УДК 519.216.3

УСЕЧЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

© Т. В. Емельянова, Ю. В. Иванюк*

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050 г. Томск, пр. Ленина, 36.

Тел.: +7 (923) 422 88 09.
**Email: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru*

Предлагается усеченная последовательная процедура для оценивания неизвестных параметров устойчивого процесса авторегрессии с непрерывным временем, обеспечивающая контроль за среднеквадратической точностью оценок. Получены формулы для асимптотической длительности оценок, проведено численное моделирование по методу Монте-Карло. Результаты могут найти применение в задачах идентификации динамических систем, подверженных действию шумов, адаптивного прогнозирования, а также для оценивания параметров спектров гауссовских процессов с непрерывным временем.

Ключевые слова: *гарантированная среднеквадратическая точность, авторегрессионный процесс, последовательное оценивание, момент остановки, гауссовский процесс с рациональной плотностью.*

Введение

Модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, широко используются в задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозировании и управлении в динамических системах. Первоначальной задачей является задача идентификации, заключающаяся в оценке неизвестных параметров модели. Для решения этой задачи разработаны различные эффективные методы: наименьших квадратов, максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации и т.д. (см. [1–7]). В теории идентификации наиболее полно изучены асимптотические свойства оценок, полученных в предположении, что процесс наблюдений динамической системы может продолжаться достаточно долго. При практическом использовании оценок обычно исходят из того, что даже для малых и умеренных объемов данных свойства оценок несущественно отличаются от асимптотических. Однако это не всегда имеет место и его использование может приводить к ошибочным выводам. Поэтому представляет интерес задача неасимптотического анализа свойств оценок[8–11]. В [12] рассматривается один из подходов к решению задач идентификации динамических систем в неасимптотической постановке, связанный с использованием последовательного анализа, характеризующегося тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее, а определяется специальными правилами накопления данных. Ноэто правило может привести к затягиванию процедуры оценивания и необходимости использования реализации большой длительности, которой в прикладных задачах может и не быть. Уменьшить число наблюдений, требуемых для получения оценок с нужными свойствами, позволяет подход, связанный с усеченным последовательным анализом.

Постановка и краткий обзор некоторых методов оценивания параметров

Пусть наблюдаемый p-мерный процесс $X_t = \left(X_1(t) \ldots X_p(t)\right)'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t \text{ с начальным условием}$$
$$X_0 = \left(X_1(0), \ldots, X_p(0)\right). \qquad (1)$$

Здесь A и B –квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, при этом все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, W_t– стандартный p-мерный процесс броуновского движения.

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы a_{ij} по наблюдениям процесса X_t. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p-го порядка (АР(p))

$$dx_t^{p-1} = \left(\theta_1 x_t^{p-1} + \ldots + \theta_p x_t\right)dt + \sigma dW_t \qquad (2)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \qquad (3)$$

Известно, что таким процессом можно аппроксимировать любой стационарный гауссовский процесс [13].

Предполагается, что неизвестные параметры $\theta_i, i = \overline{1,p}$, таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \ldots - \theta_p$ имеют отрицательные вещественные части. Процесс (2) можно представить в виде (1), если положить

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_t^{p-1} \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \theta_p & \theta_{p-1} & \ldots & \ldots & \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p, \qquad (5)$$

где $\langle a \rangle_i$ обозначает i-ю координату вектора столбца $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)'$;

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' \, ds$$

– выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1}– обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае. Асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов изучались в ряде работ [1, 7, 8, 14 и др.]; показано, что они являются сильно состоятельными и асимптотически нормальными. В прикладных задачах использование асимптотических свойств оценок обычно основывается на предположении, что эти свойства сохраняются для малых и умеренных объемов данных.Однако, как отмечено выше, поведение оценок при малых и умеренных длительностях наблюдений может привести к неточным выводам при принятии решений. Поэтому представляется важным изучение свойств оценок в неасимптотической постановке. Изучение задач оценивания параметров диффузионных процессов в неасимптотической подстановке восходит к работам Новикова, Липцера и Ширяева [3, 17, 18], которые предложили последовательный план для оценивания неизвестного параметра диффузионного процесса

$$dx_t = \theta x_t dt + \sigma dW_t,$$

а также двумерного процесса специального вида с двумя неизвестными параметрами. В этих работах было доказано, что последовательная оценка имеет преимущества перед классической оценкой МНК: она является несмещенной и гауссовской [подробнее см., например, 17−19]. Но этот метод не работает в ситуации, когда число неизвестных параметров превышает размерность наблюдаемого процесса. В [20] была предложена последовательная процедура, позволяющая получать гарантированные оценки с любой заданной среднеквадратической точностью для авторегрессии с непрерывным временем любого порядка по конечной реализации процесса. Эта процедура может оказаться, однако, достаточно сложной для практической реализации в случае многих неизвестных параметров, поскольку она включает два этапа и требует построения целой системы оценок МНК, вычисляемых в специальные моменты времени. На первом этапе строится последовательность модифицированных оценок МНК, каждая со своим правилом прекращения наблюдений, на втором этапе проводится процедура сглаживания оценок, полученных на первом этапе, причем при сглаживании используется случайное число оценок, зависящее от требуемой точности оценивания неизвестных параметров. В [23] предлагается одноэтапная процедура оценивания параметров модели (1) с заданной среднеквадратической точностью. При решении практических задач имеющихся данных может быть недостаточно для применения вышеупомянутых процедур.

В настоящей работе предложена одноэтапная процедура оценивания, использующая специальное усеченное правило остановки наблюдений и позволяющая контролировать среднеквадратическую точность оценок.

Эта процедура, как и предложенная в [20, 23], является последовательной модификацией оценок МНК и может использоваться при наличии некоторой априорной информации о параметрах.

Построение усеченной последовательной процедуры

При построении последовательного плана будет использоваться следующаялемма, доказанная в [12], дающая оценку нормы уклонения оценки (4) от ее истинного значения.

Лемма 1. [12]. Пусть матрица M^Tв (5) невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (4) удовлетворяет неравенству

$$\left\|\hat{\theta}_T - \theta\right\|^2 \le \|M_T^{-2}\| \cdot \|m_T\|^2, \qquad (6)$$

где

$$m_T = \int_0^T X_s dW_s. \qquad (7)$$

Как было показано в [12] (см. лемму 3), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{M_T}{T} = F, \qquad (8)$$

где матрица F положительно определена. Отсюда следует, что множитель $\|M_T^{-2}\|$ в правой части (6) монотонно убывает с ростом T, причем $\lim_{T\to\infty} \|M_T^{-2}\| = 0$.

Это позволило использовать в работе [12] следующий план оценивания.

Пусть $H > 0$. Определим длительность наблюдений процесса и оценку неизвестных параметров по формулам

$$\tau = \tau(H) = \inf\left\{t > 0 \colon \|M_T^{-2}\|^{1/2} \le \frac{1}{H}\right\},$$
$$t \in [0, T] \qquad (9)$$

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \cdot \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p. \qquad (10)$$

Момент остановки наблюдений в последовательном плане (9), (10) является случайной величиной, зависящей от выбора порога H, которая может принимать достаточно большие значения. В прикладных задачах длительность реализации процесса, используемая для идентификации неизвестных параметров, часто ограничена некоторой величиной T. В этом случае вместо последовательной оценки (9), (10) будем использовать усеченный последовательный план, определенный следующими формулами:

$$N(H) = \min(\tau(H), T) \qquad (11)$$

$$\theta^*(H) = M_{N(H)}^{-1} \cdot \int_0^{N(H)} X_s d\langle X_t\rangle_p \, \chi_{(N(T)\le T)}, \qquad (12)$$

где $\tau(H)$ определен в (9).

Используя этот план, получим верхнюю границу для среднеквадратической точности оценок.

Лемма 2. Пусть матрица (5) удовлетворяет условию (8). Тогда для любого $H > 0$ оценка $\theta^*(H)$, определенная в (11) и (12), удовлетворяет неравенству

$$E_\theta \|\theta^*(H) - \theta\|^2 \le \frac{E_\theta tr M_{N(H)}}{H^2} \qquad (13)$$

Доказательство. Заменяя в лемме 1 T на $N(H)$, получим

$$\|\theta^*(H) - \theta\|^2 \le \left\|M_{N(H)}^{-2}\right\| \cdot \left\|\int_0^{N(H)} X_s dW_s\right\|^2.$$

Учитывая (6), имеем $E_\theta \|\theta^*(H) - \theta\|^2 \le \frac{1}{H} E_\theta \left\|\int_0^{N(H)} X_s dW_s\right\|^2$. Переходя к усеченным моментам и используя свойства стохастического интеграла (см., например, [3]), получаем

$$\frac{1}{H^2} \sum_{i=1}^p E_\theta \int_0^{N(H)} \langle X_t\rangle_t^2 dt = \frac{1}{H^2} E_\theta tr M_{N(T)}.$$

Отсюда и из (14) следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Свойства выборочной информационной матрицы Фишера

В этом разделе будут установлены некоторые свойства выборочной информационной матрицы Фишера.

Предположим, что значения параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ процесса (2) таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z)$ имеют отрицательные вещественные части, причем $\max\limits_{1\le i\le p} \mathrm{Re}\lambda_i(A(\theta)) \le -\gamma < 0$ где γ – некоторая положительная постоянная.

Введем параметрическое множество

$$\lambda_\gamma = \left\{\theta \in R^p \colon \max_{1\le i\le p} \mathrm{Re}\lambda_i(A(\theta)) \le -\gamma\right\}. \qquad (14)$$

Далее потребуются следующие свойства из работы [12].

Лемма 3. Пусть в уравнении (1) $E\|X_0\|^4 < +\infty$. Тогда матрица (5) удовлетворяет предельному соотношению $P_\theta - \lim\limits_{t\to\infty} \frac{M_T}{T} = F$, где F – положительно определенная матрица, являющаяся единственным решением уравнения

$$FA' + AF' + BB' = 0, \qquad (15)$$

где $F = \int_0^\infty e^{As} BB' e^{A's} ds$.

Лемма 4. Пусть начальное условие в уравнении (1) таково, что $\sup\limits_{\theta\in\Lambda_\gamma} E_\theta \|X_0\|^8 < +\infty$, где множество Λ_γ определено в (14). Тогда для любого компакта $K \in \Lambda_\gamma$ справедлива оценка

$$\sup_{\theta\in K} E_\theta \left\|\frac{M_T}{T} - F\right\|^4 \le \frac{L}{T^2},$$

где L – некоторая постоянная.

Лемма 5. Для всякого $H > 0$ справедливо неравенство

$$E_\theta tr M_{N(H)} \le trF \cdot E_\theta N(H) +$$

$$+ \int_0^\infty tr(e^{As} E_\theta X_0 X_0{}' e^{A's})\, ds \qquad (16)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы из работы [12].

Асимптотическое поведение средней длительности процедуры дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $N(H)$ определяется формулой (11) и выполнены условия леммы 4. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{\theta\in K} \left|E_0 \frac{N(H)}{H} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}\right| = 0$$

при неограниченной длине промежутка $N(H)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\lim\limits_{H\to\infty} \sup\limits_{\theta\in K} E_0 \frac{N(H)}{H} < +\infty$. Учитывая (9) и (11), имеем $E_\theta N(H) = \int_0^\infty P_\theta(N(H) > T) dT = \int_0^\infty P_\theta \left(\|M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} >\right.$ $1HdT$.

Выбирая $\delta > 0$, такое, что

$$\sup_{\theta\in K} \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2\delta}, \qquad (17)$$

получаем оценку $E_\theta N(H) = \int_0^\infty \chi(T\delta <$ $HdT=H\delta\infty P\theta T2MT-212>1\delta dT$.

Для подынтегральной функции во втором интеграле имеем оценку

$$P_\theta \left(\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta}\right) \le P_\theta \left(\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2\delta}\right) +$$

$$+ P_\theta \left(\left|\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}\right| > \frac{1}{2\delta}\right) \le$$

$$\le P_\theta \left(\left\|\frac{M_T}{T}\right\| \le \eta, \left|\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} - \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}\right| > \frac{1}{2\delta}\right) +$$

$$+ P_\theta \left(\left\|\frac{M_T}{T}\right\| \le \eta\right), \theta \in K. \qquad (18)$$

Поскольку $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{M_T}{T} = F$ п.н. и функция $\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$ равномерно непрерывна по θ на компакте K, то для $\Delta < \frac{1}{2\delta}$ найдутся такие $T_0 > 0$ и $\eta > 0$, что при $T > T_0$, если $\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| < \eta$, то $\left|\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} -\right.$ $F-212<\Delta$. Поэтому первое слагаемое в правой части (18) равно нулю и неравенство (18) примет вид

$$P_\theta \left(\|T^2 M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta}\right) \le P_\theta \left(\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| < \eta\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\eta^4} E_\theta \left\|\frac{M_T}{T} - F\right\|^4. \qquad (19)$$

Используя лемму 4, получаем требуемую асимптотическую равномерную ограниченность величины $E_\theta \frac{N(H)}{H}$.

Покажем, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{\theta\in K} P_\theta \left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \ge \eta\right) = 0. \qquad (20)$$

Имеем

$$P_\theta \left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \ge \eta\right) \le P_\theta (N(H) < m) +$$

$$+ \sum_{k=m}^\infty P_\theta \left(\sup_{k\le T<k+1} \left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \ge \eta\right). \qquad (21)$$

Оценка ряда в правой части (21) целиком повторяет оценку аналогичного ряда в теореме 1 работы [12] и имеет вид

$$\sum_{k=m}^\infty P_\theta \left(\sup_{k\le T<k+1} \left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \ge \eta\right) \le$$

$$\leq l\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \qquad (22)$$

Первое слагаемое в (21) допускает оценку

$$P_\theta(\tau(H) < m) =$$
$$= P_\theta\left(\frac{1}{\lambda_1^4(M_m)} + \cdots + \frac{1}{\lambda_p^4(M_m)} \leq \frac{1}{H^4}\right) \leq$$
$$\leq P_\theta(\lambda_1(M_m) \geq H) \leq P_\theta(trM_m \geq H) =$$
$$= P_\theta\left(\int_0^m tr(X_sX_s{}')\,ds \geq H\right) = P_\theta\left(\int_0^m \|X_s\|^2 ds \geq H\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{H}E_\theta\left(\int_0^m \|X_s\|^2 ds\right) \leq \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}(e^{-2\gamma m} - 1)\right)\right).$$

Подставляя эту оценку и оценку (27) в (21), получаем

$$\sup_{\theta\in K}P_\theta\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right)$$
$$\leq \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}(e^{-2\gamma m} - 1)\right)\right)$$
$$+ \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Переходя к пределу сначала при $H \to \infty$, затем при $m \to \infty$, приходим к (20). Учитывая, лемму (1.1.1) из [21], получим

$$P_\theta(\tau(H) < m) \leq \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}(e^{-2\gamma m} - 1)\right)\right)$$
$$\to 0.$$

Остается убедиться в том, что для любого

$$\eta > 0$$

$$\lim_{H\to\infty}\sup_{\theta\in K}E_\theta\left(\frac{N(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right)\right) = 0.$$

Рассмотрим

$$E_\theta\frac{N(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right) =$$
$$= E_\theta\frac{N(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right)\chi(N(H) < m) +$$
$$+E_\theta\frac{N(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right)\chi(N(H) \geq m) \leq$$
$$\leq \frac{m}{H}P_\theta\left(\left\|\frac{M_{N(H)}}{N(H)} - F\right\| \geq \eta\right) + E_\theta\frac{N(H)}{H}\chi(N(H) \geq m).$$

Выбирая m из условия $m \geq \frac{H}{\delta}$ с δ, удовлетворяющим (17), имеем $E_\theta\big(N(H)\chi(N(H) \geq m)\big) = \int_m^\infty P_\theta\,(N(H) \geq T)dT = \int_m^\infty P_\theta\left(\|T^2M_T^{-2}\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta}\right)dT$; отсюда и из (19) получаем требуемое. Теорема 1 доказана.

Найдем верхнюю границу для среднеквадратической точности оценки вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)'$ в уравнении (2) с помощью последовательного плана (11), (12).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого компактного множества $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\sup_{\theta\in K}E_\theta(\|\theta^*(H) - \theta\|^2) \leq \frac{a_K}{H}(1 + o(1)), \quad (23)$$

где $a_K = \sup_{\theta\in K}\phi(\theta), \phi(\theta) = trF\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$, где $o(1) \to 0$ при $H \to \infty$.

Доказательство. Поскольку $E_\theta\|\theta^* - \theta\|^2 = E_\theta\|\theta^* - \theta\|^2\chi(N(H) \leq T) + E\|\theta\|^2\chi(N(H) > T)$, то используя оценки (13) и (16) из лемм 2 и 5, приходим к неравенству

$$E_\theta(\|\theta^*(H) - \theta\|^2)$$
$$\leq \frac{1}{H^2}\left(trF \cdot E_\theta N(H)\right.$$
$$\left.+ \int_0^\infty tr(e^{As}E_\theta(X_0X_0{}')e^{A's})\,ds\right).$$

В силу теоремы 1 отсюда следует неравенство (23). Теорема 2 доказана.

Результаты численного моделирования

В этом разделе представлены результаты численного моделирования предлагаемой последовательной процедуры (11), (12) оценивания параметров регрессии с непрерывным временем на примере процесса

$$d\dot{x}_t = (\theta_1\dot{x}_t + \theta_2 x_t)dt + dW_t. \qquad (24)$$

В матричной форме процесс имеет вид

$$dX_t = AX_t + BW_t,$$

где $X_t = \begin{pmatrix}\dot{x}_t\\ x_t\end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \theta_2 & \theta_1\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}$;

W_t – стандартный двумерный винеровский процесс, причем $\langle W_t\rangle_2 = w_t$.

Множество устойчивости Λ_γ процесса (24) задается равенством

$$\Lambda_\gamma = \left\{(\theta_1, \theta_2): \theta_2 < \frac{\gamma}{2}\theta_1 + \gamma^2, \theta_1 < 0\right\}, \gamma > 0.$$

Разрешая уравнение (15) относительно F, получаем

$$F = diag\left(\frac{\sigma^2}{2\theta_1\theta_2}, \frac{\sigma^2}{-2\theta_1}\right), \|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} = \frac{2|\theta_1|\sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2}.$$

Поэтому при больших H средняя длительность процедуры оценивания удовлетворяет соотношению

$$E_\theta\tau(H) \sim H\frac{2|\theta_1|\sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{\sigma^2}$$

для всех $\theta = (\theta_1, \theta_2)' \in K$, где K – компакт в параметрической области Λ_γ, $\gamma > 0$. При этом среднеквадратическая точность оценивания равномерно по компакту K определяется неравенством (28), причем

$$\phi(\theta) = trF\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}} = \frac{(1-\theta_2)\sqrt[4]{1+\theta_2^4}}{|\theta_2|}.$$

Априорную область для параметров модели θ_1 и θ_2 зададим следующим компактом

$$\mathrm{K}\{(\theta_1, \theta_2): -0.6 \leq \theta_1 \leq -0.2;\ -0.6 \leq \theta_2 \leq -0.2\ \}.$$

Максимизация функции $\phi(\theta)$ по этой области дает следующую постоянную $a_k = \max_{\theta\in K}\phi(\theta) = 6.002399$, используемую в теореме 2.

На *рис.* 1 приводятся графики спектральной плотности процесса (24) с $\theta_1 = -0.3$ и $\theta_2 = -0.2$ (сплошная линия) и ее оценки при полученных значениях оценок параметров θ_1 и θ_2 (пунктирная линия) с помощью последовательного плана (10), (11).

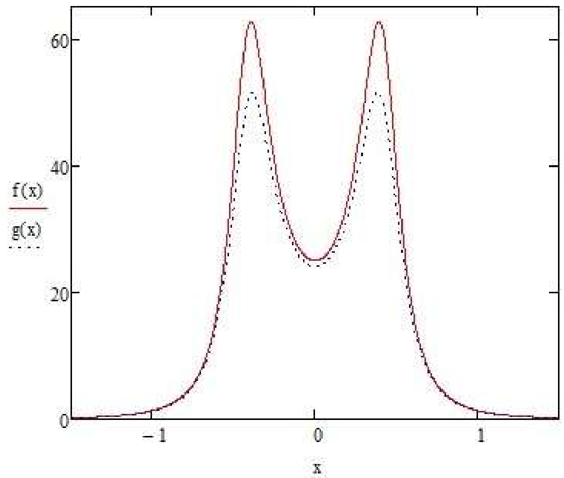

Рис. 1. График спектральной плотности.

Для проверки согласия выборочных свойств оценок (11), (12) с теоретическими результатами теорем 1, 2 проводилось моделирование по методу Монте-Карло, включавшее 50 повторений процедуры при различных значениях порога H, определяющего момент остановки $\tau = \tau(H)$.

В *табл.* 1 приводятся значения оцениваемых параметров θ_1 и θ_2, величина порога H, выборочная средняя длительность процедуры $N^*(H)$, удельная средняя длительность $N^*(H)/H$ и ее асимптотическое теоретическое значение $\|F^{-2}\|^{\frac{1}{2}}$.

При сравнении последних двух строк *табл.* 1 видно, что с увеличением величины порога H выборочная характеристика $N^*(H)/H$ стремится к теоретическому значению, что свидетельствует о согласии результатов моделирования с утверждением теоремы 1.

Выборочные характеристики, касающиеся точности последовательных оценок, полученных по 50 реализациям процедуры с порогом $H = 300$, представлены в *табл.* 2.

Здесь наряду со значениями параметров модели θ_1 и θ_2, в следующих за ними строках, приводятся среднеквадратические точности полученных последовательных оценок. В строках $SD(\theta_1^{**})$ и $SD(\theta_2^{**})$ даются среднеквадратические уклонения обычных оценок МНК (5), вычисленных по реализации длины T. При этом значение T находилось из условия $\mathrm{T} = N^*(50) = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} N_i(50)$, где $N_i(50)$ определяет длительность последовательной процедуры в i-м эксперименте, $\phi(\theta)/H$ – верхняя граница доверительной области для среднеквадратической точности последовательной оценки. Результаты численного моделирования показывают хорошую согласованность с теоретическими результатами. Сравнение последовательных и обычных оценок МП показывает, что они близки по точности. При этом, однако, следует учитывать, что последовательные оценки позволяют контролировать среднеквадратическую точность путем выбора порога H.

Заметим, что при моделировании оценок МНК с фиксированной длительностью наблюдений T, эта длительность выбиралась с помощью последовательной процедуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука, 1989.
2. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. 1955. Т.7. Вып.5. С. 3–168.

Таблица 1

Результаты моделирования, показывающие согласованность с теоремой 1

θ_1	–0.3	–0.3	–0.3	–0.3	–0.3	–0.4	–0.4	–0.5	–0.5
θ_2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.2
H	50	100	300	500	1000	50	300	50	300
$N^*(H)$	100.1	131.2	232	315.6	605.6	100.7	232.1	100.4	245.8
$\frac{N^*(H)}{H}$	2.002	1.312	0.7733	0.6312	0.6056	2.014	0.7737	2.008	0.8193
$\|F^{-2}\|^{1/2}$	0.6002	0.6002	0.6002	0.6002	0.6002	0.8003	0.8003	1.0004	1.0004

Таблица 2

Результаты моделирования, показывающие согласованность с теоремой 2.

θ_1	–0.3	–0.4	–0.5	–0.2	–0.2	–0.2	–0.9
θ_2	–0.2	–0.2	–0.2	–0.3	–0.4	–0.5	–0.5
$SD(\theta_1^*)$	0.00100	0.004502	0.000033	0.000098	0.004646	0.000161	0.000719
$SD(\theta_2^*)$	0.00002	0.000767	0.000007	0.000048	0.001121	0.000052	0.000467
$SD(\theta_1^{**})$	0.00062	0.000101	0.006962	0.000904	0.001988	0.004831	0.000016
$SD(\theta_2^{**})$	0.00098	0.000445	0.000021	0.003240	0.000322	0.001887	0.005249
$\phi(\theta)/H$	0.02001	0.020008	0.020008	0.020008	0.020008	0.020008	0.020008

5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 756 с.
6. Brockwell P. J. Introduction to time series and forecasting / P. J. Brockwell, R. A. Davis. Second Edition. Springer, 2002. 449 p.
7. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 296 с.
8. Конев В. В. Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем / В. В. Конев, Ф. П. Тарасенко. Томск: Издательство Томского университета, 1985. 267 с.
9. Galtchouk L. On sequential estimation of parameters in continuous time stochastic regression / L. Galtchouk, V. V. Konev //Statistics and Control of Stochastic Processes. 1997. P. 123–138.
10. GaltchoukL. On sequential estimation of parameters in semimartingale regression models with continuous time parameter / L. Galtchouk, V. Konev //Annals of statistics. 2001. V. 29. No. 5. P. 1508–1536.
11. Конев В. В. О гарантированном оценивании параметров линейной регрессии при зависимых помехах / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков // Автоматика и телемеханика. 1997. №2. С. 75–87.
12. Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии // Вестник Томского государственного университета. 2013. №5(25), с 12–25.
13. Brillinger D. R. Asymptotic properties of spectral estimates of second order // Selected Works of David Brillinger / Guttorp P., Brillinger D. (Eds.) Springer New York, 2012. P. 179–194.
14. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963.
15. Тараскин А. Ф. Об асимптотической нормальности стохастических интегралов в оценках коэффициента переноса диффузионного процесса //Мат. физика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 8. с. 149–163.
16. Тараскин А. Ф. Об асимптотической нормальности некоторых стохастических интегралов и оценках параметров переноса многомерного диффузионного процесса // Теор. вероятн. и мат. статистика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 2. с. 205–220.
17. Новиков А. А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1971. Т.16. Вып.2. с. 394–396.
18. Новиков А. А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Мат. заметки. 1972. Т.12. Вып. 5. с. 627–638.
19. Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г. Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовскогомарковского процесса //ДАН СССР. 1962. Т. 156. №4. с. 747–750.
20. Konev V. V. and Pergamenshchikov S. M. Sequential Estimation of the Parameters in a Trigonometric Regression Model with the Gaussian Coloured Noise // Statistical Inference for Stochastic Processes 6: 215–235, 2003.
21. Конев В. В., Пергаменщиков С. М. Последовательное оценивание параметров линейных неустойчивых стохастических систем с гарантированной среднеквадратической точностью // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. №4.
22. Беллман Р. Ведение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
23. Kabanov Yu. M. and Pergamenshchikov S. M. Two Scale Stochastic Systems: Asymptotic Analysis and Control // Springer, Berlin, New York, 2002.

Поступила в редакцию 11.01.2016 г.
После доработки – 25.03.2016 г.

TRUNCATED ESTIMATION OF PARAMETERS IN A CONTINUOUS AUTOREGRESSION MODEL

© T. V. Emelyanova, J. V. Ivanyuk*

National Research Tomsk State University
36 Lenin Ave., 634050 Tomsk, Russia.

Phone: +7 (923) 422 88 09.
**Email: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru*

There is a lot of literature devoted to the development of efficient methods for estimating parameters in a continuums time regression models. The most popular applied methods are the least squares method (LSM) and maximum likelihood method (MLM). It is difficult to estimate a number of properties due to their nonlinearity. One of the ways to overcome this difficulty is to apply the sequential analysis approach. Sequential estimation has advantages over the classical method of least squares estimation: it is unbiased and guarantees mean square accuracy. However, this method does not work in a situation where the number of unknown parameters exceeds the dimension of the observed process. This article considers the problem of parameters estimating in a stable autoregressive model. We propose truncated sequential sampling scheme with a special stopping time based on the observed Fisher information matrix. This scheme guarantees mean square accuracy of the estimator of unknown parameters. The results of Monte-Carlo simulation of the truncated procedure are in good accordance with the analytical solutions. The results can be applied to the problems of dynamic-system identification, adaptive forecasting, and parametric spectral estimation of Gaussian processes in a continuous time. In addition, as a result, the properties of truncated sequential procedures relating to its average duration and mean squared accuracy were studied in detail.

Keywords: *guaranteed mean-square accuracy, sequential estimation, stopping time, Gaussian process with rational spectral density.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Arato M. Lineinye stokhasticheskie sistemy s postoyannymi koeffitsientami. Statisticheskii podkhod [Linear stochastic systems with constant coefficients. Statistical approach]. Moscow: Nauka, 1989.
2. Ibragimov I. A., Khas'minskii R. Z. Asimptoticheskaya teoriya otsenivaniya [The asymptotic theory of estimation]. Moscow: Nauka, 1979.
3. Liptser R. Sh., Shiryaev A. N. Statistika sluchainykh protsessov [Statistics of stochastic processes]. Moscow: Nauka, 1974.
4. Yaglom A. M. UMN. 1955. Vol. 7. No. 5. Pp. 3–168.
5. Anderson T. Statisticheskii analiz vremennykh ryadov [Statistical analysis of time series]. Moscow: Mir, 1976.
6. Brockwell P. J. Introduction to time series and forecasting / P. J. Brockwell, R. A. Davis. Second Edition. Springer, 2002.
7. Vazan M. Stokhasticheskaya approksimatsiya [Stochastic approximation]. Moscow: Mir, 1972.
8. Konev V. V. Posledovatel'nye otsenki parametrov stokhasticheskikh dinamicheskikh system [Successive estimates of the parameters of stochastic dynamical systems] / V. V. Konev, F. P. Tarasenko. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta, 1985.
9. Galtchouk L.Statistics and Control of Stochastic Processes. 1997. Pp. 123–138.
10. GaltchoukL.Annals of statistics. 2001. Vol. 29. No. 5. Pp. 1508–1536.
11. Konev V. V. Avtomatika i telemekhanika. 1997. No. 2. Pp. 75–87.
12. Emel'yanova T. V., Konev V. V. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. No. 5(25), s 12–25.
13. Brillinger D. R. Selected Works of David Brillinger / Guttorp P., Brillinger D. (Eds.) Springer New York, 2012. Pp. 179–194.
14. Rozanov Yu. A. Statsionarnye sluchainye protsessy [Stationary stochastic processes]. Moscow: Fizmatgiz, 1963.
15. Taraskin A. F.Mat. fizika. Kiev: Naukova dumka, 1970. No. 8. s. 149–163.
16. Taraskin A. F. Teor. veroyatn. i mat. statistika. Kiev: Naukova dumka, 1970. No. 2. s. 205–220.
17. Novikov A. A. Teor. veroyatn. i ee primen. 1971. Vol. 16. No. 2. s. 394–396.
18. Novikov A. A. Mat. zametki. 1972. Vol. 12. No. 5. s. 627–638.
19. Arato M., Kolmogorov A. N., Sinai Ya. G.DAN SSSR. 1962. Vol. 156. No. 4. s. 747–750.
20. Konev V. V. Statistical Inference for Stochastic Processes 6: 215–235, 2003.
21. Konev V. V. Problemy peredachi informatsii. 1992. Vol. 28. No. 4.
22. Bellman R. Vedenie v teoriyu matrits [Introduction to the theory of matrices]. Moscow: Nauka, 1969.
23. Kabanov Yu. M. Springer, Berlin, New York, 2002.

Received 11.01.2016.
Revised 25.03.2016.