УДК 517.4.43+517.4.94

АСИМПТОМАТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ, ИМЕЮЩИХ КРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

© Н. А. Сидельникова*, Р. Т. Садриева

Бакирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 32.

*Email: artsid2000@mail.ru

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений второго порядка, когда матрица системы имеет кратные собственные значения, при больших значениях переменной x в вырожденном случае.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, асимптотические формулы, кратные корни, вырожденный случай.

Введение

Рассмотрим систему n -уравнений на интервале $I=[a,b]$.

$$L(D,K)=D^2y(x)-K^2A(x)y=0, \quad (1)$$

где $D=\frac{d}{dx}$, x – большой параметр, $y(x)=\text{colon}(y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x))$, $A(x)$ – матрица n -го порядка, следующего вида:

$$A(x)=\begin{pmatrix} A_2(x) & \tilde{A}_{2x(n-2)}(x) \\ \tilde{A}_{(n-2)x2}(x) & A_{n-2}(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_2(x) & 0 \\ 0 & A_{n-2}(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}_{2x(n-2)}(x) \\ \tilde{A}_{(n-2)x2}(x) & 0 \end{pmatrix}=A_0(x)+\tilde{A}(x).$$

Здесь $A_2(x)$ – матрица 2 -го порядка, $A_{n-2}(x)$ – матрица порядка $(n-2) \times (n-2)$, элементы матриц $\tilde{A}_{2x(n-2)}(x)$ и $\tilde{A}_{(n-2)x2}(x)$ суммируемые на (x_0, ∞) .

Обозначим через $\Lambda_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, собственные значения матрицы $A_0(x)$.

Пусть матрица $A_0(x)$ имеет одно кратное собственное значение, кратностью 2 , остальные собственные значения имеют одинаковый порядок роста при $x \rightarrow +\infty$. Обозначим $\Lambda_1(x)=\Lambda_1(x)=\Lambda(x)$.

Преобразование системы (1)

Сведем систему (1) к системе I -го порядка при помощи вектора столбца $Y(x,k)$ и матрицы $B(x)$:

$$B(x)=\begin{pmatrix} B_4(x) & \tilde{B}_{4x(2n-4)}(x) \\ \tilde{B}_{(2n-4)x4}(x) & B_{2n-4}(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_4(x) & 0 \\ 0 & B_{2n-4}(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}_{4x(2n-4)}(x) \\ \tilde{B}_{(2n-4)x4}(x) & 0 \end{pmatrix}=B_0(x)+\tilde{B}(x),$$

$$Y(x,k)=\begin{pmatrix} Y_1(x,k) \\ K^{-1}Dy_1(x,k) \\ \dots \\ Y_n(x,k) \\ K^{-1}Dy_n(x,k) \end{pmatrix},$$

где

$$B_4(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{11}(x) & 0 & a_{12}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{21}(x) & 0 & a_{22}(x) & 0 \end{pmatrix}, B_{4x(2n-4)}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}(x) & a_{14}(x) & a_{1n}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{23}(x) & a_{24}(x) & a_{2n}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(x) & 0 & a_{32}(x) & 0 \\ a_{41}(x) & 0 & a_{42}(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & 0 & a_{n2}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{2n-4}(x)=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-2} \\ A_{n-2}(x) & 0 \end{pmatrix}, B_{(2n-4)x4}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}(x) & 0 & a_{32}(x) & 0 \\ a_{41}(x) & 0 & a_{42}(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & 0 & a_{n2}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) эквивалентна матричному уравнению

$$DY=kB(x)Y.$$

Легко проверить, что собственные значения матрицы $B_0(x)$ имеют следующий вид:

$$\mu_j \pm = \pm \sqrt{x_j \times (x)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Следовательно матрица $B_0(x)$ имеет $2n$ собственных значений, среди которых 2 кратных собственных значения, кратностью 2 .

Введем следующие обозначения:

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}(x) & I \\ 0 & \tilde{\lambda}(x) \end{pmatrix}, \tilde{\lambda}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x(x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{x(x)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2(x) = \begin{pmatrix} \lambda_0^{\frac{1}{2}}(x) & 0 \\ 0 & \lambda_0^{\frac{1}{2}}(x) \end{pmatrix}, \lambda_0^{\frac{1}{2}}(x) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_3(x)}, \dots, \sqrt{\lambda_n(x)}),$$

Здесь $\lambda_3(x), \dots, \lambda_n(x)$ – собственные значения матрицы $A_{n-2}(x)$.

Приведем систему (2) к блочно-диагональному виду при помощи замены:

$$Y(x, k) = T(x)Z(x, k),$$

где

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) & 0 \\ 0 & T_2(x) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $T_1(x)$ и $T_2(x)$ определяются следующим образом:

$$T_2(x) = \begin{pmatrix} T_0(x) & T_0(x) \\ T_0(x)\lambda_0^{\frac{1}{2}}(x) & -T_0(x)\lambda_0^{\frac{1}{2}}(x) \end{pmatrix},$$

где $T_0(x)$ – матрица, приводящая $A_{n-2}(x)$ к диагональному виду. Пусть для элементов матрицы $A_2(x)$ выполняются следующие условия:

$$a_{11}(x) = a(x)(1 + 0(1));$$

$$a_{12}(x) = a(x)$$

$$a_{22}(x) = a(x)(-1 + a(x));$$

$$a_{21}(x) = -a(x)$$

Матрица $T_1(x)$ приводит матрицу $B_4(x)$ к жордановой форме и находится из матричного уравнения

$$T_1^{-1}(x) \times B_4(x) \times T_1(x) = \lambda_1(x).$$

Определим элементы матрицы $T_1(x)$.

Пусть $t_{1j}(x) = \alpha_j(x)$, где $\alpha_j(x)$ – произвольные функции, тогда для остальных элементов матрицы $T_1(x)$ получим:

$$t_{21}(x) = \alpha_1(x)a(x), t_{31}(x) = -\alpha_1(x),$$

$$t_{22}(x) = -\alpha_2(x)a(x), t_{32}(x) = -\alpha_2(x),$$

$$t_{23}(x) = \alpha_1(x) + a(x)\alpha_3(x), t_{33}(x) = 2\alpha_1(x) - \alpha_3(x),$$

$$t_{24}(x) = \alpha_2(x) - a(x)\alpha_4(x), t_{34}(x) = -2\alpha_2(x) - \alpha_4(x),$$

$$t_{41}(x) = \alpha_1(x)a(x),$$

$$t_{42}(x) = -\alpha_2(x)a(x),$$

$$t_{43}(x) = (2a(x) - 1)\alpha_1(x) - a(x)\alpha_3(x),$$

$$t_{44}(x) = (2a(x) - 1)\alpha_2(x) + a(x)\alpha_4(x).$$

Найдем функции $\alpha_j(x)$ из соотношения

$$(T_1^{-2}(x)DT_1(x))_{jj} = 0.$$

Обозначим матрицу $\Phi_1(x) = T_1^{-1}DT_1(x)$ и выпишем ее диагональные элементы:

$$\Phi_{11} = \Phi_{33}(x) = \frac{\alpha_1'(x)}{\alpha_1(x)} + \frac{a'(x)}{2a(x)};$$

$$\Phi_{22}(x) = \Phi_{44}(x) = \frac{\alpha_2'(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{a'(x)}{2a(x)}.$$

Отсюда получим:

$$\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a(x)}}.$$

Далее полагаем:

$$\alpha_3 = \alpha_1, \alpha_4 = -\alpha_1.$$

Тогда для недиагональных элементов матрицы $\Phi_1(x)$ имеем:

$$\Phi_{12} = -\frac{a'(x)}{2a(x)}, \Phi_{13}(x) = -\frac{a'(x)}{2a^2(x)}; \Phi_{14}(x) = \Phi_{13}(x);$$

$$\Phi_{21}(x) = \Phi_{12}(x), \Phi_{23}(x) = \Phi_{24}(x) = -\Phi_{13}(x);$$

$$\Phi_{31}(x) = \Phi_{41}(x) = \Phi_{32}(x) = \Phi_{42}(x) = 0$$

$$\Phi_{34}(x) = \Phi_{43}(x) = -\Phi_{12}(x).$$

После преобразования (3) получим следующую систему:

$$DZ(x, k) = (k\lambda(x) - T^{-1}(x)DT(x))Z(x, k) \quad (4)$$

Перепишем систему (4) в виде:

$$DZ(x, k) = \begin{pmatrix} k'\Lambda_1(x) & 0 \\ 0 & k\Lambda_2(x) \end{pmatrix} Z(x, k) - \begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x, k) \\ \Phi_3(x, k) & \Phi_4(x) \end{pmatrix} Z(x, k),$$

где

$$\Phi_1(x) = T_1^{-1}(x)DT_1(x), \quad \Phi_2(x, k) = kT_1^{-1}(x)B_{4 \times (2n-4)}(x)T_2(x),$$

$$\Phi_3(x, k) = kT_2^{-1}(x)B_{4 \times (2n-4)}(x)T_1(x), \quad \Phi_4(x) = T_2^{-1}(x)DT_2(x).$$

Осуществим еще одно преобразование:

$$Z(x, k) = \begin{pmatrix} K_1(x, k) & 0 \\ 0 & K_2(x, k) \end{pmatrix} V(x, k), \quad (5)$$

где

$$K_1(x, k) = \begin{pmatrix} I_2 + k^{-1}G_1(x) & 0 \\ 0 & I_2 + k^{-1}G_2(x) \end{pmatrix}.$$

Матрица $G_1(x)$ определена следующим образом:

$$g_{ii}(x) = 0, \quad g_{ij}(x) = (-1)^j \frac{(\Phi_1(x))_{ij}}{2\sqrt{x(x)}}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

В нашем случае будем иметь

$$G_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a'(x)}{4a^2(x)} \\ -\frac{a'(x)}{4a^2(x)} & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_1(x) = -G_1(x)$$

$$K_2(x, k) = I + k^{-1}G(x), \quad (G(x))_{ij} = \frac{(1-\delta_{ij})(T_2^{-1}DT_2(x))_{ij}}{M_i(x) - M_j(x)}$$

$$M_i(x) = \sqrt{\Lambda_{i+2}}(x), \quad M_j(x) = -\sqrt{\Lambda_{i+2}}(x), \quad i, j = 1, \dots, n-2.$$

Преобразование (5) приводит систему (4) к виду:

$$DV(x, k) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, k) & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & \lambda_2(x, k) \end{pmatrix} V(x, k) - \begin{pmatrix} M_1(x, k) & M_2(x, k) \\ M_3(x, k) & M_4(x, k) \end{pmatrix} V(x, k)$$

$$\text{где } \lambda_1(x, k) = \begin{pmatrix} k\tilde{\lambda}(x) & I \\ 0 & k\tilde{\lambda}(x) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(x, k) = K\lambda_2(x) - \text{diag}(T_2^{-1}(x)DT_2(x)),$$

$$M_1(x, k) = K_1^{-1}(x, k)\Phi_1(x)K_1(x, k) + K_1^{-1}(x, k)DK_1(x, k),$$

$$M_2(x, k) = K_1^{-1}(x, k)\Phi_2(x)K_2(x, k),$$

$$M_3(x, k) = K_2^{-1}(x, k)\Phi_3(x)K_1(x, k),$$

$$M_4(x, k) = K_2^{-1}(x, k)\Phi_4(x)K_2(x, k) + K_2^{-1}(x, k)DK_2(x, k).$$

Выпишем элементы матрицы $M_1(x, k)$:

$$m_{11}(x, k) = -\frac{a'(x)(2ka^2(x)a'(x) + 2(a'(x))^2 - a(x)a''(x))}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)},$$

$$m_{12}(x, k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{-16ka^2(x)(a'(x))^2 + 8ka^3(x)a''(x) - (a'(x))^3}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)} \right),$$

$$m_{13}(x, k) = -\frac{1}{2} \frac{a'(x)(16k^2a^4(x) - 8ka^2(x)a'(x) + (a'(x))^2 - 4a^2(x)a'(x))}{a^2(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)},$$

$$m_{14}(x, k) = -\frac{1}{2} \frac{a'(x)(16k^2a^4(x) + 16ka^4(x) - (a'(x))^2)}{a^2(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)},$$

$$m_{21}(x, k) = \frac{1}{2} \left(\frac{-16ka^2(x)(a'(x))^2 + 8ka^3(x)a''(x) + (a'(x))^3}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)} \right),$$

$$m_{22}(x, k) = \frac{a'(x)(2ka^2(x)a'(x) - 2(a'(x))^2 + a(x)a''(x))}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)},$$

$$m_{23}(x, k) = \frac{1}{2} \frac{a(x)(16k^2a^4(x) + 16ka^4(x) - (a'(x))^2)}{a^2(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)},$$

$$\begin{aligned}
m_{24}(x, k) &= \frac{1}{2} \frac{a'(x)(16k^2a^4(x) + 8ka^2(x)a'(x) + (a'(x))^2 + 4a^2(x)a'(x))}{a^2(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)}, \\
m_{33}(x, k) &= -\frac{a'(x)(2ka^2(x)a'(x) + 2(a'(x))^2 - a(x)a''(x))}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)}, \\
m_{34}(x, k) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-16ka^2(x)(a'(x))^2 + 8ka^3(x)a''(x) - (a'(x))^3}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)} \right), \\
m_{43}(x, k) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-16ka^2(x)(a'(x))^2 + 8ka^3(x)a''(x) + (a'(x))^3}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)} \right), \\
m_{44}(x, k) &= \frac{a'(x)(2ka^2(x)a'(x) - 2(a'(x))^2 + a(x) \cdot a''(x))}{a(x)(16k^2a^4(x) + (a'(x))^2)}, \\
m_{31}(x, k) &= m_{32}(x, k) = m_{41}(x, k) = m_{42}(x, k) = 0.
\end{aligned}$$

Асимптотика решений системы (1)

Исследуем теперь поведение при $x \rightarrow \infty$ матриц, входящих в качестве коэффициентов в правую часть системы (6).

Обозначим

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(x, k) &= k\sqrt{\lambda(x)}, \tilde{\mu}_{2,4}(x, k) = -k\sqrt{\lambda(x)}, \\
\tilde{\mu}_i(x, k) &= k\sqrt{\lambda_i(x)} - (T_2^{-1}(x)DT_2(x))_{ii}, \\
\tilde{\mu}_{n+i} &= -k\sqrt{\lambda_i(x)} - (T_2^{-1}(x)DT_2(x))_{n+i, n+i}, i=3, n.
\end{aligned}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. $A(x) \in C^2(I)$.
2. На отрезке I нет точек поворота матрицы $A_{n-2}(x)$ (т.е. матрица $A_{n-2}(x)$ не имеет кратных или ненулевых собственных значений).

3. Существует функция $q(x)$ такая, что при всех j :

$$\lambda_j(x) \approx cq(x), \text{ при } x \rightarrow +\infty, c_j \neq 0, c_j \neq ck, j \neq j, 3 \leq j \leq n.$$

Эту асимптотику можно дважды дифференцировать

$$\begin{aligned}
|Dq(x)| \cdot |q(x)|^{-3/2} &\rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty, \\
|q(x)|^{-1/2} \cdot |(T_2^{-1}(x)DT_2(x))| &\rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

4. Функции $Re(\tilde{\mu}_i(x, k)), Re(\tilde{\mu}_j(x, k) \pm \tilde{\mu}_i(x, k)), Re(\tilde{\mu}_r(x, k) \pm \tilde{\mu}_i(x, k)) + \frac{1}{x}, 1 \leq j, i \leq n, r = 1, 2$ не меняют знак при $x \in I$.

Если какая-либо из функций $Re(\tilde{\mu}_j(x, k) - \tilde{\mu}_i(x, k)) + \frac{q-p}{x}, 1 \leq j, i \leq n, 1 \leq q \leq l_j - 1, 1 \leq p \leq l_i$, где l_i кратность корня $\tilde{\mu}_i(x)$, неположительна и в то же время несуммируема в интервале (x_0, ∞) , то после умножения на x эта функция становится строго отрицательной при $x \geq x_0$.

5. $\tilde{\mu}_j(x, k) \in L[x_0, x_1]$ при любом конечном x_1 .

6.

$$\begin{aligned}
&x \frac{a'(x)}{a^2(x)}, x \frac{(a'(x))^2}{a^3(x)}, x \frac{a''(x)}{a^2(x)}, \\
&x(\mu_2(x, k))_{ij}, (\mu_3(x, k))_{ij} \in L(x_0, \infty), \\
&1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 2n - 4
\end{aligned}$$

Для удобства запишем матрицу $\Phi_1(x) = (T_1^{-1}(x)DT_1(x))$ в виде

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) & C_2(x) \\ 0 & C_3(x) \end{pmatrix}$$

Лемма 1. Для элементов матрицы $G(x)$ вычисляется $g'_{ij} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty, i, j=1, 2$.

Доказательство:

$$g'_{12}(x) = -g'_{21}(x) = -\frac{1}{4k} \frac{a'(x)}{a^2(x)} \rightarrow 0 \text{ в силу условия 5).}$$

Следствие 1. Для достаточно больших k и x матрицы $(I_2 + k^{-1}G_1(x))$ и $(I_2 + k^{-1}G_2(x))$ обратимы и $\|I_2 + k^{-1}G_1(x)\| \leq \text{const}, \|I_2 + k^{-1}G_1(x)\|^{-1} \leq \text{const}, \|I_2 + k^{-1}G_2(x)\| \leq \text{const}, \|I_2 + k^{-1}G_2(x)\|^{-1} \leq \text{const}.$

Лемма 2. Элементы матрицы $C_2(x)$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство: Поскольку для всех этих элементов доказательство совершенно одинаково, приведем его, например для элемента $x(C_2(x))_{11}$.

$$(C_2(x))_{11} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a'(x)}{a^2(x)};$$

$$|x(C_2(x))_{11}| = \left| -\frac{1}{2} x \frac{a'(x)}{a^2(x)} \right| \leq \left| x \frac{a'(x)}{a^2(x)} \right|$$

Отсюда в силу условия 5), получим:

$$\int_{x_0}^{\infty} |x(C_2(x))_{11}| dx < \infty$$

что и доказывает лемму.

Следствие 2. Из леммы 2 и следствия 1 вытекает, что элементы матрицы $(I_2 + k^{-1}G_1(x))^{-1}C_2(x)$ $(I_2 + k^{-1}G_2(x))$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Лемма 3. Элементы матрицы $C_1(x)G_1(x)$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство:

$$C_1(x) \cdot G(x) = \begin{pmatrix} -g_{12}^1(x)C_{12}(x) & 0 \\ 0 & g_{12}^1(x)C_{12}(x) \end{pmatrix};$$

$$g_{12}^1(x)C_{12}(x) = \left(\frac{-a'(x)}{2a(x)} \right) \left(-\frac{1}{4k} \frac{a'(x)}{a^2(x)} \right) = \frac{1}{8k} \frac{(a'(x))^2}{a^3(x)}$$

Отсюда в силу 5):

$$\int_{x_0}^{\infty} |xg_{12}^1(x)C_{12}(x)| dx < \infty$$

что и доказывает лемму.

Следствие 3. Из леммы 3 и следствия 1 вытекает, что элементы матриц $(I_2 + k^{-1}G_1(x))^{-1}C_1(x)G_1(x)$ и $(I_2 + k^{-1}G_2(x))^{-1}C_3(x)G_2(x)$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Лемма 4. Элементы матриц $DG_1(x)$ и $DG_2(x)$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство: Докажем лемму для элемента $g_{12}^1(x)$:

$$(g_{12}^1(x))' = -\frac{1}{4k} \left(\frac{a'(x)}{a^2(x)} \right)' = -\frac{1}{4k} \left(\frac{a''(x)}{a^2(x)} - 2 \frac{(a'(x))^2}{a^3(x)} \right)$$

Отсюда в силу условия 5), следует

$$\int_{x_0}^{\infty} |x(g_{12}^1(x))'| dx < \infty$$

что и доказывает лемму.

Следствие 4. Из леммы 4 и следствия 1 вытекает, что элементы матриц $(I_2 + k^{-1}G_1(x))^{-1}DG_1(x)$ и $(I_2 + k^{-1}G_1(x))^{-1}DG_2(x)$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Лемма 5. Элементы матрицы $R(x, k) = (I_2 + k^{-1}G_1(x))^{-1} (I_2 + k^{-1}G_2(x)) - I_2$, умноженные на x , суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство:

$$|R_{11}(x, k)| = \left| -\frac{2(a'(x))^2}{16k^2a^4(x) + (a'(x))^2} \right| \leq \frac{(a'(x))^2}{8k^2 \cdot a^4(x)},$$

$$|R_{12}(x, k)| = \left| -\frac{8ka' \cdot a^2(x)}{16k^2a^4(x) + (a'(x))^2} \right| \leq \frac{a'(x)}{2k \cdot a^2(x)}.$$

Отсюда в силу условия 5), получим:

$$\int_{x_0}^{\infty} |xR(x, k)_{11}| dx < \infty$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |xR(x, k)_{12}| dx < \infty$$

что и доказывает лемму.

Теперь к нашей системе (6) можно применить теорему Рапопорта, которая позволяет установить асимптотические формулы для решения системы (6).

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–6), тогда система 6) имеет $2n$ линейно-независимых решений, таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$V_{(x,k)}^i = \begin{pmatrix} \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_1(t,k) dt \\ \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_2(t,k) dt \\ \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_1(t,k) dt \\ \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_2(t,k) dt \\ \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_5(t,k) dt \\ \vdots \\ \exp \int_{x_0}^x \tilde{\mu}_{2n}(t,k) dt \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Возвращаясь к исходной системе (1), получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–6). Тогда система (1) имеет $2n$ линейно-независимых решений, таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} y_1^\pm(x,k) &\approx x^{\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right), \\ y_2^\pm(x,k) &\approx x^{\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right), \\ y_3^\pm(x,k) &= W_j^\pm(x,k) (f_j(x) + k^{-1} \varphi_j^\pm(x,k)), \quad 3 \leq j \leq n, \\ x &\in I, \quad k \geq k_0 \geq 1, \quad |\varphi_j^\pm(x,k)| < \text{const}, \\ W_j^\pm(x,k) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j(x)}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda_j(t)} dt \cdot \int f_j^*(x) Df_j(x)\right), \end{aligned}$$

где $f_j(x)$, $f_j^*(x)$ – правые и левые собственные векторы матрицы $A_{n-2}(x)$ соответственно [1].

Пример.

В качестве матрицы $A_2(x)$ можно рассмотреть матрицу:

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} p^2(x) + p(x) & p(x) \\ -p(x) & p^2(x) - p(x) \end{pmatrix},$$

где $p(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$.

Асимптотические формулы для решений, соответствующих кратным корням имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1^\pm(x,k) &\approx x^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \exp\left(\pm \int t^\alpha dt\right), \\ y_2^\pm(x,k) &\approx x^{\frac{\alpha}{\alpha}} \exp\left(\pm \int t^\alpha dt\right). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданова Г. В., Федорюк М. В. Асимптотическая теория систем и задач о рассеянии // Тр. Московского математического общества. 1977. 34. С. 213–242.
2. Predazzi E., Regga T. Nuovo Cimento-24, 518, 1962.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969.
4. Султанов Я. Т. Асимптотика спектра обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 18. №10. С. 1694–1702.
5. Султанов Я. Т. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае // Труды семинара им. И. Р. Петровского. 1988. Т. 13. С. 36–55.
6. Султанов Я. Т. Асимптотика дискретного спектра одномерных дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. №11. С. 2010–2020.

Поступила в редакцию 10.05.2018 г.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS OF THE SECOND ORDER WITH MULTIPLE ROOTS IN DEGENERATE CASE

© N. A. Sidel'nikova*, R. T. Sadrieva

*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

Phone: +7 (347) 229 96 32.

**Email: artsid2000@mail.ru*

The asymptotic methods are applied in different spheres, such as differential equations, mathematical physics, quantum mechanics, etc. Since the end of 19th century, the question of asymptotic behavior of differential equations is the subject of numerous studies. This article is devoted to the problem of development of asymptotic theory for the differential system of n - equations on the interval $I = [a, b]$

$$L(D, K) = D^2 y(x) - K^2 A(x)y = 0,$$

where $D = \frac{d}{dx}$, x is a large parameter, $y(x) = (y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x))$, $A(x)$ is a matrix of n - order. The matrix $A(x)$ has multiple characteristic roots. The authors can prove the theorem about asymptotic formulas for solutions of this system in the degenerate case, then $x \rightarrow \infty$

$$y_1^\pm(x, k) \approx x^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right),$$

$$y_2^\pm(x, k) \approx x^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda(x)}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda(t)} dt\right),$$

$$y_3^\pm(x, k) = \mathcal{W}_j^\pm(x, k) (f_j(x) + k^{-1} \varphi_j^\pm(x, k)), 3 \leq j \leq n,$$

$$x \in I, k \geq k_0 \geq 1, |\varphi_j^\pm(x, k)| < \text{const},$$

$$\mathcal{W}_j^\pm(x, k) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j(x)}} \exp\left(\pm k \int \sqrt{\lambda_j(t)} dt \cdot \int f_j^*(x) D f_j(x)\right),$$

where $f_j(x)$, $f_j^*(x)$ is the left and the right eigenvectors of the matrix $A(x)$. In addition, the authors gave an example of matrix $A(x)$ and a solution of the received differential system.

Keywords: system, multiple root, asymptotic formula, solution, degenerate case.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Zhdanova G. V., Fedoryuk M. V. Tr. Moskovskogo matematicheskogo obshchestva. 1977. 34. Pp. 213–242.
2. Predazzi E., Regga T. Nuovo Cimento-24, 518, 1962.
3. Fichtenholz G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Nauka, 1969.
4. Sultanaev Ya. T. Differentsial'nye uravneniya. 1992. Vol. 18. No. 10. Pp. 1694–1702.
5. Sultanaev Ya. T. Trudy seminar im. I. R. Petrovskogo. 1988. Vol. 13. Pp. 36–55.
6. Sultanaev Ya. T. Differentsial'nye uravneniya. 1974. Vol. 10. No. 11. Pp. 2010–2020.

Received 10.05.2018.