УДК 534.11

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕУПРУГИХ ВИДОВ ЗАКРЕПЛЕНИЙ ТРУБОПРОВОДОВ

© А. М. Ахтямов[1,2], В. Р. Шагиев[1]*

[1] *Башкирский государственный университет*
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2] *Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

**Email: shagiev-vadim@mail.ru*

Рассматриваются колебания трубопровода с жидкостью. Левый и правый концы трубопровода закреплены одним из четырёх видов закреплений: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец. Комбинации этих закреплений на левом и правом концах образуют 16 видов закреплений. Это (заделка)–(заделка), (заделка)–(свободное опирание), (заделка)–(плавающая заделка), (заделка)–(свободный конец), (свободное опирание)–(заделка), (свободное опирание)–(свободное опирание), (свободное опирание)–(плавающая заделка), (свободное опирание)–(свободный конец), (плавающая заделка)–(заделка), (плавающая заделка)–(свободное опирание), (плавающая заделка)–(плавающая заделка), (плавающая заделка)–(свободный конец), (свободный конец)–(заделка), (свободный конец)–(свободное опирание), (свободный конец)–(плавающая заделка), (свободный конец)–(свободный конец). Ранее было показано, что если жидкость не течёт по трубопроводу, то по всем собственным частотам изгибных колебаний трубопровода вид закрепления трубопровода определяется однозначно с точностью до перестановок закреплений на его концах. При этом для идентификации используется и «нулевая собственная частота». Под «нулевой собственной частотой» понимается нулевое собственное значение соответствующей задачи на собственные значения. «Нулевой собственной частоте» соответствует не собственное колебание, а так называемое собственное движение, например, падение трубопровода в случае закрепления (свободный конец)–(свободный конец). Отсутствие информации о «нулевой собственной частоте» не позволяет восстановить вид закрепления трубопровода с точностью до перестановок закреплений на концах. Это не позволяет сделать даже информация о всех собственных частотах (ненулевых). В настоящей статье показано, что для определения одного из 16 видов закреплений трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах достаточно одной собственной частоты и информации о том, является ли нулевое значение собственным. Использование в качестве данных восстановления одной из первых частот колебаний приводит к меньшим погрешностям, чем использование последующих собственных частот.

Ключевые слова: *краевые условия, собственные частоты, собственные значения, заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец, трубопровод.*

Колебаниям трубопроводов, содержащим жидкость, а также определению собственных частот колебаний стержней и трубопроводов посвящено много работ [1–8]. В [9–13] решались задачи определения параметров краевых условий и условий сопряжения. В [14, 15] показано, что по всем собственным частотам (в том числе и нулевому собственному значению) вид закрепления трубопровода (в случае, когда жидкость не течёт по трубопроводу) определяется однозначно с точностью до перестановок местами закреплений на его концах. Более того, там же было показано, что для такой идентификации достаточно девяти собственных частот. В настоящей статье показано, что для такой идентификации 16 описанных выше закреплений достаточно двух собственных значений.

В данной статье мы будем рассматривать неупругие виды закреплений: заделка, свободное опирание, плавающая заделка, свободный конец. Для начала напомним, что краевые условия в общем виде имеют вид:

$$\begin{aligned} U_1(X) &= -a_1X(0) + a_4X'''(0) = 0, \\ U_2(X) &= -a_2X'(0) + a_3X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= b_1X(1) + b_4X'''(1) = 0, \\ U_4(X) &= b_2X'(1) + b_3X''(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $U_1(X)$ и $U_2(X)$ обозначают вид закрепления трубопровода слева, а $U_3(X)$ и $U_4(X)$ – справа.

Удобно коэффициенты a_j и b_j записать в виде матриц

$$A = \begin{Vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим основные типы краевых условий для изгибных колебаний стержней [3, с. 153].

Краевые условия для заделки: $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, – следовательно, при этом виде закрепления коэффициенты с номерами 1 и 2 не равны нулю, а с номерами 3 и 4 равны нулю.

Краевые условия для свободного опирания: $w = 0$, $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, – коэффициенты с номерами 1 и 3 не равны нулю, а с номерами 2 и 4 равны нулю.

Краевые условия для плавающей заделки: $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0$, – коэффициенты с номерами 2 и 4 не равны нулю, а с номерами 1 и 3 равны нулю.

Кравевые условия для свободного конца: $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0$, – коэффициенты с номерами 3 и 4 не равны нулю, а с номерами 1 и 2 равню нулю.

Из краевых условий видно, что коэффициенты с номерами 1 и 4, 2 и 3 одновременно равняться нулю не могут, это означает, что ранг матриц A и B равен двум. Также мы ставим условие, что коэффициенты a_j, b_j – это вещественные неотрицательные числа.

Прямая задача. Уравнение малых свободных колебаний трубопровода с протекающей по нему жидкостью (с учётом несжимаемости жидкости) имеет следующий вид [1, с. 163]:

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + (m+\widetilde{m})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\widetilde{m}V_0\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial t} + \\ +\widetilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad p_0 = E\left(\frac{\pi r_1}{2L}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^4 - 1\right),$$

$$m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho, \quad \widetilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жёсткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и $\widetilde{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости, L — длина трубы.

Вводя обозначения $x = X/L$, $w = W/L$, запишем уравнение (3) следующим образом:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(m+\widetilde{m})L^4}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\widetilde{m}V_0L^3}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\ +\frac{\widetilde{m}L^2}{EI}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Подстановка $w(x,t) = X(x)e^{iwt}$ приводит к уравнению:

$$X^{(4)} + aX'' + 2biwX' - cw^2X = 0, \tag{5}$$

где

$$a = \frac{\widetilde{m}L^2}{EI}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right), \quad b = \frac{\widetilde{m}V_0L^3}{EI}, \quad c = \frac{(m+\widetilde{m})L^4}{EI}.$$

Введение обозначений x и w позволило нам обезразмерить переменные

$$a = \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}^2}{1} \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}^4} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 1,$$

$$w \cdot b = \frac{1}{\text{с}} \cdot \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}^3}{1} \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}^4}\right) = 1,$$

$$w^2 \cdot c = \frac{1}{\text{с}^2} \cdot \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}^4}{1} \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}^4}\right) = 1.$$

Будем рассматривать пример, в котором $a = 1$, $b = 0$ (т.к. $V_0 = 0$), $c = 1$, то есть характеристическое уравнение имеет вид:

$$X^{(4)} + X'' - w^2X = 0. \tag{6}$$

λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 – корни данного уравнения:

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4w^2}}{2}}, \\ \lambda_2 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{1+4w^2}}{2}}. \tag{7}$$

Функции

$$X_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \\ X_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \\ X_3(x) = e^{-\lambda_1 x}, \\ X_4(x) = e^{-\lambda_2 x} \tag{8}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (6). Если будут выполняться условия

$$\begin{array}{llll} X_1(0) = 1, & X_2(0) = 0, & X_3(0) = 0, & X_4(0) = 0, \\ X_1'(0) = 0, & X_2'(0) = 1, & X_3'(0) = 0, & X_4'(0) = 0, \\ X_1''(0) = 0, & X_2''(0) = 0, & X_3''(0) = 1, & X_4''(0) = 0, \\ X_1'''(0) = 0, & X_2'''(0) = 0, & X_3'''(0) = 0, & X_4'''(0) = 1, \end{array} \tag{9}$$

образуется фундаментальная система Коши. Общее решение уравнения (6) представляется в следующем виде:

$$X(x) = C_1X_1(x) + C_2X_2(x) + C_3X_3(x) + C_4X_4(x).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют условия (9):

$$X_1(x) = -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}e^{\lambda_2 x} - \\ -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_2(x) = -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1}e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2}e^{\lambda_2 x} + \\ +\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1}e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_3(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{\lambda_2 x} + \\ + \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}e^{-\lambda_2 x},$$

$$X_4(x) = \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{\lambda_2 x} - \\ - \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_1}e^{-\lambda_1 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\lambda_2}e^{-\lambda_2 x}.$$

Уравнение частот получают из условия равенства нулю характеристического определителя

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & U_1(X_2) & U_1(X_3) & U_1(X_4) \\ U_2(X_1) & U_2(X_2) & U_2(X_3) & U_2(X_4) \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & 0 & 0 & U_1(X_4) \\ 0 & U_2(X_2) & U_2(X_3) & 0 \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Результаты. Итак, рассматривая четыре типа закреплений, мы получаем 16 вариантов неупругих закреплений трубопровода. Приведём результаты расчётов в *табл.* 1 (для краткости собственные частоты приведены с точностью до 4 знаков после запятой; вычислительных экспериментах они рассматривались с точностью до 40 знаков после запятой).

Как видно из *табл.* 1, значения собственных частот одинаковы при перестановках местами закреплений на концах трубопровода, то есть случай (заделка)–(свободное опирание) идентичен случаю (свободное опирание)–(заделка). Но кроме этого частоты случая (заделка)–(свободное опирание) точно такие же, как у (свободное опирание)–(свободный конец), отличие лишь в том, что у последнего есть собственное значение $w = 0$, соответствующее собственному движению трубопровода.

Чтобы объяснить это, запишем характеристический определитель (10) в другом виде:

$$\Delta(w) = \det(C \cdot D), \quad \text{где} \quad C = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

$$D = \begin{Vmatrix} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(1) & X_2(1) & X_3(1) & X_4(1) \\ X_1'(1) & X_2'(1) & X_3'(1) & X_4'(1) \\ X_1''(1) & X_2''(1) & X_3''(1) & X_4''(1) \\ X_1'''(1) & X_2'''(1) & X_3'''(1) & X_4'''(1) \end{Vmatrix}. \quad (11)$$

Миноры четвёртого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами k_1, k_2, k_3, k_4, обозначим как $f_{k_1 k_2 k_3 k_4}$, причём $1 \le k_1 < k_2 \le 4$ и $5 \le k_3 < k_4 \le 8$. В [14, с. 134] приведены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_{1257} &= -f_{1356}, & f_{1378} &= -f_{3457}, \\ f_{1268} &= -f_{2456}, & f_{2478} &= -f_{3468}, \\ f_{1368} &= f_{2457}, & f_{1278} &= f_{3456}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти соотношения объясняют, почему значения собственных частот одинаковы при перестановках местами закреплений на концах трубопровода. Например, собственные значения для случаев (заделка)–(свободное опирание) и (свободное опирание)–(заделка) одинаковы, т.к. $f_{1257} = -f_{1356}$. Нетрудно получить и следующие зависимости:

$$\begin{aligned} w^2 f_{1356} &= f_{1378}, & w^2 f_{2456} &= f_{2478}, \\ w^2 f_{1357} &= f_{2468}, & w^4 f_{1256} &= f_{3478}. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенства (13) объясняют, почему собственные частоты могут совпадать и для случаев, когда закрепления не получаются одно из другого перестановкой их на концах. Например, собственные частоты для случая (заделка)–(заделка) совпадают с собственными частотами для случая (свободный конец)–(свободный конец), т.к. $w^4 f_{1256} = f_{3478}$, однако, для случая (заделка)–(заделка) при перестановке закреплений местами на концах трубопровода снова получается закрепление (заделка)–(заделка), а не (свободный конец)–(свободный конец).

Значения коэффициентов $a_1, \ldots, a_4$ и $b_1, \ldots, b_4$ при неупругих закреплениях, которые описаны выше, не имеют значения, т.к. $2X'(0) = 0$ и $40X'(0) = 0$ описывают один и тот же вид закрепления. Следовательно, если мы не рассматриваем упругие закрепления, для однозначной идентификации случаев заделка-свободный конец (свободный конец-заделка) и свободное опирание-плавающая заделка (плавающая заделка-свободное опирание) достаточно одной ненулевой собственной частоты. Для идентификации всех остальных случаев требуется информация о наличии или об отсутствии «частоты», равной нулю.

Ниже приводится контрпример, который показывает, что одной нулевой собственной частоты ещё недостаточно для однозначной идентификации закрепления трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах.

Контрпример 1. Пусть для обратной задачи нам известна только одна нулевая собственная частота. Как видно из *табл.* 1, решением этой задачи могут быть сразу шесть видов закреплений: (свободное опирание)–(свободный конец), (плавающая заделка)–(плавающая заделка), (плавающая заделка)–(свободный конец), (свободный конец)–(свободное опирание), (свободный конец)–(плавающая заделка), (свободный конец)–(свободный конец). Следовательно, для однозначной

Таблица 1

Собственные частоты неупругих видов закреплений

	Вид краевых условий	w=0	w_1	w_2	w_3	w_4
1	Заделка-заделка	–	22.0965	61.2983	120.4937	199.4297
2	Заделка-своб. опирание	–	15.0399	49.5337	103.7957	177.8066
3	Заделка-плав. заделка	–	5.3105	29.8140	74.1954	138.3330
4	Заделка-своб. конец	–	3.6413	21.7296	61.3240	120.4921
5	Своб. опирание-заделка	–	15.0399	49.5337	103.7957	177.8066
6	Своб. опирание-своб. опирание	–	9.3563	38.9752	88.3250	157.4129
7	Своб. опирание-плав. заделка	–	1.9028	21.7009	61.1830	120.4016
8	Своб. опирание-своб. конец	+	15.0399	49.5337	103.7957	177.8066
9	Плав. заделка-заделка	–	5.3105	29.8140	74.1954	138.3330
10	Плав. заделка-своб. опирание	–	1.9028	21.7009	61.1830	120.4016
11	Плав. заделка-плав. заделка	+	9.3563	38.9752	88.3250	157.4129
12	Плав. заделка-своб. конец	+	5.3105	29.8140	74.1954	138.3330
13	Своб. конец-заделка	–	3.6413	21.7296	61.3240	120.4921
14	Своб. конец-своб. опирание	+	15.0399	49.5337	103.7957	177.8066
15	Своб. конец-плав. заделка	+	5.3105	29.8140	74.1954	138.3330
16	Своб. конец-своб. конец	+	22.0965	61.2983	120.4937	199.4297

идентификации закрепления трубопровода необходима ещё одна ненулевая собственная частота.

Далее рассмотрим контрпример, который показывает, что одной ненулевой собственной частоты также недостаточно для однозначной идентификации закрепления трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах.

Контрпример 2. Пусть для обратной задачи нам известна только одна ненулевая собственная частота $w = 49.5337$. Из *табл.* 1 видно, что такая частота присутствует у четырёх видов закреплений: (заделка)–(свободное опирание), (свободное опирание)–(заделка), (свободное опирание)–(свободный конец), (свободный конец)–(свободное опирание). Информация о любой другой ненулевой собственной частоте не позволит решить задачу, так как эти случаи отличаются лишь «нулевой собственной частотой».

Ниже приводится контрпример, который показывает необходимость выбора для решения обратных задач собственных частот с маленькими порядковыми номерами.

Контрпример 3. Пусть для обратной задачи нам известна только одна ненулевая собственная частота $w = 3022.0844985351229277831 7$.

Решение обратной задачи приводит нас к четырём решениям: (заделка)–(заделка), (свободный конец)–(свободный конец), (заделка)–(свободный конец), (свободный конец)–(заделка). Как видно из (13), между f_{1256} и f_{1278} нет равенства. Проанализируем эти случаи на больших частотах в *табл.* 2.

Табл. 2 наглядно демонстрирует, что с возрастанием порядкового номера собственные частоты случаев (заделка)–(заделка) и (заделка)–(свободный конец) стремятся друг к другу. Такая же особенность есть и у стержней [3, с. 195].

Таким образом, для решения обратной задачи рекомендуется брать собственные частоты с маленькими порядковыми номерами.

В заключении рассмотрим контрпример, который показывает, что, добавив в рассмотрение упругие закрепления, одной ненулевой собственной частоты и информации о наличии нулевого собственного значения недостаточно для однозначной идентификации закрепления трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах.

Контрпример 4. Рассмотрим случай с коэффициентами $a_1 = 0$, $a_2 = 68.0445$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $b_1 = 14220.5201$, $b_2 = 0.7070$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$. Найдём его собственные частоты: $w_1 = 2.5596$, $w_2 = 22.0965$, $w_3 = 61.2983$, $w_4 = 120.4937$, $w_5 = 200.0777$. Из *табл.* 1 видно, что частоты w_2, w_3, w_4 совпадают с частотами w_1, w_2, w_3 случая (заделка)–(заделка), а это значит, что добавляя в рассмотрение упругие закрепления, количество собственных частот, необходимых для идентификации краевых условий, увеличивается, что и будет показано в дальнейших работах.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (грант НШ 2016.1), РФФИ (гранты 15–01–01095_ а, 14–01–97010-р_ поволжье_ а), проектом №2561 в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
2. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 254 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
4. Chu M. T., Golub G. H. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications, Oxford, University Press, 2005.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
6. Гладвелл Г. М.Л . Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.

Таблица 2

Собственные частоты закреплений заделка-заделка и заделка-свободный конец

	Заделка-заделка	Заделка-свободный конец	
		3.64130941633441526751	w_1
w_1	22.09646371751775535685	21.72957930534335074165	w_2
w_9	890.26518096816573293979	890.26518096813922268793	w_{10}
w_{14}	2074.60622259927949256833	2074.60622259927949257439	w_{15}
w_{16}	2686.51904666284439248258	2686.51904666284439248259	w_{17}
w_{17}	3022.08449853512292778317	3022.08449853512292778317	w_{18}

7. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Частотно-параметрический анализ собственных колебаний неоднородных стержней // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 588–602.
8. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. №. 11. С. 3–11.
9. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне //Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
10. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Т. 45. № 6. С. 83–89.
11. Ахтямова А. А., Ахтямов А. М. Об однозначности идентификации сосредоточенного инерционного элемента на одном из концов стержня // Вестник Башкирского университета. 2013. № 1. С. 7–10.
12. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.
13. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. Диагностирование полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. Т.46. №5. С. 29–35.
14. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
15. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная математика и техническая физика. 2008. Т. 49. №1. С. 139–147.

Поступила в редакцию 05.02.2016 г.

IDENTIFICATION OF NONELASTIC FASTENING TYPES OF PIPELINES

© A. M. Akhtyamov[1,2], V. R. Shagiev[1]*

[1] *Bashkir State University*
32, Z. Validi Str., 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2] *Mavlyutov Institute of Mechanics*
71 Oktyabrya Ave., 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (937) 345 85 59.
**Email: shagiev-vadim@mail.ru*

We consider vibrations of the pipeline filled with the liquid. The left and right ends of the pipe were fixed by one of the four types of fastening: clamping, free support, floating fixing, free end. Combinations of these fixing on the left and right ends form 16 total kinds of fastening. Previously, it has been shown that if the liquid does not flow through the pipeline, the natural frequencies of pipe bending vibrations allow us to determine precisely all kind of fastening up to the change of fastening places on the pipe ends. Identification process involves the “zero natural frequency”. The “zero natural frequency” means zero eigenvalue of corresponding eigenvalue problem. “Zero natural frequency” corresponds with the so-called natural motion, for example, the fall of the pipeline in the case of (free end)–(free end) fastening. Without information about the “zero natural frequency” it is impossible to reconstruct the change of fastening places on the pipe ends even if we know all of the natural (nonzero) frequencies of the pipe. In this article we show that knowing only one frequency and having information about whether the zero eigenvalue is a natural frequency is enough for the determination of any of the 16 fastening types up to the change of fastening places on the pipe ends. The use of one of the first natural frequencies for reconstruction purposes provides more precise identification result than the use of subsequent natural frequencies.

Keywords: *boundary conditions, natural frequencies, eigenvalues, clamping, free support, floating fixing, free end, pipeline.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Il’gamov M. A. Kolebaniya uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost’ i gaz [Vibrations of elastic shells containing liquid and gas]. Moscow: Nauka, 1969.
2. Tompson Dzh. M. T. Neustoichivosti i katastrofy v nauke i tekhnike [Instabilities and catastrophes in science and engineering]: Per. s angl. Moscow: Mir, 1985. 254 s.
3. Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. T. 1. Kolebaniya lineinykh sistem [Vibration in engineering: Handbook. Vol. 1. Vibrations of linear systems]/ Pod red. V. V. Bolotina. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 352 c.
4. Chu M. T., Golub G. H. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications, Oxford, University Press, 2005.
5. Kollatts L. Zadachi na sobstvennye znacheniya (s tekhnicheskimi prilozheniyami) [Tasks on eigenvalues (with technical applications)]. Moscow: Nauka, 1968.
6. Gladvell G. M.L . Obratnye zadachi teorii kolebanii [Tasks on inverse problem of vibration theory]. M.-Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp’yuternykh issledovanii, 2008. 608 s.
7. Akulenko L. D., Nesterov S. V. Prikladnaya matematika i mekhanika. 2003. Vol. 67. No. 4. Pp. 588–602.
8. Abzalimov R. R., Salyakhova E. V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika. 2008. No. . 11. Pp. 3–11.
9. Vatul’yan A. O., Soluyanov N. O.Defektoskopiya. 2005. No. 9. Pp. 44–56.
10. Il’gamov M. A., Khakimov A. G. Defektoskopiya. 2009. Vol. 45. No. 6. S. 83–89.
11. Akhtyamova A. A., Akhtyamov A. M. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2013. No. 1. Pp. 7–10.
12. Akhtyamov A. M. Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii [The theory of identification of boundary conditions]. Ufa: Gilem, 2008.
13. Akhtyamov A. M., Ayupova A. R. Defektoskopiya. 2010. Vol. 46. No. 5. Pp. 29–35.
14. Akhtyamov A. M. Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniya [The theory of identification of boundary conditions and its applications] Moscow: Fizmatlit, 2009.
15. Akhtyamov A. M., Safina G. F. Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika. 2008. Vol. 49. No. 1. Pp. 139–147.

Received 05.02.2016.