, движущаяся среда, уравнение теплопроводности, функция Грина, распределение температуры.*

Нагрев движущихся сред электромагнитным излучением используется во многих технологических процессах. Важным преимуществом электромагнитного нагрева в отличие от других способов нагрева является объемный характер и его безинерционность, а также возможность реализации циклического режима нагрева за счет мгновенного включения и выключения теплового воздействия на нагреваемый материал [1–5]. Под движущимися средами подразумеваются проточные жидкие среды, сыпучие среды, протяженные ленточные обьекты конвейерных технологий. Во многих случаях оказывается что, линейный размер области нагрева в направлении распространения электромагнитной волны намного больше чем глубина проникновения волны в нагреваемую среду. В этом случае, для выяснения основных закономерностей процесса нагрева достаточно рассмотреть уравнение теплопроводности в области $x>0$ с плотностью тепловых источников, убывающей по экспоненциальному закону по оси *x* (по направлению распространению плоской электромагнитной волны).

Таким образом, рассматривается следующая задача:

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c_1\vartheta\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{q_0}{c}e^{-2\alpha x} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a = \frac{\lambda}{c}, \quad (1)$$

$$T(x,0) = T(\infty,t) = T_0, \quad (2)$$

$$\lambda\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} - kT(0,t) = kT_c. \quad (3)$$

Здесь $T(x,t)$ – температура, $\lambda$ и $c$ – теплопроводность и объемная теплоемкость нагреваемой среды, $\vartheta$ – скорость движения среды, $k$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $q_0$ и $\alpha$ – интенсивность (плотность потока энергии) и показатель поглощения электромагнитного излучения. В общем случае задача (*1*)–(*3*) описывает теплоперенос при фильтрации жидкости в пористой среде, при этом $\lambda$ и $c$ – усредненные по объему пористой среды теплофизические параметры, величина $c_1$ равна отношению теплоемкости фильтрующегося флюида к теплоемкости насыщенной пористой среды. Очевидно, что при отсутствии пористой среды (движение в свободном пространстве) $c_1 = 1$.

Решение задачи (*1*)–(*3*) можно выразить через соответствующую функцию Грина $G(x,\xi,t)$:

$$T(x,t) = T_0\int_0^\infty G(x,\xi,t)\,d\xi - \frac{kT_c}{c}\int_0^t G(x,0,t-\tau)\,d\tau + \frac{q_0}{c}\int_0^t\int_0^\infty e^{-2\alpha\xi}G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (4)$$

Здесь функция Грина имеет вид [6]:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}e^{-\frac{c_1\vartheta(\xi-x)}{2a}-\frac{c_1^2\vartheta^2 t}{4a}} \times \left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4at}} + e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4at}} - 2S\int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at}-S\eta}d\eta\right],$$

$$S = \frac{k}{\lambda} + \frac{c_1\vartheta}{2a}.$$

Интеграл в этом выражении вычисляется:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4at}-S\eta}d\eta = \sqrt{\pi a t}\,e^{(x+\xi)S+S^2at}\,erfc\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + S\sqrt{at}\right).$$

С учетом этого интеграла и функции Грина, выражение (4) представим в виде:

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t). \quad (5)$$

В этом выражении:

$$T_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi a t}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{(x-\xi)}{2\sqrt{at}}-\frac{c_1\vartheta}{2}\sqrt{\frac{t}{a}}\right)^2}d\xi + \frac{T_0}{2\sqrt{\pi a t}}e^{-\frac{c_1^2\vartheta^2 t}{4a}}\int_0^\infty e^{-\frac{c_1\vartheta(\xi-x)}{2a}-\frac{(x+\xi)^2}{4at}}d\xi - T_0 S e^{-\frac{c_1^2\vartheta^2 t}{4a}+S^2at}\int_0^\infty e^{-\frac{c_1\vartheta(\xi-x)}{2a}+(x+\xi)S}erfc\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{at}} + S\sqrt{at}\right)d\xi.$$

$$T_2 = -\frac{kT_c}{2c\sqrt{\pi a}} \int_0^t e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}} - \frac{c_1\vartheta}{2}\sqrt{\frac{t-\tau}{a}}\right)^2} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} -$$

$$-\frac{kT_c}{2c\sqrt{\pi a}} e^{\frac{c_1\vartheta x}{2a}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)} - \frac{c_1^2\vartheta^2(t-\tau)}{4a}} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} -$$

$$-\frac{kT_c S}{2c} e^{-\frac{c_1\vartheta x}{2a} + Sx} \int_0^t e^{-\frac{c_1^2\vartheta^2(t-\tau)}{4a} + S^2 a(t-\tau)} erfc \times \left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + S\sqrt{a(t-\tau)}\right) d\tau.$$

$$T_3 = \frac{q_0}{2c\sqrt{\pi a}} \int_0^t \int_0^\infty e^{-2\alpha x} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)} + \frac{c_1\vartheta(x-\xi)}{2a} - \frac{c_1^2\vartheta^2(t-\tau)}{4a}} \frac{d\xi d\tau}{\sqrt{t-\tau}} +$$

$$+\frac{q_0}{2c\sqrt{\pi a}} \int_0^t \int_0^\infty e^{-2\alpha x} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(t-\tau)} - \frac{c_1\vartheta(\xi-x)}{2a} - \frac{c_1^2\vartheta^2(t-\tau)}{4a}} \frac{d\xi d\tau}{\sqrt{t-\tau}} -$$

$$-\frac{q_0 S}{c} \int_0^t \int_0^\infty e^{-2\alpha - \frac{c_1\vartheta(\xi-x)}{2a} - \frac{c_1^2\vartheta^2(t-\tau)}{4a} + (x+\xi)S + S^2 a(t-\tau)} \times erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}} + S\sqrt{a(t-\tau)}\right) d\xi d\tau.$$

Интегралы, входящие в выражения для $T_1$, $T_2$, $T_3$, вычисляются. При этом использованы значения интегралов вида:

$$\int_0^t e^{-\frac{a}{\tau} - b\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \text{ и } \int_0^t e^{a\tau} erfc\left(\frac{b}{\sqrt{\tau}} - c\sqrt{\tau}\right) d\tau,$$

приведенные соответственно в справочной литературе [7] и в работе [5]. В повторных интегралах в $T_3$ сначала вычисляются интегралы по переменной $\tau$.

Отметим, что рассматриваемая задача (*1*)–(*3*) описывает температурное распределение в нагреваемой среде для двух режимов нагрева – прямоточный и противоточный режимы. В первом случае направления распространения волны и движения среды совпадают, во втором случае нагреваемая среда движется навстречу волне [1], при этом в уравнении теплопроводности скорость движения $\vartheta$ принимается со знаком минус. Отметим, что граничное условие (*3*) является наиболее общим, однако возможно также использование его частных случаев – граничных условий первого и второго родов в зависимости от направления движения среды. Этот вопрос обсуждается ниже.

После вычисления интегралов имеем следующие выражения для соответствующих температур:

$$T_1 = \frac{T_0}{2} erfcV_3 + \frac{T_0}{2} e^{2V_1 x} erfcV_2 + + 2ST_0\sqrt{at}\, e^{(S+V_1)\left(x+\frac{kt}{c}\right)} erfcV_4 - - 2ST_0\sqrt{at}\, e^{2V_1 x} erfcV_2; \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{kT_c}{cc_1\vartheta} e^{2V_1 x} erfcV_2 - \frac{kT_c}{cc_1\vartheta} erfc(-V_3) + + \frac{kT_c S}{ac(S^2 - V_1^2)} e^{(V_1+S)x - (V_1^2 - S^2)at} erfcV_4 - - \frac{kT_c S}{2acV_1(S+V_1)} e^{2V_1 x} erfcV_2 + + \frac{kT_c S\left(1 - \frac{2S}{c_1 V_1}\right)}{2acV_1(S+V_1)} erfc(-V_3); \quad (7)$$

$$T_3 = \frac{q_0}{4cc_1\vartheta(\alpha+V_1)} e^{4(\alpha+V_1)^2 at} erfc\left(V_3 + 2\alpha\sqrt{at}\right) +$$

$$+ \frac{q_0}{4\alpha cc_1\vartheta} erfc(-V_3) +$$

$$+ \frac{q_0}{4\alpha cc_1\vartheta} e^{-2\alpha(x - c_1\vartheta t) + 4\alpha^2 at} erfc\left(V_3 + 2\alpha\sqrt{at}\right) -$$

$$- \frac{q_0}{4\alpha cc_1\vartheta} e^{2V_1 x} erfcV_2 +$$

$$+ \frac{q_0}{4\alpha cc_1\vartheta} e^{2\alpha c_1\vartheta t + 2\alpha x + 2V_1 x + 4\alpha^2 at} erfc\left(V_2 + 2\alpha\sqrt{at}\right) -$$

$$- \frac{q_0 S}{c} \frac{e^{(S^2 - V_1^2)}}{S^2 a - \frac{c_1^2\vartheta^2}{2a}} \frac{1}{2\alpha - S + V_1} \times \quad (8).$$

$$\times \left[\begin{matrix} erfcV_4 - \\ - e^{(2\alpha + V_1 - S)(x + (2\alpha + V_1 + S)at)} erfc\left(V_2 + 2\alpha\sqrt{at}\right) \end{matrix}\right] +$$

$$+ \frac{q_0 S}{c} \frac{1}{2aV_1(S - V_1)^2} e^{-(S - V_1)x} \times$$

$$\times \left[erfcV_2 - e^{(x + c_1\vartheta t)(S - V_1) + (S - V_1)^2 at} erfcV_4\right] +$$

$$+ \frac{q_0 S}{c} \frac{1}{2aV_1(S^2 - V_1^2)} e^{-(S + V_1)x} \times$$

$$\times \left[erfc(-V_3) - e^{(x - c_1\vartheta t)(S + V_1) + (S + V_1)^2 at} erfcV_4\right].$$

Здесь

$$V_1 = \frac{c_1\vartheta}{2a}, \quad V_{2,3} = V_1\sqrt{at} \pm \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad V_4 = \frac{x}{2\sqrt{at}} + S\sqrt{at}.$$

Таким образом, выражения (*5*)–(*8*) представляют решение задачи (*1*)–(*3*). Отметим, что метод функций Грина может быть использован и при неоднородных краевых условиях: $T(x,0) = T_0(x), T_c = T_c(t)$. Полученное решение является громоздким, однако, оно четко дифференцируется по физическим процессам и условиям обуславливающим перенос тепла. Составляющая температуры $T_1$ обусловлена влиянием на теплоперенос начального температурного профиля, $T_2$ описывает влияние на температурное поле граничного условия (*3*), составляющая $T_3$ прежде всего обусловлена наличием обьемных тепловых источников. Функция Грина в свою очередь, учитывает основные механизмы теплопереноса: теплопроводность, конвекция, теплообмен с окружающей средой.

Полученное решение позволяет анализировать различные случаи нагрева сред. Рассмотрим некоторые из них. Из граничного условия (*3*) при $k \to 0$ и $k \to \infty$ следует два предельных случая

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \text{ и } T(0,t) = T_c. \quad (9)$$

Условие адиабатичности поверхности $x = 0$ (первое условие) (9) было использовано Д. Егером при решении задачи о нагреве неподвижной среды микроволновым излучением [8]. Условие адиабатичности основано на том факте, что при наличии распределенных по обьему тепловых источников влияние теплообмена при $x = 0$ на температурное поле внутри среды ($x > 0$) является незначительным. В работе [3] показано, что использование этого условия правомерно, для времени нагрева удовлетворяющему условию:

$t \ll 1/4\alpha^2 a$. При моделировании нагрева движущейся среды в противоточном режиме (жидкость поступает из области нагрева к поверхности $x=0$) также возможно при $x=0$ использовать условие адиабатичности, если наряду с последущим условием, выполняется еще условие: $\vartheta \le 2\alpha a / c_1$. В работе [9] показано что, при выполнении этих двух условий, отношение количества тепла уносимого из области нагрева на линию $x=0$ теплопроводностью и конвекцией к количеству тепла вводимого в область нагрева на этой же поверхости электромагнитным излучением, для типичных значений параметров оказывается намного (на 2–3 порядка) меньше единицы. Второе из условий (*9*) используется при нагреве движущихся сред в прямоточном режиме и соответствует случаю, когда нагреваемая среда поступает в область нагрева ($x>0$) при температуре $T_c$. Решения, полученные Д. Егером (первое условие (*9*)), а также приведенные в [10] (второе условие (*9*)) для неподвижной среды, следуют из (*5*)–(*8*) при предельном переходе соответственно при $\vartheta \to 0$, $k \to 0$ и $\vartheta \to 0$, $k \to \infty$. Решение для неподвижной среды при втором условии (*9*) вряд ли имеет самостоятельный интерес, так как при $x=0$ температура постоянно увеличивается за счет нагрева области $x>0$. Это решение имеет смысл для ситуации, рассмотренной в [1]. В этой работе констатируется что, поскольку полностью теплоизолировать поверхность обрабатываемого обьекта не удается, температуру в нагреваемой среде можно определить как среднее арифметическое решений, найденных, во-первых, при условии полной теплоизоляции, и, во вторых, при условии температурного равновесия этой поверхности с окружающей средой, то есть условий (*9*).

Более общие, чем приведенные в [9] и [10] решения следуют из (*5*)–(*8*) при предельных переходах $k \to 0$ и $k \to \infty$, эти решения, описывающие нагрев подвижной среды получены в [3]. Согласно вышесказанному, решение с первым условием (*9*) описывает нагрев среды в противоточном режиме, решение со вторым условием (*9*) – в прямоточном . Эти решения имеют вид:

$$T_{\text{I}} = T_0 + \frac{\theta}{2\alpha + V_1} e^{2(V_1+\alpha)(x+2\alpha a t)} erfcV_5 - -\frac{\theta}{2} e^{-2\alpha x + 4\alpha(V_1+\alpha)at} erfcV_6 - \frac{\theta}{2}\frac{\alpha}{V_1} e^{2V_1 x} erfcV_2 + +\frac{\theta}{2}\frac{\alpha}{V_1} erfc(-V_3) + \theta e^{-2\alpha x}\left[e^{4\alpha(V_1+\alpha)at} - 1\right] \quad (10)$$

$$T_{\text{II}} = T_0 + +\frac{1}{2}(T_{\Gamma} - T_0 + \theta)\left[e^{2V_1 x} erfcV_2 + erfc(-V_3)\right] - -\frac{\theta}{2} e^{V_1 x + 4\alpha(\alpha+V_1)at} e^{(2\alpha+V_1)x} erfcV_5 + +\frac{\theta}{2} e^{-(2\alpha+V_1)x} erfcV_6 + \theta e^{-2\alpha x}\left[e^{4\alpha(V_1+\alpha)at} - 1\right]. \quad (11)$$

Здесь

$$\theta = \frac{q_0}{4\alpha\lambda(\alpha + V_1)}, \quad V_{5,6} = \frac{x}{2\sqrt{at}} \pm (2\alpha + V_1)\sqrt{at}\ .$$

Выражения (*10*) и (*11*) позволяют установить основные особенности нагрева движущихся сред электромагнитными волнами. Из (*10*) следует, что максимальная температура имеет место при $x=0$, то есть на линии выхода среды из области нагрева. Из (*11*) следует, что температура в области нагрева является немонотонной, максимальная температура достигается на фронте конвективного переноса тепла, который со временем движется вглубь области нагрева. Температура со временем (при $t \to \infty$) принимает конечное асимптотическое значение, которое определяется безразмерным параметром

$$\frac{q_0}{2\alpha c_1 \vartheta T_0}.$$

В работе [11] приведены результаты численного расчета микроволнового нагрева потока воды в канале. Полученные там результаты можно объяснить полученными в данной работе теоретическими результатами. В частности, один из основных выводов работы [11] о том, что с увеличением скорости потока воды на входе температура на выходе уменьшается, определяется приведенным выше критериальным безразмерным параметром.

Полученные в работе решения позволяют рассчитать температурное поле в области движения нагреваемой среды в поле электромагнитного излучения. По этим решениям можно выбирать оптимальные режимы нагрева, в зависимости от теплофизических и электрофизических характеристик сред, частоты и мощности электромагнитного излучения и заданных технологических параметров (время и температура нагрева).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Архангельский Ю. С. Справочная книга по СВЧ электротермии. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2011. 560 с.
2. Диденко А. Н. СВЧ-энергетика: Теория и практика. М.: Наука, 2003. 446 с.
3. Хабибуллин И. Л. Электромагнитная термогидромеханика поляризующихся сред. Уфа: Изд-во Башкир.ун-та. 2000. 246 с.
4. Хабибуллин И. Л., Назмутдинов Ф. Ф. Особенности динамики нагрева движущихся сред электромагнитным излучением // ИФЖ. 2000. Т.73. №5. С. 938–943.
5. Хабибуллин И. Л., Назмутдинов Ф. Ф. К теории нагрева сред электромагнитным излучением // Вестник Башкирского университета. 2014. Т.19. №2. С. 387–383.
6. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математическй физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. _М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487с.
9. Галимов А. Ю., Хабибуллин И. Л. Особенности фильтрации высоковязкой жидкости при нагреве электромагнитным излучением // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2000. №5. С. 114–123.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
11. Yousefi T., Mausavi S. A., Saghiz M. Z., Farahbakhsh B. An investigation on the microwave heating of flowing water: A numerical study // International Journal Thermal Sciensis. 2013. September. pp. 118–127.


*Поступила в редакцию 19.05.2015 г.*
*После доработки – 14.09.2015 г.*

# MODELING OF HEATING OF MOVING MEDIA BY ELECTROMAGNETIC RADIATION

**© I. L. Khabibullin, L. A. Sadykova***

*Bashkir State University*
*32 Zaki Validi St., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Phone: +7 (347) 229 96 43.*
**Email: galiakberova-la@yandex.ru*

We obtain the solution of the heat equation describing the temperature distribution in the moving medium heated by electromagnetic radiation in the microwave range. Heating is produced by the energy dissipation of a plane electromagnetic wave. The density of heat sources distributed over the volume of the heated medium depends on the coordinate on the direction of propagation of the wave; it is defined by exponential law of Bouguer-Lambert. Solution of the heat equation is constructed by the Green's function for the boundary conditions of the third kind. From the received decisions in special cases following well-known in the literature solutions for the boundary conditions of the 1st and 2nd kind. The received decisions allow us to perform the analysis of the dynamics of heat moving media, depending on the determining parameters such as the frequency and intensity of electromagnetic radiation, the velocity and thermal characteristics of the heated medium, the intensity of the heat exchange with the environment.

***Keywords:*** *electromagnetic radiation, heating, moving medium, heat equation, Green's function, the temperature distribution.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

## REFERENCES

1. Arkhangel'skii Yu. S. Spravochnaya kniga po SVCh elektrotermii [Handbook on microwave electrothermics]. Saratov: Izd-vo «Nauchnaya kniga», 2011.
2. Didenko A. N. SVCh-energetika: Teoriya i praktika [Microwave power engineering: Theory and practice]. Moscow: Nauka, 2003.
3. Khabibullin I. L. Elektromagnitnaya termogidromekhanika polyarizuyushchikhsya sred [Electromagnetic thermohydromechanics of polarizing media]. Ufa: Izd-vo Bashkir.un-ta. 2000.
4. Khabibullin I. L., Nazmutdinov F. F. IFZh. 2000. Vol. 73. No. 5. Pp. 938–943.
5. Khabibullin I. L., Nazmutdinov F. F. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2014. Vol. 19. No. 2. Pp. 387–383.
6. Polyanin A. D. Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheski fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001.
7. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series, and products]. _M.: Fizmatgiz, 1963.
8. Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel [Thermal conductivity of solids]. Moscow: Nauka, 1964. 487s.
9. Galimov A. Yu., Khabibullin I. L. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza. 2000. No. 5. Pp. 114–123.
10. Lykov A. V. Teoriya teploprovodnosti [The theory of thermal conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967.
11. Yousefi T., Mausavi S. A., Saghiz M. Z., Farahbakhsh B. International Journal Thermal Sciensis. 2013. September. pp. 118–127.

*Received 19.05.2015.*
*Revised 14.09.2015.*