раздел **МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА**

УДК 534.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ИЗ ЧЕТЫРЕХ СТРУН

© А. М. Ахтямов[1,2], З. Ф. Аксенова[3]*

[1]*Башкирский государственный университет*
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2] *Институт механики им. О. Р. Мавлютова*
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

[3]*Уфимский государственный авиационный технический университет*
Россия, 450008 г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

Тел. +7 (347) 273 77 35.
**Email: aksenovazf@yandex.ru*

Работа посвящена восстановлению параметров заземления провода по собственным частотам колебаний переменного тока.

Вычислению собственных значений для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля, заданных на отрезке и на геометрических графах посвящены работы [4; 6; 8; 10; 12; 14–21]. Обратная задача Штурма-Лиувилля на отрезке рассматривалась в [3–5; 9], а на геометрических графах в [1–2; 7; 13; 22].

В работах [7; 13] решена задача идентификации параметров краевых условий задачи Штурма–Лиувилля на геометрическом графе по конечному числу собственных частот. Однако для восстановления параметров используется столько собственных частот сколько и неизвестных параметров. При этом решение оказывается неединственным, в том числе и для несимметрических систем. А в [1–2] для задачи Штурма–Лиувилля на геометрическом графе из трех струн было предложено использовать количество частот, большее, чем количество неизвестных. В этом случае, если длины струн различны, то получается единственное решение восстановления краевых условий. В настоящей статье аналогичный результат получен для четырех струн.

Ключевые слова: *граничная обратная задача, собственные частоты, колебания напряжения переменного тока, условия заземления, сосредоточенная емкость, сосредоточенная самоиндукция.*

Постановка задачи. Рассмотрим граф G в виде звезды из 4 прямых проводов с одной общей вершиной в нуле. Длина k-ого провода равна $\boldsymbol{l_k}$. Тупиковые вершины графа заземлены через параллельное соединение сосредоточенных самоиндукции $\boldsymbol{L_k}$ и емкости конденсатора $\boldsymbol{C_k}$ (*рис.* 1). Положительным направлением движения на проводе будем считать направление от общей вершины графа – точки O – к тупиковой вершине графа.

Задача состоит в определении сосредоточенной самоиндукции L_k и сосредоточенной сти C_k, по первым собственным частотам колебаний напряжения переменного тока в доступном для измерения участке одного из проводов.

Частотное уравнение. Известно, что электрические колебания для одного провода $0 < x < l$ с пренебрежимо малым сопротивлением R и утечкой G описывается телеграфными уравнениями [14, с. 320–335]:

$$v_x + L_k i_t = 0, \tag{1}$$
$$i_x + C_k v_t = 0, \tag{2}$$

где x $(0 < x < l)$ – расстояние от середины O провода до рассматриваемой точки на проводе; $v = v(x,t)$ – напряжение в проводе($0 < t < +\infty$), $i = i(x,t)$ – сила тока в проводе; L_k– коэффициент самоиндукции; C_k– коэффициент емкости конденсатора.

Продифференцируем первое уравнение по x, а второе по t и выразив из второго смешанную производную силы тока и подставив в первое, получим, что на каждом проводе $0 < x_k < l_k$звездного графа из проводов, имеем:

$$v_{x_k x_k} = C_k L_k v_{tt}, k = 1, 2, 3, 4 \tag{3}$$

Условия сопряжения в общей точке O графа (условие непрерывности потенциала и условие баланса токов) записываются следующим образом [3–4]

$$v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = v_4(0) \tag{4}$$
$$v_1'(0) + v_2'(0) + v_3'(0) + v_4'(0) = 0 \tag{5}$$

Если краевые концы провода заземлены через параллельное соединение сосредоточенных самоиндукции L_k и емкости конденсатора C_k, то краевые условия имеют следующий вид: $C_k v_{tt}(l_i, t) + \frac{v(l_k,t)}{L} = i_t(l_k, t)$. Учитывая, что $v_x + L_k i_t = 0$, получим:

$$v_x(l_k, t) + C_k L_k v_{tt}(l_i, t) + \frac{L}{L_k} = 0 \tag{6}$$

Уравнение *(6)* – уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k параллельно соединенными самоиндукцией L_k и емкостью $-C_k$,x_k – точка провода по оси $OX_k(0 \le x_k \le l_k), y(x_k)$.

$(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ – колебания электрического тока в проводнике. Также считаем, что сопротивление и утечка через изоляцию проводника пренебрежимо малы; значения самоиндукции L_k и емкости конденсатора C_k провода известны.

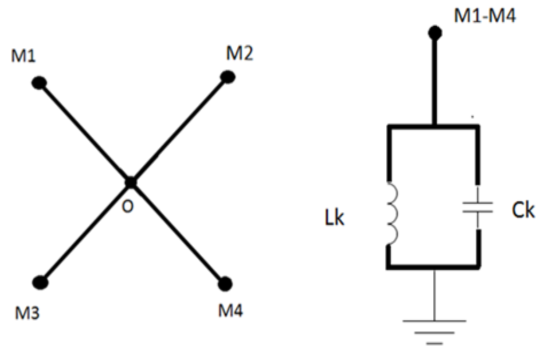

Рис. 1. Схема заземление проводов через параллельное соединение

Выполним замену $v(x,t) = e^{j\lambda t} y(x)$ $(j = \sqrt{-1})$в краевой задаче *(3)–(6)*.

Тогда уравнение перепишется в виде:

$$y''(x_k) = -C_k L \cdot \lambda^2 \cdot y(x_k) \tag{7}$$

Условия (4), (5) в общей точке

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) \tag{8}$$
$$y_1'(0) = y_2'(0) = y_3'(0) = y_4'(0) \tag{9}$$

Краевые условия заземления k -ого проводника длинной l_kчерез сосредоточенную самоиндукцию L_k и емкость конденсатора C_k, последовательно соединенных перепишутся в следующем виде:

$$y'(l_k) + \left(\frac{L}{L_k} - C_k L\lambda^2\right) \cdot y(l_k) = 0$$

Обозначим $C_k L\lambda^2$ через s^2, $\frac{L}{L_k}$–черезa_k, $\frac{C_k}{C}$ – через c_k. Тогда последнее равенство перепишется в виде:

$$y'(l_k) + (a_k - c_k \cdot s^2) \cdot\ y(l_k) = 0 \tag{10}$$

где k=1, 2, 3, 4.

Решением уравнения *(7)* является следующая функция:

$$y(x_k) = c_{k1} \cos(sx_k) + c_{k2} \frac{\sin(sx_k)}{s}$$

Выведем уравнение для вычисления собственных значений $s_p (p = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ задачи *(7) – (10)*.

Из *(8)* и *(9)* получаем

$c_{11} = c_{21} = \cdots = c_{n1} = c = const, c_{12} + c_{22} + \cdots + c_{n2} = 0.$

В случае если с=0, получаем первую серию собственных значений, которая не является информативной для восстановления параметров краевых условий. Поэтому мы не будем рассматривать эту серию собственных значений. Если же с≠0, то и из *(10)* следует, что

$$-c \cdot s_p \cdot \sin(s_p \cdot l_k) + c_{k2} \cdot \cos(s_p \cdot l_k) + (a_k - c_k \cdot s_p^2) \cdot \left(c \cdot \cos(s_p \cdot l_k) + c_{k2} \cdot \frac{\sin(s_p \cdot l_k)}{s_p}\right) = 0$$

где k=1, 2, 3, 4; p=1, 2, 3, 4,…

откуда

$$c_{k2} = \frac{c \cdot (s_p \cdot \sin(s_p \cdot l_k) - (a_k - c_k \cdot s_p^2) \cdot \cos(s_p \cdot l_k))}{\cos(s_p \cdot l_k) + (a_k - c_k \cdot s_p^2) \cdot \frac{\sin(s_p \cdot l_k)}{s_p}}$$

Знаменатель не может обращаться в нуль. Поэтому уравнение для вычисления собственных значений задачи *(7)–(10)* имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_p \cdot \sin(s_p \cdot l_k) - (a_k - c_k \cdot s_p^2) \cdot \cos(s_p \cdot l_k)}{\cos(s_p \cdot l_k) + (a_k - c_k \cdot s_p^2) \cdot \frac{\sin(s_p \cdot l_k)}{s_p}} = 0 \tag{11}$$

где $\frac{L}{L_k} - a_k$, $\frac{C_k}{C} - c_k$, k=1, 2, 3, 4; p=1, 2, 3, 4. Отсюда получаем уравнение для вычисления второй серии собственных значений:

$$\begin{aligned}&\frac{(s_1 \cdot \sin(s_1 \cdot l_1) - (a_1 - c_1 \cdot s_1^2) \cdot \cos(s_1 \cdot l_1))}{\cos(s_1 \cdot l_1) + (a_1 - c_1 \cdot s_1^2) \cdot \frac{\sin(s_1 \cdot l_1)}{s_1}} + \\ &+ \frac{(s_2 \cdot \sin(s_2 \cdot l_2) - (a_2 - c_2 \cdot s_2^2) \cdot \cos(s_2 \cdot l_2))}{\cos(s_2 \cdot l_2) + (a_2 - c_2 \cdot s_2^2) \cdot \frac{\sin(s_2 \cdot l_2)}{s_2}} + \\ &+ \frac{(s_3 \cdot \sin(s_3 \cdot l_3) - (a_3 - c_3 \cdot s_3^2) \cdot \cos(s_3 \cdot l_3))}{\cos(s_3 \cdot l_3) + (a_3 - c_3 \cdot s_3^2) \cdot \frac{\sin(s_3 \cdot l_3)}{s_3}} + \\ &+ \frac{(s_4 \cdot \sin(s_4 \cdot l_4) - (a_4 - c_4 \cdot s_4^2) \cdot \cos(s_4 \cdot l_4))}{\cos(s_4 \cdot l_4) + (a_4 - c_4 \cdot s_4^2) \cdot \frac{\sin(s_4 \cdot l_4)}{s_4}} = 0\end{aligned} \tag{12}$$

Из уравнения видно, что если длины струн одинаковы, то параметры $\boldsymbol{a_k}$ и $\boldsymbol{c_k}$ находятся с точностью до перестановок их местами (т.е. неоднозначно). Если же длины струн различны, то параметры $\boldsymbol{a_k}$ и $\boldsymbol{c_k}$ находятся однозначно. Покажем это на примере.

Пример 1. Пусть известен следующий набор собственных значений s_1=0.5717144, s_2=0.8763628, s_3=1.2152649, s_4=1.5438962, s_5=1.8581621. Требуется найти значения емкостей конденсатора c_1, c_2, c_3, c_4, причем известны значения самоиндукции a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4. Длины l_i *(i=1, 2, 3, 4)* струн попарно различны l_1=1, l_2=2, l_3=3, l_4=4. Решив систему *(11)* сначала при p=1, 2, 3, 4, а затем при p=1, 2, 3, 5 получим, что искомые данные лежат в пересечении найденных решений этих двух систем: c_1 = 5.0000000, c_2 = 5.9999999, c_3 = 7.0000001, c_4 = 7.9999995

По аналогии с примером 1 восстанавливаются параметры a_k (k=1, 2, 3, 4)

Таким образом, для получения единственности восстановления краевых условий мы использовали количество частот, большее, чем количество неизвестных. Полученные результаты позволяют диагностировать условия заземления электрических сетей, на участках труднодоступных для визуального осмотра, а также подбирать условия заземления для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта №17-41-020230-р_а.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахтямов А. М., Аксенова З. Ф. Идентификация параметров упругого закрепления механической системы из струн // Современные проблемы науки и образования. Пенза, ВАК, РИНЦ. 2015. №1. URL: www.science-education.ru/121-18706 (дата обращения: 18.05.2015).
2. Ахтямов А. М., Аксенова З. Ф. О диагностике механической системы из струн по конечному набору собственных значений // Фундаментальные исследования. Пенза, ВАК, РИНЦ. 2015. №5–1. С. 27–31. URL: http://www.rae.ru/fs/pdf/2015/5-1/38002.pdf
3. Ахтямов А. М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 2001. Т. 5. №3–4. С. 103–110.
4. Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35 №8. С. 1127–1128.
5. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем. 2008. 300 с.
6. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 224 с.
7. Валеев Н. Ф., Рабцевич С. А., Нугуманов Э. Р. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма-Лиувилля по спектру //Вестник СамГУ. Сер.: Естественнонаучная. 2009. №6(72).
8. Вольперт А. И. Дифференциальные уравнения на графах // Матем. сборник. 1972. Т. 88 №4. С. 578–588.
9. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: изд-во МГУ. 1994. 206 с.
10. Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О спектре равномерной сетки из струн // Известия вузов. 2000. Т. 463. №4. С. 23–27.
11. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля // М.: Наука 1984. 240 с.
12. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения // Киев: Наукова думка. 1977.
13. Мартынова Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Башкирского университета. 2011. Т. 16. №1. С. 4–10.
14. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний // М.: Наука 1972. 470 с.
15. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. №7. С. 1141–1150.
16. Покорный Ю. В., Карелина И. Г. О функции Грина задачи Дирихле на графе ДАН СССР. 991. Т. 318 №3. С. 942–944.
17. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. Теоремы Штурма для уравнений на графах // ДАН СССР. 1989. Т. 309 №6. С. 1306–1308.
18. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. Об уравнениях на пространственных сетях // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. Вып. 4. С. 140.
19. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит. 2005. 272 с. 80.
20. Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н., Черкашенко И. Л. О спектре одной «разорванной» краевой задачи // Нелинейные колебания и теория управления, Устинов. 1985. Вып. 5. С. 49–57.
21. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. О распределении нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля на пространственной сети // Доклады РАН. 1999. Т. 364. №3. С. 316–318.
22. Юрко В. А Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на произвольных компактных пространственных сетях // Доклады академии наук. 2010. Т. 432, №3. С. 318–321.

Поступила в редакцию 05.03.2018 г.

IDENTIFICATION OF BOUNDARY CONDITIONS ON A STAR-SHAPED GEOMETRIC GRAPH OF FOUR STRINGS

© A. M. Akhtyamov[1,2], Z. F. Aksenova[3]*

[1]*Bashkir State University*
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]*Mavlyutov Institute of Mechanics*
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[3]*Ufa State Aviation Technical University*
12 Karl Marx Street, 450008 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 273 77 35.
**Email: aksenovazf@yandex.ru*

A star-shaped geometric graph of four wires with one common vertex at zero is considered. Dead ends of the graph are grounded through the parallel-connected concentrated self-induction and concentrated capacitance of the capacitor. The positive direction of the axis on the wire is the direction from the common vertex of the graph (the point) to the dead end of the graph. The problem is to determine the unknown concentrated self-induction and concentrated capacitance from the first natural oscillation frequencies of the alternating current voltage in the accessible section of one of the wires. It is shown that if the lengths of the strings are the same, then the concentrated self-inductions and capacitances are up to permutations by their places (i.e., ambiguously). If the lengths of the strings are different, then the concentrated self-inductions and capacitances are uniquely determined. If the strings are of unequal length, it is necessary to use the number of natural frequencies greater than the number of unknown parameters for unique determination of these unknown parameters. It is shown that if the number of natural frequencies coincides with the number of unknown parameters, then the parameters are determined ambiguously. The given examples show that if four unknown parameters (one in each boundary condition) are reconstructed at four natural frequencies, then six solutions are obtained. The results of the study can be applied to diagnose the grounding conditions of wires in areas not accessible for visual inspection, according to the natural frequencies of AC voltage fluctuations in the wire section accessible for measurement.

Keywords: boundary inverse problem, natural frequencies, AC voltage fluctuations, grounding conditions, concentrated capacitance, concentrated self-induction.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Akhtyamov A. M., Aksenova Z. F. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. Penza, VAK, RINTs. 2015. No. 1. URL: www.science-education.ru/121-18706 (data obrashcheniya: 18.05.2015).
2. Akhtyamov A. M., Aksenova Z. F. Fundamental'nye issledovaniya. Penza, VAK, RINTs. 2015. No. 5–1. Pp. 27–31. URL: http://www.rae.ru/fs/pdf/2015/5-1/38002.pdf
3. Akhtyamov A. M. Izvestiya RAEN. Matematika. Matematicheskoe modelirovanie. Informatika i upravlenie. 2001. Vol. 5. No. 3–4. Pp. 103–110.
4. Akhtyamov A. M. Differentsial'nye uravneniya. 1999. Vol. 35 No. 8. Pp. 1127–1128.
5. Akhtyamov A. M. Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii [The theory of identification of boundary conditions]. Ufa: Gilem. 2008.
6. Vatul'yan A. O. Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Inverse problems in the mechanics of deformable solids]. Moscow: Fizmatlit. 2007.
7. Valeev N. F., Rabtsevich S. A., Nugumanov E. R.Vestnik SamGU. Ser.: Estestvennonauchnaya. 2009. No. 6(72).
8. Vol'pert A. I. Matem. sbornik. 1972. Vol. 88 No. 4. Pp. 578–588.
9. Denisov A. M. Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow: izd-vo MGU. 1994.
10. Komarov A. V., Penkin O. M., Pokornyi Yu. V. Izvestiya vuzov. 2000. Vol. 463. No. 4. Pp. 23–27.
11. Levitan B. M. [Sturm-Liouville inverse problems]. Moscow: Nauka 1984.
12. Marchenko V. A. [Sturm-Liouville operators and their applications]. Kiev: Naukova dumka. 1977.
13. Martynova Yu. V. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2011. Vol. 16. No. 1. Pp. 4–10.
14. Mandel'shtam L. I. [Lectures on the theory of vibrations]. Moscow: Nauka 1972.
15. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M. Differentsial'nye uravneniya. 1989. Vol. 25. No. 7. Pp. 1141–1150.
16. Pokornyi Yu. V., Karelina I. G. O funktsii Grina zadachi Dirikhle na grafe DAN SSSR. 991. Vol. 318 No. 3. Pp. 942–944.
17. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M. DAN SSSR. 1989. Vol. 309 No. 6. Pp. 1306–1308.
18. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L. Uspekhi matem. nauk. 1994. Vol. 49. No. 4. Pp. 140.
19. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borovskikh A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit. 2005. 272 pp. 80.
20. Pokornyi Yu. V., Provotorova E. N., Cherkashenko I. L. Nelineinye kolebaniya i teoriya upravleniya, Ustinov. 1985. No. 5. Pp. 49–57.
21. Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L. Doklaly RAN. 1999. Vol. 364. No. 3. Pp. 316–318.
22. Yurko V. Doklady akademii nauk. 2010. Vol. 432, No. 3. Pp. 318–321.

Received 05.03.2018.