УДК 517.71

СИНХРОНИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА-ХОПФА

© Э. С. Имангулова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (927) 964 86 24.
Email: suyundukova89@mail.ru

В работе получены новые формулы для задачи о вынужденной синхронизации автоколебаний при действии внешней периодической силы. Обсуждается вопрос о связи свойств периодических решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа автономной системы и свойств вынужденных колебаний в системе при внешнем гармоническом воздействии, определены соотношения между параметрами систем. В качестве приложения рассмотрена задача о бифуркации периодических решений в уравнении Ван- дер-Поля.

Ключевые слова: *синхронизация, динамические системы, периодические колебания, вынужденные колебания, бифуркация, бифуркация Андронова-Хопфа, уравнение Ван-дер-Поля.*

1. Введение

Одним из фундаментальных понятий, характеризующих нелинейные динамические системы, является понятие синхронизация. Под синхронизацией обычно понимают установление определенных соотношений между параметрами системы и возникновением вследствие этого в системе незатухающих колебаний определенных периодов. В рамках классической теории различают вынужденную синхронизацию, то есть синхронизацию автоколебаний при действии внешней периодической силы, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух и более автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты синхронизации, связанные с двумя классическими механизмами: захватом собственных частот колебаний или же подавлением одной из собственных частот взаимодействующих систем.

Исследованию различных вопросов, связанных с синхронизацией в динамических системах, посвящена обширная литература; здесь предложен ряд эффективных методов исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см. [1–4] и имеющуюся там библиографию). Исследования активно продолжаются в различных направлениях (см., например, [5, 6]).

В настоящей работе предлагается новая схема исследования вынужденной синхронизации в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа, основанная на операторном методе исследования задач о бифуркациях динамических систем. Данная схема позволяет получить новые асимптотические формулы, определяющие соотношения между параметрами системы при синхронизации, приближенные формулы для возникающих колебаний, а также исследовать устойчивость возникающих колебаний.

2. Постановка задачи

Рассматривается зависящая от двух вещественных параметров α и β динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$x' = A(\alpha)x + a(x,\alpha) + \beta g(t), x \in R^N, \qquad (1)$$

в котором матрица $A(\alpha)$ и вектор функция $a(x,\alpha)$ являются гладкими по совокупности переменных, при этом $\|a(x,\alpha)\| = O(\|x\|^2)$, $x \to 0$, функция $g(t)$ является непрерывной и T_g-периодической: $g(t + +T_g) \equiv g(t)$.

При $\beta = 0$ система (1) является автономной системой

$$x' = A(\alpha)x + a(x,\alpha), x \in R^N, \qquad (2)$$

имеющей при всех значениях параметра α точку равновесия $x = 0$. Предполагается, что при некотором $\alpha = \alpha_0$ матрица $A_0 = A(\alpha_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае значение α_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (2), т.е. при переходе α через значение α_0 в системе (2), как правило, в окрестности точки $x = 0$ возникают нестационарные периодические решения $x(t,\alpha)$ с периодом $T(\alpha)$, близким к $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Бифурцирующие решения $x(t,\alpha)$ системы (2) при малых $|\alpha - \alpha_0|$ возникают (см. например, [4]), как правило, в точности в одном из трех случаев: $(S1)\ \alpha > \alpha_0$; $(S2)\ \alpha < \alpha_0$; $(S3)\ \alpha = \alpha_0$. Последний случай типичен для линейных и консервативных систем. Первые два случая имеют место при выполнении некоторого условия невырожденности относительно нелинейного слагаемого $a(x,\alpha)$ системы (2) (один из вариантов такого условия будет указан ниже). При выполнении этого условия в случаях $(S1)$ и $(S2)$ каждому α отвечает в точности один ненулевой цикл $x(t,\alpha)$ малой амплитуды, при этом функция $x(t,\alpha)$ гладко зависит от α и имеет место соотношение: $\max\limits_t \|x(t,\alpha)\|$ при $\alpha \to \alpha_0$. Наконец, период $T(\alpha)$ решений $x(t,\alpha)$ также гладко зависит от α и имеет место соотношение: $T(\alpha) \to T_0$ при $\alpha \to \alpha_0$.

Наличие вынуждающей периодической силы $\beta g(t)$, естественно, повлияет на динамику системы (1). Здесь естественным образом возникают так называемые языки Арнольда (см., например, [7]), которые можно характеризовать следующим образом. Пусть $x(t,\alpha)$ – это цикл малой амплитуды системы (2), где $\alpha > \alpha_0$ или $\alpha < \alpha_0$. В качестве новых параметров возьмем отношение периодов $\eta = T_g/T(\alpha)$ и амплитуду β внешнего сигнала. Тогда на плоскости параметров (η,β) образуется характерная структура областей режимов системы (1), которая представляет собой области синхронизации с разными соотношениями периодов. Эти области имеют вид языков, выходящих из каждого рационального числа вида p/q на оси η; соответствующим значениям параметров η и β отвечают области qT_g-периодических (как правило, длиннопериодических) режимов системы. Между языками существуют области квазипериодических режимов с иррациональным соотношением периодов.

Изучению различных вопросов, связанных с уравнениями вида (1), посвящены работы многих авторов, в которых решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см. [1–6]). В то же время в этих работах, как правило, не обсуждается вопрос о взаимосвязи свойств периодических решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа системы (2) и свойств вынужденных колебаний в системе (1). В настоящей статье основное внимание уделяется именно этому вопросу: в ней, в частности, определяются соотношения между параметрами α и β системы (1), при которых в малой окрестности периодического решения $x(t,\alpha)$ периода $T(\alpha)$ системы (2) возникает периодическое решение $\tilde{x}(t,\alpha,\beta)$ системы (1) периода T_g.

3. Вспомогательные построения

Будем считать, что нелинейность $a(x,\alpha)$ в системе (1) является функцией класса C^4 в окрестности точки $(0,\alpha_0)$ и представима в виде:

$$a(x,\alpha) = a_2(x,\alpha) + a_3(x,\alpha) + a_4(x,\alpha); \qquad (3)$$

здесь $a_2(x,\alpha)$ и $a_3(x,\alpha)$ содержат квадратичные и кубические по x слагаемые соответственно, а нелинейность $a_4(x,\alpha)$ удовлетворяет соотношению $a_4(x,\alpha) = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Так как матрица A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e+ig) = i\omega_0(e+ig),$$
$$A_0^*(e^*+ig^*) = -i\omega_0(e^*+ig^*);$$

здесь A_0^* – транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1, (e,e^*) = (g,g^*) = 1,$$
$$(e,g^*) = (g,e^*) = 0. \qquad (4)$$

Ниже будем считать, что векторы e, g, e^*, g^* выбраны в соответствии с равенствами (4). Положим

$$\gamma_1 = (A'e,e^*) + (A'g,g^*),$$
$$\gamma_2 = (A'e,g^*) - (A'g,e^*); \qquad (5)$$

здесь $A' = A'(\alpha_0)$. Можно показать, что числа (5) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (4).

В [8] установлена

Теорема 1. Пусть матрица $A(\alpha_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда число α_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (2).

Всюду ниже условие $\gamma_1 \neq 0$ будем считать выполненным.

Далее для простаты будем считать, что система (1) является двумерной, т.е. $N = 2$. Положим

$$e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t,$$
$$f_3(t) = T_0 a_3(e(t),\alpha_0) +$$
$$+T_0F_2(t)\int_0^t e^{-\tau T_0A_0} a_2(e(\tau),\alpha_0)d\tau,$$

где $F_2(t) = T_0 a'_{2x}(e(t),\alpha_0)e^{T_0A_0t}$; здесь $a'_{2x}(x,\alpha_0)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x,\alpha)$.

Положим далее:

$$b_3 = \int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} f_3(t)dt.$$

Наконец, положим

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(b_3,e^*),$$
$$T_2 = \frac{1}{\omega_0}\left[(b_3,g^*) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(b_3,e^*)\right]. \qquad (6)$$

Числа (6) не зависят от выбора векторов e, g, e^*, g^* в соответствии с равенствами (4).

В [8] установлена

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 выполнено соотношение:* $\alpha_2 \neq 0$. *Тогда существуют число* $\varepsilon_0 > 0$ *и определенные при* $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ *функции*

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$
$$T(\varepsilon) = T_0 + T_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \qquad (7)$$

такие, что при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ система (2) имеет непостоянное периодическое решение $x = x(t,\varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$; начальное значение $x_0(\varepsilon) = x(0,\varepsilon)$ этого решения представимо в виде $x_0(\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^3)$. При этом существуют окрестность G точки $x = 0$ и интервал $(\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0)$ такие, что для каждого $\alpha \in (\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0)$ единственными непостоянными периодическими решениями системы (2), орбиты которых лежат в G, являются члены семейства $x(t,\varepsilon)$, для которых $\alpha(\varepsilon) = \alpha$.

В частности, если $\alpha_2 > 0$ ($\alpha_2 < 0$), то бифуркационные решения системы (2) существуют только при $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$).

В важном частном случае, когда в нелинейности (3) отсутствует квадратичное слагаемое, т.е. $a_2(x,\alpha) \equiv 0$, формулы (6) существенно упрощаются; в них следует взять:

$$b_3 = T_0\int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} a_3(e(t),\alpha_0)dt.$$

4. Основные результаты

Как было отмечено выше, динамика системы (1) в окрестности точки $x = 0$ при малых $|\alpha - \alpha_0|$ и $|\beta|$ существенно зависит от того, каким является отношение $T_g/T(\alpha)$ и, соответственно, близкое к нему отношение T_g/T_0. Ниже будет рассматриваться ситуация, когда число T_g/T_0 является целым, т.е. $T_g = kT_0$ при некотором натуральном k. Другими словами, пусть $\omega_0 = 2\pi k/T_g$.

Можно считать, что матрица A_0 имеет вид:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда в качестве векторов $e, g, e^*, g^* \in R^2$ можно взять векторы:

$$e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Положим

$$u_0 = \int_0^{T_0} e^{(T_0 - s)A_0} g(s) ds \qquad (9)$$

и всюду ниже будем считать, что $u_0 \neq 0$.

Пусть $x = x(t, \varepsilon)$ – это периодическое решение системы (2) в условиях теоремы 2. Через $\gamma(\varepsilon)$ будем обозначать соответствующий цикл этой системы. Ниже основное внимание будет уделяться двум задачам.

Первая задача связана с выяснением соотношений между параметрами α и β системы (1), при которых в малой окрестности точки $x(0, \varepsilon)$ цикла $\gamma(\varepsilon)$ существует точка $\tilde{x}(\varepsilon)$ (так, что $\|x(0, \varepsilon) - \tilde{x}(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$), являющаяся начальной для T_g-периодического решения $\tilde{x}(t, \alpha, \beta)$ системы (1).

Согласно теореме 2 периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ системы (2) возникает при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Вторая задача связана с определением функции $\beta = \beta(\varepsilon)$ и такой точки $\tilde{x}(\varepsilon)$ вблизи цикла $x(t, \varepsilon)$, которая является начальной для T_g-периодического решения $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ системы (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$.

Другими словами, первая задача связана с выяснением вопроса о том, при каких значениях параметров α и β в окрестности данной точки цикла $\gamma(\varepsilon)$ при $t = 0$ проходит T_g-периодическое решение системы (1). Вторая задача является в естественном смысле двойственной к первой: в ней ищется такая точка цикла $\gamma(\varepsilon)$, что в ее окрестности при $t = 0$ проходит T_g -периодическое решение системы (1) при том же значении параметра α, при котором автономная система (2) имеет цикл $\gamma(\varepsilon)$.

4.1. Первая задача. Определим число

$$\rho = \frac{T_g}{2}[(u_0, g^*)\gamma_1 - (u_0, e^*)\gamma_2] \qquad (10)$$

и функционалы

$$\rho_1(x) = (x, g^*)(u_0, e^*) - -(x, e^*)(u_0, g^*),$$

$$\rho_2(x) = \frac{T_g}{2}[(x, e^*)\gamma_2 - (x, g^*)\gamma_1].$$

Теорема 3. Пусть $T_0 = T_g$, т.е. $\omega_0 = 2\pi/T_g$. Пусть $\rho \neq 0$. Тогда система (1) имеет T_g- периодическое решение $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$, где

$$\begin{gathered} \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \tilde{\alpha}_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2), \\ \beta(\varepsilon) = \tilde{\beta}_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^3), \end{gathered} \qquad (11)$$

и

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\rho_1(b_3)}{\rho}, \tilde{\beta}_3 = \frac{\rho_2(b_3)}{\rho}, \qquad (12)$$

а векторы $\tilde{x}(\varepsilon) = \tilde{x}(0, \varepsilon)$ представляется в виде:

$$\tilde{x}(\varepsilon) = \varepsilon e + e_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^2), \qquad (13)$$

где $e_2 = \tilde{\alpha}_2 e + \tilde{\beta}_3 g$.

Числа (10) и (12), вообще говоря, зависят от выбора векторов e^* и g^*. Поэтому, в частности, определенные равенствами (6) и (12) числа α_2 и $\tilde{\alpha}_2$, вообще говоря, различны; они могут быть даже разных знаков. Следовательно, говоря о синхронизации периодических колебаний в окрестности цикла $\gamma(\varepsilon)$ системы (2) в условиях теоремы 3 следует помнить, что этому циклу и T_g-периодическому решению $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ системы (1) соответствуют разные значения параметра α.

4.2. Вторая задача. Положим $\zeta_1 = (u_0, e^*)$ и $\zeta_2 = (u_0, g^*)$. Тогда $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 0$ и, следовательно, уравнение

$$\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0$$

имеет на промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ в точности два решения; пусть $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$ – эти решения.

Положим

$$\begin{gathered} e_0 = e\cos\varphi_0 + g\sin\varphi_0, \\ g_0 = g\cos\varphi_0 - e\sin\varphi_0, \end{gathered} \qquad (14)$$

$$\begin{gathered} e_0^* = e^*\cos\varphi_0 + g^*\sin\varphi_0, \\ g_0^* = g^*\cos\varphi_0 - e^*\sin\varphi_0. \end{gathered} \qquad (15)$$

В силу выбора (8) эти векторы при любом значении φ удовлетворяют равенствам (4). При этом $(u_0, e_0^*) = 0$ и $(u_0, g_0^*) \neq 0$. В частности, число (10) здесь является ненулевым.

Положим

$$\beta_3 = \frac{(b_3, e_0^*)\gamma_2 - (b_3, g_0^*)\gamma_1}{(u_0, g_0^*)\gamma_1}. \qquad (16)$$

Теорема 4. Пусть $T_0 = T_g$, т.е. $\omega_0 = 2\pi/T_g$. Пусть $\alpha_2 \neq 0$. Тогда в условиях теоремы 1 существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функции

$$\begin{gathered} \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \\ \beta(\varepsilon) = \beta_3 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5), \end{gathered}$$

при этом функция $\alpha(\varepsilon)$ совпадает с первой из функций (7), и такие, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ система (1) имеет единственное периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ периода T_g, начальное значение $x_0(\varepsilon) = x(0, \varepsilon)$ которого представимо в виде $x_0(\varepsilon) = \varepsilon e_0 + O(\varepsilon^3)$.

В условиях этой теоремы можно говорить о синхронизации периодических колебаний в следующем смысле. Если в правой части автономной системы (2) добавить малую периодическую добавку $\beta g(t)$, то периодические решения системы (1) подстраивают свой период $T(\varepsilon)$ под период T_g внешнего воздействия. При этом синхронизация происходит при значениях амплитуды β внешнего воздействия, связанных со значениями параметра α соотношением:

$$\beta = \beta_3 \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_2}\right)^{3/2} + O\left((\alpha - \alpha_0)^{5/2}\right),$$

где $\alpha > \alpha_0$, если $\alpha_2 > 0$, и $\alpha < \alpha_0$, если $\alpha_2 < 0$.

Аналогичные утверждения могут быть получены для случая, когда $T_g = kT_0$ при некотором натуральном k, а также для ситуаций, когда период T_g мало отличается от T_0 или T_g мало отличается от kT_0.

5. Уравнение Ван-дер-Поля

В качестве приложения рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля (см. например, [1, 2]) вида:

$$y'' + (y^2 - \alpha)y' + y = \beta\cos t. \qquad (17)$$

При $\beta = 0$ уравнение (17) является автономным

$$y'' + (y^2 - \alpha)y' + y = 0, \qquad (18)$$

имеющим при всех значениях параметра α точку равновесия $y = 0$.

Стандартная замена $u_1 = y$, $u_2 = y'$ сводит это уравнение к системе вида (1):

$$u' = A(\alpha)u + a_3(u) + \beta g(t), u \in R^2, \qquad (19)$$

где

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, a_3(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1^2 u_2 \end{bmatrix},$$
$$g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

При $\alpha = 0$ матрица $A(\alpha)$ имеет собственное значение $\pm i$. Таким образом, в уравнении (19) имеем $\omega_0 = 1$, $\alpha_0 = 0$ и $T_0 = 2\pi$. В качестве векторов e, g, e^*, g^* здесь можно взять векторы
$$e = e^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g = g^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисления показывают, что в нашем примере числа (5) здесь равны: $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены; следовательно, число $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (18), т.е. при переходе α через значение $\alpha = 0$ в окрестности точки $y = 0$ у уравнения (18) возникают нестационарные периодические решения $y(t, \alpha)$ с периодом $T(\alpha)$, близким к $T_0 = 2\pi$.

Для уравнения (19) имеем $T_g = T_0 = 2\pi$, $\omega_0 = 1$. Вычисляя числа (6) и (12), получим:
$$\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{4}, T_2 = 0, \tilde{\beta}_3 = 0.$$

Таким образом, бифуркация в уравнении (18) происходит при $\alpha > 0$. При этом функции (7) и решение здесь имеют вид:
$$\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{4}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$
$$T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon^4), u(\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^2).$$

Вычисляя значение β_3 по формуле (16) получим, что $\beta_3 = 0$. Более детальное вычисления показывает, что функция $\beta(\varepsilon)$ имеет вид
$$\beta(\varepsilon) = \beta_5 \varepsilon^5 + O(\varepsilon^7),$$
где $\beta_5 \neq 0$. Следовательно, для уравнения Ван-дер-Поля синхронизация происходит при значениях параметра β: $\beta = \beta_5 (4\alpha)^{5/2} + O(\alpha)^{7/2}$.

6. Доказательство основных утверждений

6.1. Доказательство теоремы 3. Периодические решения системы (1) определяются из операторного уравнения
$$x_0 = e^{A(\alpha)T_0} x_0 + \\ + e^{A(\alpha)T_0} \int_0^{T_0} e^{-A(\alpha)s} a(x(s, x_0), \alpha)) + \\ + \beta g(s)) ds, x_0 \in R^N, \tag{20}$$
где x_0 – неизвестный вектор, $x(t, x_0)$ – решение задачи Коши для дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(0, x_0) = x_0$. Если x_0-решение уравнения (20), то функция $x(t, x_0)$ будет T_0-периодическим решением уравнения (1).

Полагая
$$B(\alpha) = e^{A(\alpha)T_0}, b(x_0, \alpha) = \\ = \int_0^{T_0} e^{(T_0 - s)A(\alpha)} a(x(s, x_0), \alpha) ds,$$
$$u(\alpha, \beta) = \beta \int_0^{T_0} e^{(T_0 - s)A(\alpha)} g(s) ds,$$
придем к следующему операторному уравнению
$$x_0 = B(\alpha)x_0 + b(x_0, \alpha) + u(\alpha, \beta), \\ x_0 \in R^N. \tag{21}$$

Так как матрица $A(\alpha_0)$ имеет собственное значение $\pm i\omega_0$, то оператор $B(\alpha_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Оператор $b(x_0, \alpha)$ представляется в виде:
$$b(x_0, \alpha) = b_2(x_0, \alpha) + b_3(x_0, \alpha) + b_4(x_0, \alpha),$$
здесь $b_2(x_0, \alpha)$ и $b_3(x_0, \alpha)$ содержат квадратичные и кубические по x_0 слагаемые соответственно, а нелинейность $b_4(x_0, \alpha)$ удовлетворяет соотношению $b_4(x_0, \alpha) = O(\|x_0\|^4)$ при $x_0 \to 0$.

Вектор $u(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношениям: $u(\alpha, 0) \equiv 0$, $u'_\beta(\alpha_0, 0) \neq 0$; последнее следует из того, что $u'_\beta(\alpha_0, 0) = u_0$ (см. (9)) и предположения, что $u_0 \neq 0$.

Таким образом, для операторного уравнения (21) выполняются все условия теоремы 3 (см. [9]). Поэтому для изучения локальных бифуркаций в уравнении (21) можно использовать предложенный в [9] метод функцианализации параметра. Применение этого метода и приводит к формулам (11)–(13) и к доказательству теоремы 3.

6.2. Доказательство теоремы 4. Формулы (11)–(13) получены для произвольного набора векторов e, g, e^*, g^*. Выбирая теперь эти векторы в виде (14) и (15) получим, что первая из формул (11) совпадает с первой из формул (7). При этом число $\tilde{\beta}_3$ во второй из формул (11) представляется в виде (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. С. 560.
2. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009. 548 с.
3. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N. Y.:Springer, 1998.
4. Марсден Дж., М.Мак-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее прило-жения. М., Мир, 1980.
5. Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртус Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
6. Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля. //Нелинейная динамика. Т. 7. №3. 2011. С. 411–425.
7. Юмагулов М. Г. Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем. //Уфимский математический журнал, Т. 5. №2. 2013. С. 109–131.
8. Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал, 2010. Т.2. №4. С. 3–26.
9. Суюндукова Э. С. Функцианализация параметра в задаче о седло-узловых бифуркациях многопараметрических динамических систем. // Вестник Пермского университета Математика. Механика. Информатика. Вып. 4 №27. 2014. С. 10–15.

Поступила в редакцию 27.02.2017 г.

SYNCHRONIZATION OF PERIODIC OSCILLATIONS IN A PROBLEM ON ANDRONOV-HOPF BIFURCATION

© E. S. Imangulova

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (927) 964 89 24.
Email: suyundukova89@mail.ru

The author of the work proposes a new technique to study the forced synchronization of periodic oscillations, which occur as a result of Andronov-Hopf bifurcation. The main objective of the study is an autonomous system exposed to the impact of external periodic force of minor amplitude. Subjected to synchronization, minor auto-oscillations adjust their period to the one of the external impact. Sufficient signs of such synchronization were obtained and new formulae for the major asymptotes (in the minor parameter ratio) of bifurcation solutions for determining of stability conditions of the periodic oscillations were derived. In the work, the connection between the nature of periodic solutions in the problem of Andronov-Hopf bifurcation of the initial autonomous system and the nature of forced oscillations occurring as a result of synchronization is considered. The relationship between the corresponding system parameters was determined. In addition, the author considers the problem of periodic oscillation synchronization of the autonomous generator of Van der Paul under external harmonic impact. As a result, new formulae for calculation of arising oscillations as well as for the corresponding parameter consequence were obtained. The proposed technique for studying the problem of periodic oscillations synchronization is based on topological and qualitative methods of studying of local bifurcation problems. The main role here is given to the parameter functionalizing method proposed by M. A. Krasnoselsky to study nonlinear problems including coherent continua of solutions. In this work, the author proposes substantiation of this method to study the problem of periodic oscillations synchronization.

Keywords: synchronization, dynamical system, periodic oscillations, forced oscillations, bifurcation, Andronov-Hopf bifurcation, Van der Pol equation.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Gukenkheimer Dzh., Kholms F. Nelineinye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkatsii vektornykh polei [Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields]. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii. 2002. Pp. 560.
2. Shil'nikov L. P., Shil'nikov A. L., Turaev D. V., Chua L. Metody kachestvennoi teorii v nelineinoi dinamike. Chast' 2 [The methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Pt. 2]. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii. 2009.
3. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N. Y.:Springer, 1998.
4. Marsden Dzh., M.Mak-Kraken. Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilo-zheniya [Bifurcation of beginning of a cycle and its applications]. M., Mir, 1980.
5. Pikovskii A. S., Rozenblyum M. G., Kurtus Yu. Sinkhronizatsiya. Fundamental'noe nelineinoe yavlenie [Synchronization. Fundamental nonlinear phenomenon]. Moscow: Tekhnosfera, 2003.
6. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Tyuryukina L. V.Nelineinaya dinamika. Vol. 7. No. 3. 2011. Pp. 411–425.
7. Yumagulov M. G.Ufimskii matematicheskii zhurnal, T. 5. No. 2. 2013. Pp. 109–131.
8. Vyshinskii A. A., Ibragimova L. S., Murtazina S. A., Yumagulov M. G. Ufimskii matematicheskii zhurnal, 2010. Vol. 2. No. 4. Pp. 3–26.
9. Suyundukova E. S. Vestnik Permskogo universiteta Matematika. Mekhanika. Informatika. No. 4 No. 27. 2014. Pp. 10–15.

Received 27.02.2017.