УДК 517.53, 517.54

ОБ ОДНОМ ВЕСОВОМ КЛАССЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© О. В. Охлупина

Брянский государственный инженерно-технологический университет
Россия, 241037 г. Брянск, пр. Станке Димитрова, 3.

Тел.: +7 (920) 863 31 15.

Email: helga131081@yandex.ru

В комплексном и вещественном анализе, а также теории потенциала и математической физике особое место отводится субгармоническим функциям. В статье рассматривается класс субгармонических в плоскости функций с характеристикой Р. Неванлинны, которая суммируема с экспоненциальным весом на комплексной плоскости, а так же изучены представляющие меры функций этого класса и получено необходимое и достаточное условие для таких мер. Доказательство утверждений проводится с применением методов комплексного и функционального анализа. На основе факторов модифицированного произведения К. Вейерштрасса построены потенциалы, которые играют ведущую роль в исследовании. Вспомогательные утверждения формулируются в виде лемм, с использованием которых доказывается основной результат.

Ключевые слова: субгармоническая функция, гармоническая функция, мера, характеристика Неванлинны, комплексная плоскость.

Введем предварительно обозначения. C – комплексная плоскость. $SH_{\alpha,\sigma}(C)$ ($\alpha, \sigma > 0$) – класс субгармонических в C функций u , таких что $\int_1^{+\infty} T(r, u) e^{-\sigma r^\alpha} dr < +\infty$, где $T(r, u)$ – характеристика Р. Неванлинны субгармонической функции u , т.е. $T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$, $u^+ = \max(u, 0)$ [1].

Большое внимание субгармоническим функциям уделяется в комплексном и вещественном анализе, в теории потенциала и математической физике [1–5].

В работах Р. Неванлинны, У. Хеймана получены описания классов субгармонических в плоскости функций, характеристика которых имеет степенной рост в бесконечности. Вопрос о справедливости аналогичных параметрических представлений для весовых классов, допускающих более сильный рост в бесконечности (например, экспоненциальный рост), возникает в теории целых и мероморфных функций [6].

Сформулируем основной результат работы.

Пусть $\alpha, \sigma > 0$, $z, \zeta \in C$, $\zeta \neq 0$, $p(|\zeta|) = \max[\sigma|\zeta|^\alpha, 1]$, где $[a]$ – целая часть вещественного числа a .

$A_p(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{1}{j} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^j\right)$ – фактор модифицированного произведения К. Вейерштрасса [7].

Теорема 1. Пусть $u \in SH_{\alpha,\sigma}(C)$, μ – представляющая мера функции u . Тогда μ удовлетворяет условию:

$$\int_1^{+\infty} \frac{n(t) e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty, \quad (1)$$

где $n(t) = \mu(D_t)$, $|z| < t$.

Верно и обратное утверждение: пусть μ – некоторая борелевская неотрицательная мера в C , удовлетворяющая (1), тогда можно построить в явном виде субгармоническую функцию класса

$SH_{\alpha,\sigma}(C)$, $\forall \sigma': \sigma' > \frac{1}{\epsilon\alpha} + \sigma e^\alpha$, для которой μ будет являться представляющей мерой.

Доказательству Теоремы 1 предпошлем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть $\psi(R)$ – неотрицательная монотонно растущая функция, для которой

$$\int_1^{+\infty} \psi(x) e^{-\sigma x^\alpha} dx < +\infty, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\psi(R) e^{-\sigma R^\alpha}}{R^{1-\alpha}} = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Из сходимости интеграла (2) следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{+\infty} \psi(x) e^{-\sigma x^\alpha} dx = 0$.

Пусть $\varphi(R) = \int_R^{+\infty} \psi(x) e^{-\sigma x^\alpha} dx$. Ясно, что $\varphi(R) \geq \psi(R) \int_R^{+\infty} e^{-\sigma x^\alpha} dx$. Найдем асимптотику последнего интеграла, применив правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_R^{+\infty} e^{-\sigma x^\alpha} dx}{\frac{e^{-\sigma R^\alpha}}{R^{\alpha-1}}} &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sigma R^\alpha}}{\frac{e^{-\sigma R^\alpha} \sigma R^{\alpha-1} \alpha}{R^{\alpha-1}} + \frac{e^{-\sigma R^\alpha} (\alpha-1)}{R^\alpha}} = \frac{1}{\sigma \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\psi(R) e^{-\sigma R^\alpha}}{R^{1-\alpha}} = 0.$$

$$\text{Т.е. } \lim_{R \rightarrow \infty} \psi(R) e^{-\sigma R^\alpha} R^{\alpha-1} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x) = \sigma x^\alpha$, $x \in R_+$, $R_+ = \{x \in R: x \geq 0\}$, $\epsilon_x = \frac{1}{x^\alpha}$.

Тогда $e^{\varphi(x+\epsilon_x)} = e^{\varphi(x)} \cdot e^{\beta(x)}$, где $\beta(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Легко следует из следующих простых рассуждений. Ясно, что $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y^2)$ при $y \rightarrow 0$. Поэтому

$$\sigma(x + \varepsilon_x)^\alpha = \sigma x^\alpha \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{x}\right)^\alpha = \sigma x^\alpha + \frac{\alpha \sigma}{x} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha+2}}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Тогда, $e^{\varphi(x+\varepsilon_x)} = e^{\varphi(x)} \cdot e^{\beta(x)}$, где $\beta(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть u – произвольная субгармоническая функция в C , при этом она допускает представление в виде

$$u(z) = \int_C \ln|A_p(z, \zeta)| d\mu(\zeta) + h(z),$$

$z, \zeta \in C$, $\mu(\zeta)$ – произвольная борелевская неотрицательная мера в C , такая, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{n(t)e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty,$$

$n(r) = \mu(D_r)$, $\alpha, \sigma > 0$, $h(z)$ – гармоническая функция в C , для которой

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi dr < +\infty.$$

Тогда $u \in SH_{\alpha, \sigma'}(C) \forall \sigma' : \sigma' > \frac{1}{e\alpha} + \sigma e^\alpha$.

Доказательство.

Обозначим $V_p(z) = \int_C \ln|A_p(z, \zeta)| d\mu(\zeta)$. Тогда $u(z) = V_p(z) + h(z)$.

Очевидно, что $h(z)$ принадлежит рассматриваемому классу. Покажем, что $V_p(z)$ тоже входит в класс $SH_{\alpha, \sigma'}(C)$ при $\forall \sigma' : \sigma'(\alpha) > \sigma$.

Согласно оценке (см. [1], стр. 94):

$$\ln|A_p(z, \zeta)| \leq \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)}, \quad \zeta \neq 0, z, \zeta \in C, \quad (4)$$

получим, что $u(z) \leq \int_C \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta)$.

Для продолжения оценки функции осуществим разбиение комплексной плоскости на множества: $\Delta_k = \{z \in C : 2^k < |z| \leq 2^{k+1}\}$,

$$\Delta_0 = \{z \in C : |z| \leq 1\}.$$

Тогда $u(z) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\Delta_k} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta)$.

Каждое из колец Δ_k раздробим на маленькие кольца и воспользуемся Леммой 2.

Пусть $\delta_{k,j} = \{z \in C : 2^k + j2^{-\alpha k} < |z| \leq 2^{k+1} + (j+1)2^{-\alpha k}\}$, $0 \leq j \leq [2^{(\alpha+1)k+1}]$, где $[a]$ – целая часть числа a . Тогда $\Delta_k \subset \bigcup_{j=0}^{N_\alpha} \delta_{k,j}$, где $N_\alpha = [2^{(\alpha+1)k+1}]$.

Следовательно,

$$\int_{\Delta_k} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta) \leq \sum_{j=0}^{N_\alpha} \int_{\delta_{k,j}} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta).$$

По Лемме 2, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{k,j}} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta) &\leq \left|\frac{z}{\zeta^*}\right|^{p(|\zeta^*|)} d\mu(\delta_{k,j}) \leq \\ &\leq \left|\frac{z}{\zeta^*}\right|^{p(|\zeta^*|)} n(2^k + (j+1)2^{-\alpha k}), \end{aligned}$$

где ζ^* – точка из $\delta_{k,j}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{\zeta^*}\right|^{p(|\zeta^*|)} n(2^k + (j+1)2^{-\alpha k}) &\leq \\ &\leq C_0 \int_{2^k + (j+1)2^{-\alpha k}}^{2^k + (j+2)2^{-\alpha k}} \left|\frac{z}{t}\right|^{p(t)} n(t) dt, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \dots$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \left|\frac{z}{\zeta}\right|^{p(|\zeta|)} d\mu(\zeta) &\leq C \sum_{j=0}^{N_\alpha} \int_{\delta_{k,j}} \left|\frac{z}{t}\right|^{p(t)} n(t) dt \leq \\ &\leq C \int_{2^k}^{2^{k+1}} \left|\frac{z}{t}\right|^{p(t)} n(t) dt. \end{aligned}$$

Просуммировав выражение по k , получим

$$u(z) \leq C \int_1^{+\infty} \left|\frac{z}{t}\right|^{p(t)} n(t) dt. \quad (5)$$

Оценим последний интеграл. Согласно (5) имеем, что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma' r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi}) d\varphi dr &\leq \\ &\leq C \int_1^{+\infty} e^{-\sigma' r^\alpha} \int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt dr. \end{aligned}$$

Установив сходимость последнего интеграла, докажем лемму.

Для этого представим внутренний интеграл в виде суммы

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt &= \int_1^{er} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt + \\ &+ \int_{er}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Докажем ограниченность второго интеграла константой независимо от r . Действительно, $\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} = \exp p(t) \ln \frac{r}{t}$.

Однако при $\frac{r}{t} \leq e^{-1}$, $\ln \frac{r}{t} \leq -1$. Тогда $\exp p(t) \ln \frac{r}{t} \leq \exp(-p(t))$.

$p(t) = [\sigma' t^\alpha]$, поэтому $p(t) \geq \sigma' t^\alpha - 1$. Следовательно, $\exp(-p(t)) \leq C e^{-\sigma' t^\alpha}$.

$$e^{-\sigma' t^\alpha} < \frac{e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha}, \quad \sigma' > \sigma, \quad n(t) \leq e^{\sigma t^\alpha} t^{2\alpha},$$

$$\begin{aligned} \int_{er}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt &\leq C \int_{er}^{+\infty} n(t) e^{-\sigma' t^\alpha} dt < \\ &< C \int_{er}^{+\infty} \frac{n(t) e^{-\sigma t^\alpha}}{t^{2\alpha}} dt < +\infty \end{aligned}$$

Оценим интеграл $I_1 = \int_1^{er} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt$.

С учетом оценки для I_2 получим, что

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-\sigma' r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi}) d\varphi dr &\leq \\ &\leq \int_1^{+\infty} e^{-\sigma' r^\alpha} \int_1^{er} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt dr \end{aligned}$$

Для вычисления наибольшего значения функции $\exp p(t) (\ln r - \ln t)$ на отрезке $[1; er]$ положим $x = \ln r$ и $\gamma(x, t) = p(t)(x - \ln t)$.

$$\gamma'(x, t) = p'(t)(x - \ln t) - \frac{p(t)}{t} = \sigma \alpha t^{\alpha-1}(x - \ln t - \sigma t^\alpha - 1) = \sigma \alpha t^{\alpha-1} x - \ln t e^{1-\sigma t^\alpha} = 0$$

Т.е. $\ln r = \ln\left(te^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $t = re^{\frac{1}{\alpha}}$, $t^\alpha = r^\alpha e^{-1}$. Указанная точка является точкой максимума, поэтому $\gamma(x, t) = \gamma\left(x, re^{\frac{1}{\alpha}}\right) = p\left(re^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\ln r - \ln re^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

$$\text{Т.к. } \max\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} \leq \left(\frac{r}{re^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{r^\alpha}{e}}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{er} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} n(t) dt &\leq \int_1^{er} \left(e^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{r^\alpha}{e}} n(t) dt = \\ &= \int_1^{er} e^{\frac{r^\alpha}{e\alpha}} n(t) dt = e^{\frac{r^\alpha}{e\alpha}} \int_1^{er} n(t) dt \\ \int_1^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} e^{\frac{r^\alpha}{e\alpha}} \int_1^{er} n(t) dt dr &= \\ &= \int_1^{+\infty} e^{-(\sigma' - \frac{1}{e\alpha})r^\alpha} \int_1^{er} n(t) dt dr \end{aligned}$$

С учетом Леммы 1 запишем, что $\int_1^{er} n(t) dt \leq C e^{\sigma(er)^\alpha} r^{\alpha-1}$.

Используя последнюю оценку, выясним значения σ' , обеспечивающие сходимость интеграла

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-(\sigma' - \frac{1}{e\alpha})r^\alpha} \int_1^{er} n(t) dt dr &: \\ \sigma' r^\alpha - \sigma(er)^\alpha - \frac{r^\alpha}{e\alpha} &> 0, \quad r^\alpha \left(\sigma' - \sigma e^\alpha - \frac{1}{e\alpha}\right) > 0, \\ \sigma' &> \frac{1}{e\alpha} + \sigma e^\alpha. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть u – произвольная субгармоническая функция из класса $SH_{\alpha, \sigma}(C)$, $\mu(\zeta)$ – произвольная мера функции u , при этом $\mu(D_t) = n(t)$, $0 < t < +\infty$. Тогда $\int_1^{+\infty} \frac{n(t)e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty$.

Доказательство.

Используя равенство Иенсена для субгармонических функций (см. [1]), достаточно оценить интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\int_1^t \frac{n(r)}{r} dr \right) e^{-\sigma t^\alpha} dt.$$

Проинтегрировав I по частям, получим:

$$I = -\frac{1}{\alpha\sigma} \left(\frac{e^{-\sigma t^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \int_1^t \frac{n(r)}{r} dr \right) \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\alpha}{t^\alpha} \int_1^t \frac{n(r)}{r} dr + \frac{n(t)}{t} \right) e^{-\sigma t^\alpha} dt =$$

Согласно Лемме 1, имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1-\alpha}{t^\alpha} \int_1^t \frac{n(r)}{r} dr + \frac{n(t)}{t} \right) e^{-\sigma t^\alpha} dt = \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha\sigma} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma t^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\int_1^t \frac{n(r)}{r} dr + n(t) \right) dt \end{aligned}$$

По условию леммы $I \leq C$.

Ясно, что при $0 \leq \alpha < 1$ лемма доказана, поскольку из условия (5) следует, что $\int_1^{+\infty} \frac{n(t)e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty$.

Предположим, что $\alpha > 1$. Тогда, согласно Лемме 1,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} \int_1^t \frac{n(r)}{r} dr dt \leq C_1 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha-1}} < +\infty.$$

Т.к. $\alpha > 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{n(t)e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство прямого утверждения Теоремы 1 следует из леммы 4.

Справедливость обратного утверждения вытекает из Леммы 3.

Что и доказывает Теорему 1 полностью.

Из Теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $SH_{\alpha, \infty} = \bigcup_{\sigma > 0} SH_{\alpha, \sigma}$.

Тогда класс $SH_{\alpha, \infty}$ совпадает с классом субгармонических функций в C , представимых в виде

$u(z) = \int_C \ln|A_p(z, \zeta)| d\mu(\zeta) + h(z)$, где μ – неотрицательная мера в C , такая, что $\mu(D_t) = n(t)$, $D_t = \{z: |z| < t\}$, а также удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{n(t)e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt &< +\infty, \quad h - \text{произвольная гармоническая функция в } C, \text{ для которой существует } \sigma > 0: \\ \int_1^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi dr &< +\infty. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- Hayman W. K. Subharmonic functions // Acad. Press, London etc., 1989. Vol. 2. P. 591.
- Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971. 432 с.
- Азарин В. С. Теория роста субгармонических функций. Харьк. гос. ун-т им. А. М. Горького, Харьков: ХГУ, 1982. 73 с.
- Охлупина О. В. Потенциалы типа Грина и интегральные представления весовых классов субгармонических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01, 2012. 118 с.
- Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964. 215 с.
- Быков С. В., Шамоян Ф. А. О нулях целых функций с мажорантой бесконечного порядка // Санкт-Петербургское отделение Института математики РАН, СПб: Наука. 2009. Т. 21:6. С. 66–79.
- Djrbashian A. E., Shamoyan F. A. Topics in the theory of A_α^p -spaces // Leipzig: Teubner-Texte zur Math. 1988. V. 105. P 200.
- Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н. Введение в теорию весовых L^p -классов мероморфных функций. Брянск: РИО БГУ, 2009. 153 с.

Поступила в редакцию 03.01. 2018 г.

ABOUT ONE OF WEIGHT CLASSES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

© O. V. Okhlupina

*Bryansk State Engineering-Technological University
3 Stanke Dimitrov Avenue, 241037 Bryansk, Russia.*

Phone: +7 (920) 863 31 15.

Email: helga131081@yandex.ru

Subharmonic functions introduced in the early twentieth century by F. Hartogs and F. Riesz, are applied in many areas nowadays. Special attention is paid to these classes of functions in complex and real analysis, in potential theory and mathematical physics. From the analytical works, the descriptions were obtained for classes of subharmonic in a plane functions characterized by exponential growth at infinity. The question on the validity of the same parametric representation for the weight classes allowing stronger growth at infinity arises in the theory of entire and meromorphic functions. The author of the article discusses the class of subharmonic in a plane functions with the Nevanlinna characteristic, which is integrable with an exponential weight in the complex plane, as well as studies the representation measures of the functions of this class and derives a necessary and sufficient condition for such measures. Proof of claims is carried out using the methods of complex and functional analysis. Based on the factors of the modified works by K. Weierstrass, potentials were constructed, which play a leading role in the study. Auxiliary assertions are formulated in the form of lemmas proving the main result.

Keywords: subharmonic function, harmonic function, representing measures, Nevanlinna characteristic.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Hayman W. K. Acad. Press, London etc., 1989. Vol. 2. Pp. 591.
2. Ronkin L. I. Vvedenie v teoriyu tselykh funktsii mnogikh peremennykh [Introduction to the theory of entire functions of many variables]. Moscow: Nauka, 1971.
3. Azarin V. S. Teoriya rosta subgarmonicheskikh funktsii [The growth theory of subharmonic functions]. Khar'k. gos. un-t im. A. M. Gor'kogo, Khar'kov: KhGU, 1982.
4. Okhlupina O. V. Potentsialy tipa Grina i integral'nye predstavleniya vesovykh klassov subgarmonicheskikh funktsii: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.01, 2012.
5. Brelo M. Osnovy klassicheskoi teorii potentsiala. Moscow: Mir, 1964.
6. Bykov S. V., Shamoyan F. A. Sankt-Peterburgskoe otdelenie Instituta matematiki RAN, Saint Petersburg: Nauka. 2009. Vol. 21:6. Pp. 66–79.
7. Djrbashian A. E., Shamoyan F. A. Leipzig: Teubner-Texte zur Math. 1988. Vol. 105. P 200.
8. Shamoyan F. A., Shubabko E. N. Vvedenie v teoriyu vesovykh L^p -klassov meromorfnykh funktsii. Bryansk: RIO BGU, 2009.

Received 03.01.2018.