

УДК 532.5.013+536.24+519.6

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ПРИ КОНВЕКЦИИ  
АНОМАЛЬНО ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**© В. С. Кулешов<sup>1\*</sup>, К. В. Моисеев<sup>1,2</sup>, С. Ф. Урманчиев<sup>1,3</sup><sup>1</sup>Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН  
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. октября, 71.<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450062 г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.<sup>3</sup>Башкирский государственный университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 235 52 55.

\*Email: kuleshovvs@gmail.com

*Для исследования гидродинамических особенностей течений, возникающих при термо-гравитационной конвекции аномально термовязкой жидкости в замкнутой квадратной полости, используется математическая модель, базирующаяся на уравнениях динамики сплошной среды и записанная в приближение Обербека-Буссинеска с учетом температурной зависимости вязкости. По методу контрольного объема и алгоритма SIMPLE с применением многопроцессорных технологий реализован вычислительный код. Исследовано влияние параметров аномалии на характер конвективного течения жидкости. Показано влияние сформировавшихся микровихрей на динамику течения при нестационарных автоколебательных режимах.*

**Ключевые слова:** *тепломассоперенос, свободная конвекция, аномально вязкая жидкость, термовязкая жидкость, вязкий барьер.*

**Введение**

В настоящее время в нефтедобыче растет доля тяжелой, высокосернистой и аномально вязкой нефти, вязкость которой в достаточной мере чувствительна к изменению температуры. В связи с этим вопрос об оптимальности существующих технологических режимов транспортировки, хранения и переработки сред с аномалией вязкости по температуре и скорости сдвига является актуальным.

Динамические особенности реологически сложных жидкостей впервые были изучены при течении в плоском [1] и в цилиндрическом каналах [2, 3]. В этих работах представлены результаты исследований течения жидкости с немонотонной температурной зависимостью вязкости, связанные с влиянием перераспределения поля температур на картину течения и расходные характеристики. Задача о термо-гравитационной конвекции жидкости в плоской ячейке с немонотонной зависимостью вязкости от температуры была рассмотрена в работе [4]. Отметим, что в данной работе исследовалось влияние квадратичной зависимости вязкости от температуры с параметром отношения вязкостей на глобальную картину течения и теплообмен на изотермических стенках.

Настоящая работа является продолжением исследования [5], где авторы поставили перед собой вопрос о влиянии параметров колоколообразной зависимости вязкости от температуры на режимы течения и интегральные коэффициенты теплоотдачи в плоской ячейке, где в качестве модельной рассмотрена жидкость с немонотонной зависимостью вязкости от температуры, описываемой гауссовской кри-

вой, определяющей общий характер изменения вязкости жидкой серы и высоковязкой нефти с учетом двух параметров аномалии: отношение вязкостей –  $A$  и область заполнения –  $B$  [1].

В работе [5] отмечалось влияние «вязкого барьера» на картину течений. Было установлено, что при  $B = 10^3$  и малых значениях параметра  $A$  ( $1 \leq A < 300$ ) наблюдается стационарный режим. Далее, с ростом величины  $A$  происходит формирование третичных микровихрей, расположенных примерно на высоте  $y \approx 0.2$  и  $y \approx 0.8$ , которые увеличиваются с ростом  $A$ .

В настоящей работе численно исследуется термо-гравитационная конвекция аномально термовязкой жидкости в квадратной полости с вертикальными адиабатическими и горизонтальными изотермическими стенками. Представлены результаты моделирования при  $300 \leq A < 3450$

**Математическая постановка задачи**

В настоящей работе исследуется термо-гравитационное течение жидкости в квадратной полости со стороной  $L$ . На всех стенках области для продольной и поперечной составляющих скорости задаются условия прилипания. Нижняя и верхняя границы области считаются изотермическими: на нижней стенке поддерживается постоянная температура  $T_H$  (hot – горячая стенка), а на верхней  $T_C$  (cold – холодная стенка), при этом считается  $T_H > T_C$ , две вертикальные стенки считаются адиабатическими; рассматриваемая жидкость является несжимаемой и ньютоновской с температурной аномалией вязкости.

Система нелинейных дифференциальных уравнений тепловой конвекции, записанная в приближе-

нии Обербека-Буссинеска [6] и описывающая конвективное движение жидкости, находящейся в однородном поле силы тяжести, в двумерном случае может быть представлена в безразмерном виде и включает в себя следующие уравнения:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

- уравнения импульсов

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \cdot u - 2 \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \cdot v - \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \cdot v - \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \cdot v - 2 \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \mu(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \theta; \quad (3) \end{aligned}$$

- уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u \cdot \theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot \theta)}{\partial y} = (\text{Pr} \cdot \text{Ra})^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

где  $u$  и  $v$  – продольная и поперечная составляющие вектора скорости в прямоугольной ортогональной системе координат  $x, y$ ;  $t$  – время;  $p$  – отклонение от гидростатического давления;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $\theta$  – безразмерная температура;  $\text{Pr}$  и  $\text{Ra}$  – безразмерные числа Прандтля и Рэлея соответственно.

Переход от размерных к безразмерным величинам в системе уравнений (1)–(4) осуществляется при помощи следующих соотношений (звездочкой помечены размерные величины):  $L$  – линейный размер области;  $v_0 = (g\beta L \Delta T)^{\frac{1}{2}}$  – скорость;  $t = L / v_0$  – время;  $p_0 = \rho_0 v_0^2$  – давление; числа  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$  и  $\text{Ra} = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\alpha \nu}$  определяются соответственно [6, 7]. Здесь  $g$  – ускорение свободного падения;  $\nu, \alpha, \beta, \rho$  – кинематическая вязкость, температуропроводность, коэффициент теплового расширения и плотность соответственно, определяемые при равновесной температуре  $T_0 = (T_H + T_C) / 2$ ;  $\Delta T = T_H - T_C$ . Безразмерная температура определяется как:  $\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C}$ . Следует отметить, что теплофизические переменные, за исключением вязкости, не зависят от температуры.

В настоящей работе рассматривается движение модельной жидкости, вязкость которой описывается гауссовской кривой и представляется в следующем безразмерном виде:

$$\mu(\theta) = 1 + Ae^{-B\theta^2}, \quad (5)$$

где  $A = \mu_{\max} / \mu_{\min} - 1$  и  $B$  – параметры аномалии жидкости.

Рассматриваемая задача (1)–(5) в первоначальный момент времени находится в невозмущенном состоянии и определяется при средней температуре  $T_0$ :

$$u|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 0, \theta|_{t=0} = \theta_0 = 0. \quad (6)$$

На границах расчетной области для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости задается условие прилипания, на адиабатических – условия Неймана, а на изотермических – постоянная температура:

- на левой границе ( $x = 0$ )

$$u|_{x=0} = 0, v|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

- на нижней границе ( $y = 0$ )

$$u|_{y=0} = 0, v|_{y=0} = 0, \theta|_{y=0} = \theta_H = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

- на правой границе ( $x = 1$ )

$$u|_{x=1} = 0, v|_{x=1} = 0, \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (9)$$

- на верхней границе ( $y = 1$ )

$$u|_{y=1} = 0, v|_{y=1} = 0, \theta|_{y=1} = \theta_C = -\frac{1}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, система уравнений (1)–(5) с начальными условиями (6) и граничными условиями (7)–(10) описывает процесс конвективного течения ньютоновской аномально термовязкой жидкости, находящейся в однородном поле силы тяжести, в квадратной области.

### Численный метод

Для численного решения сформулированной задачи (1)–(10) используется предложенный в работе [8] неявный метод контрольного объема с применением процедуры SIMPLE для расчета поля давления. В вычислениях используется двухточечная аппроксимация нестационарных членов уравнений (2)–(4), что обеспечивает второй порядок точности по времени [9]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{3\varphi^{n+1} - 4\varphi^n + \varphi^{n-1}}{2\Delta t},$$

где индекс  $n + 1$  обозначает новые значения физической переменной  $\varphi = (u, v, \theta)$ ;  $n$  – в текущий и  $n - 1$  в предыдущий момент времени.

Физические величины на твердой поверхности аппроксимируются с помощью полинома второй степени, и соответственно имеют второй порядок точности по пространственной координате, а для определения значений физических переменных на гранях контрольного объема применяются кубические сплайны [10].

Таким образом, численная схема обладает вторым порядком как по пространственной координате, так и по времени. Сходимость используемого метода и расчетной схемы представлена в работе [5].

### Результаты моделирования

Результаты численного моделирования естественной конвекция термовязкой жидкости получены на суперкомпьютере Уфимского государственного авиационного технического университета [12]

на сетке размером  $100 \times 100$  узлов и шагом интегрирования по времени  $\Delta t = 10^{-4}$ .

В рамках настоящего исследования установлено, что периодический режим наблюдается в диапазоне  $300 \leq A < 3450$ , при этом третичные вихри сосредоточены преимущественно на периферии у границ ячейки.

Наряду с этим возникает вопрос об эволюции вторичных и третичных вихрей в зависимости от параметров задачи. Интерес к этому мотивируется еще и тем обстоятельством, что в классической гидродинамической задаче о каверне (о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости с движущейся крышкой) аналогичный вопрос является важнейшим пунктом исследований и даже предметом острой дискуссии [13].

На рис. 1–3 представлены результаты вычислительных экспериментов, где интенсивность цвета характеризует распределение вязкости в области, наиболее контрастный цвет соответствует максимальному значению вязкости, а менее контрастный – минимальному.

Начиная с  $A = 300$  третичные вихри становятся сопоставимы с вторичными вихрями, расположенными в левом верхнем и правом нижнем углах. Данные вторичные и третичные вихри вращаются пульсационно, тем самым разгоняя и приводя в движение центральную область ячейки (выделенные фрагменты на рис. 1). Следует отметить, что подобная динамика вихрей наблюдается в диапазоне  $300 \leq A < 1200$ . Для этого диапазона характерно динамическое изменение микровихрей, что приводит к

перестройке поля температуры в центральной области и к формированию обширной зоны вязкого барьера, как это показано на рис. 1.

При этом вязкий барьер вращается вместе с глобальным течением и периодически изменяет свою форму от двухсвязной (рис. 1а, б) к зигзагообразной (рис. 1в). С ростом параметра  $A$  во время формирования обширной зоны аномалии происходит исчезновение третичных микровихрей и уменьшение в размерах вторичных вихрей с сопутствующим увеличением основного вихря. Следует отметить, что с момента формирования третичных микровихрей происходит поджатие слоя повышенной вязкости.

Начиная с  $A = 1200$  образуются дополнительные вихревые структуры, локализующиеся в средней зоне ячейки и расположенные по разные стороны «вязкого барьера», которые двигаются в основном течении по замкнутой круговой траектории подобно спутникам (выделены кругами на рис. 2). При этом с ростом параметра  $A$  наблюдается качественный рост вихрей в средней зоне ячейки (рис. 3). При установлении периодического режима в заданном интервале параметра  $A$  интенсивность теплообмена имеет ярко выраженный немонотонный характер, о чем свидетельствует осредненное по времени значение числа Нуссельта во всей области (рис. 4). На данном рисунке видно что, с ростом параметра  $A$  примерно до значения 2750, интенсивность теплообмена уменьшается, при дальнейшем же росте – резко увеличивается.

### Заключение

В представленной работе проведено численное исследование свободной конвекции аномально тер-

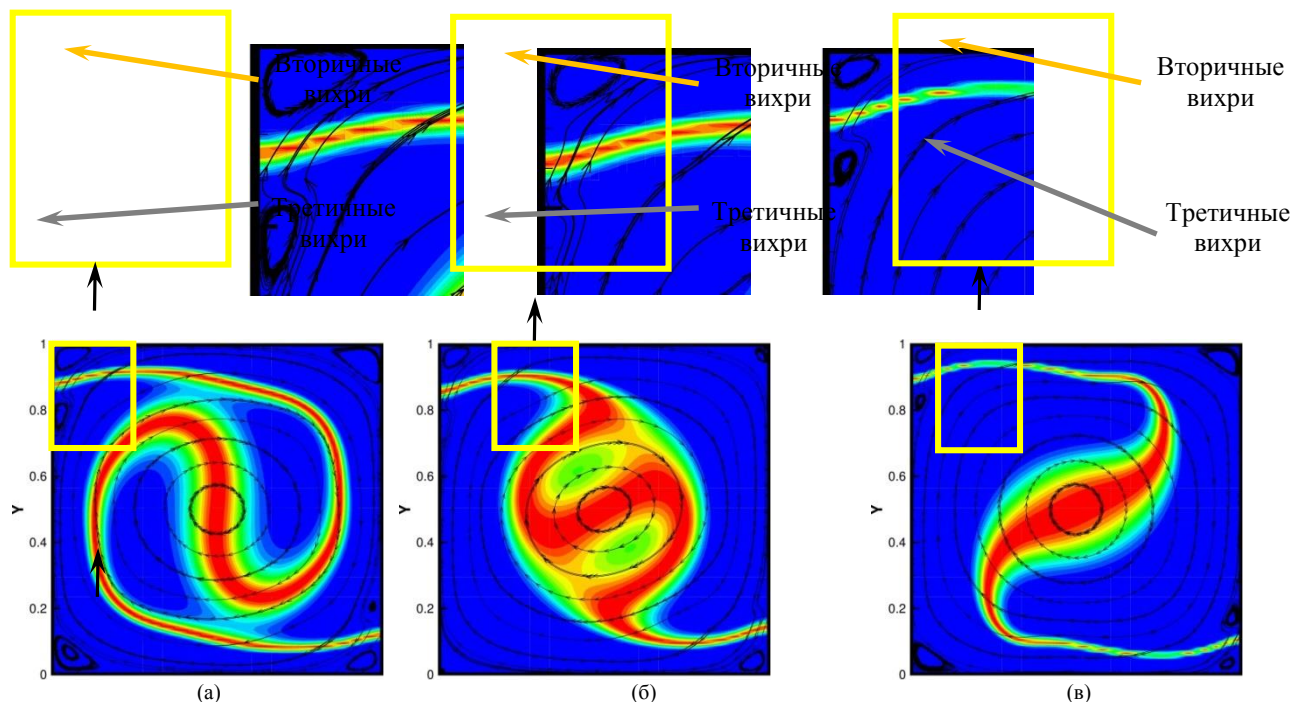


Рис. 1. Распределение вязкости и линии тока в квадратной ячейке при  $A = 10^3$ ,  $B = 10^3$ ,  $Pr = 0.1$ ,  $Ra = 10^6$  в разные моменты времени: (а) –  $t = 991$ , (б) –  $t = 994$ , (в) –  $t = 997$ .

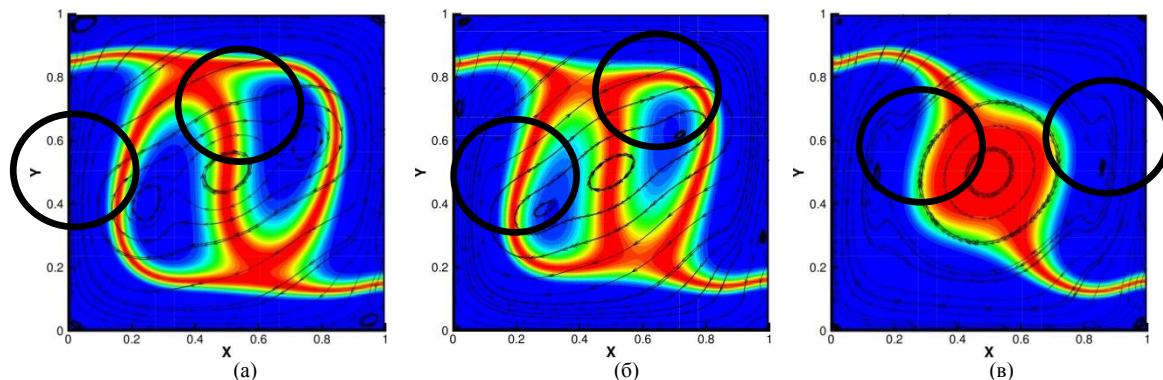


Рис. 2. Распределение вязкости и линии тока в квадратной ячейке при  $A = 2 \cdot 10^3$ ,  $B = 10^3$ ,  $Pr = 0.1$ ,  $Ra = 10^6$  в разные моменты времени: (а) –  $t = 991$ , (б) –  $t = 994$ , (в) –  $t = 997$ .

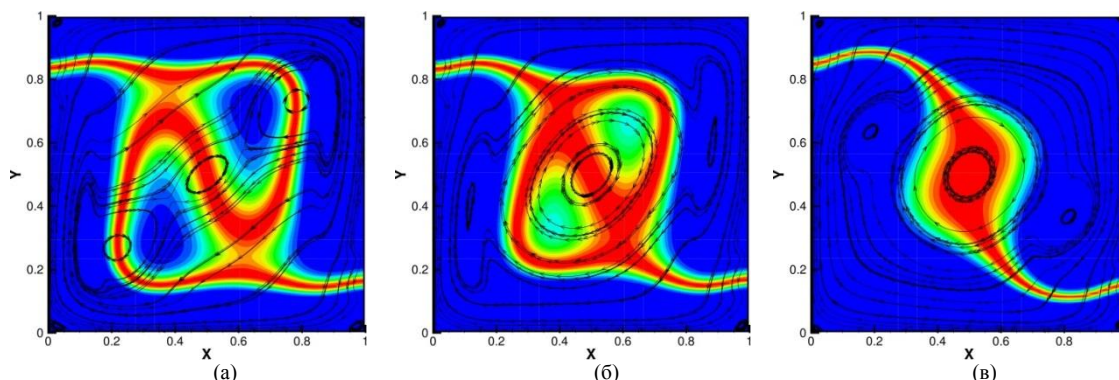


Рис. 3. Распределение вязкости и линии тока в квадратной ячейке при  $A = 3 \cdot 10^3$ ,  $B = 10^3$ ,  $Pr = 0.1$ ,  $Ra = 10^6$  в разные моменты времени: (а) –  $t = 991$ , (б) –  $t = 994$ , (в) –  $t = 997$ .

мовязкой жидкости в плоской ячейке. Результаты получены с помощью метода контрольного объема по алгоритму SIMPLE. Изучены влияние параметров аномалии вязкости на режимы конвективных течений и интегральные коэффициенты теплоотдачи в плоской ячейке, подогреваемой снизу, с вертикальными теплоизолированными границами. Обнаружены области параметров, при которых «вязкий барьер», оказывает влияние на структуру течения. Установлен механизм смены стационарного режима течения на периодический ( $A \approx 300$ ) – формирование третичных микровихрей, сосредоточенных преимущественно на периферии у границ ячейки. Следует отметить, что при  $1200 \leq A < 3450$  образуются дополнительные вихри, локализованные в средней зоне ячейки и расположенные по разные стороны «вязкого барьера». При установлении периодического режима в заданном интервале параметра  $A$  интенсивность теплообмена имеет ярко выраженный немонотонный характер.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14–08–97060-р\_поволжье\_a) и Программы фундаментальных исследований ОЭМПУ РАН № 13 «Динамика формирования и взаимодействия волн и вихрей в сплошных средах» под руководством академика Куликовского А. Г.

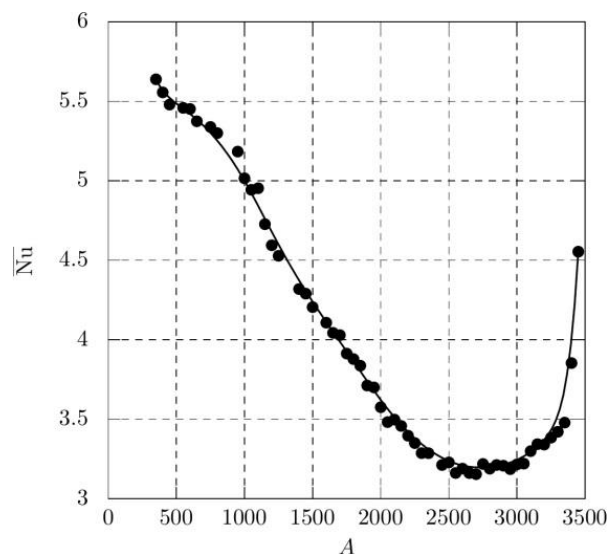


Рис. 4. Зависимость осредненного числа Нуссельта от параметра  $A$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Урманчев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, №2. С. 204–207.

2. Хизбуллина С. Ф. Численное исследование течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры // Вестник Башкирского университета. 2006. №2. С. 22–25.
3. Хизбуллина С. Ф., Урманчиев С. Ф., Киреев В. Н. Математическое моделирование течения anomalно термовязкой жидкости в цилиндрическом канале // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: в 8 томах. Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. М.: Издательский дом МЭИ. 2006. С. 145–148.
4. Ильясов А. М., Моисеев К. В., Урманчиев С. Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сиб. журн. индустр. матем. 2005. Т. 8, №4. С. 51–59.
5. Кулешов В. С., Моисеев К. В. Численное моделирование конвективных течений anomalно термовязкой жидкости // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, №2(72). С. 74–80.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972. 392 с.
7. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 248 с.
8. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергофизмат. 1984. 152 с.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир. 1990. 384 с.
10. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. 432 с.
11. Библиотека решателей (High performance preconditioners). URL: [http://computation.llnl.gov/project/linear\\_solvers/](http://computation.llnl.gov/project/linear_solvers/).
12. Вычислительный кластер УГАТУ. URL: <http://www.ufarb.ru/supercomputer/>.
13. Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение. 1989. 254 с.

*Поступила в редакцию 31.03.2017 г.*

## PERIODIC STRUCTURES IN NATURAL CONVECTION OF ANOMALOUS THERMOVISCOUS LIQUID

© V. S. Kuleshov<sup>1\*</sup>, K. V. Moiseev<sup>1,2</sup>, S. F. Urmancheev<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>*Mavlutov Institute of Mechanics  
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

<sup>2</sup>*Ufa State Petroleum Technological University  
1 Kosmonavtov Street, 450062 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

<sup>3</sup>*Bashkir State University  
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Phone: +7 (347) 235 52 55.*

*\*Email: kuleshows@gmail.com*

Mathematical model is based on the dynamics of continuous medium equation in the Oberbeck-Boussinesq approximation with nonmonotonic viscosity dependence of temperature is used for the hydrodynamics particularities of currents that occur under thermogravitational convection of fluid with anomalous thermoviscosity in a closed square cavity. The finite volume method and SIMPLE algorithm based on multiprocessor technology are used for simulations. The dependence of anomalies parameters on the liquids convective flow character is considered. The influence of forming microvortices on the dynamics of flow in nonstationary self-oscillating regimes is shown. The range of parameters for which “viscous barrier” affects the flow structure are found. The mechanism of changing of the stationary flow regime to the periodic one is identified ( $A \approx 300$ ) – the formation of tertiary microvortices focused mainly on the periphery of the cell boundaries. It should be mentioned that at  $1200 < A < 3450$ , the additional vortices focused in the middle part of the cell and located on the opposite sides of “viscous barrier” are generated. When the periodic regime is established in a given interval of parameter  $A$ , the intensity of heat exchange has a pronounced nonmonotonic character.

**Keywords:** heat transfer, mass transfer, natural convection, anomalous viscosity of fluid, thermoviscous fluid, viscous barrier.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at [bulletin\\_bsu@mail.ru](mailto:bulletin_bsu@mail.ru) if you need translation of the article.

### REFERENCES

1. Urmancheev S. F., Kireev V. N. Doklady akademii nauk. 2004. Vol. 396, No. 2. Pp. 204–207.
2. Khizbullina S. F. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2006. No. 2. Pp. 22–25.
3. Khizbullina S. F., Urmancheev S. F., Kireev V. N. Trudy Chetvertoi Rossiiskoi natsional'noi konferentsii po teploobmenu: v 8 tomakh. Vol. 2. Vynuzhdennaya konvektsiya odnofaznoi zhidkosti. Moscow: Izdatel'skii dom MEI. 2006. Pp. 145–148.
4. Il'yasov A. M., Moiseev K. V., Urmancheev S. F. Sib. zhurn. industr. matem. 2005. Vol. 8, No. 4. Pp. 51–59.
5. Kuleshov V. S., Moiseev K. V. Vestnik UGATU. 2016. Vol. 20, No. 2(72). Pp. 74–80.
6. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. Konvektivnaya ustoichivost' neszhimaemoi zhidkosti [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow: Nauka. 1972.
7. Getling A. V. Konvektsiya Releya–Benara. Struktury i dinamika [Structures and dynamics]. Moscow: Editorial URSS. 1998.
8. Patankar S. Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energofizmat. 1984.
9. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. V 2-kh t. Vol. 1: Per. s angl. [Computational hydromechanics and heat transfer. In 2 vol. Vol. 1: Transl. from English]. Moscow: Mir. 1990.
10. Samarskii A. A., Gulin A. V. Chislennyye metody: Ucheb. Posobie dlya vuzov. [Numerical methods: Textbook for universities] Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 1989.
11. Biblioteka reshatelei (High performance preconditioners). URL: [http://computation.llnl.gov/project/linear\\_solvers/](http://computation.llnl.gov/project/linear_solvers/).
12. Vychislitel'nyi klaster UGATU. URL: <http://www.ufa-rb.ru/supercomputer/>.
13. Belov I. A., Isaev S. A., Korobkov V. A. Zadachi i metody rascheta otryvnykh techenii neszhimaemoi zhidkosti [Tasks and methods for calculation of detached flows of incompressible fluid]. Leningrad: Sudostroenie. 1989.

*Received 31.03.2017.*