УДК 517.4.43+517.4.94

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ IV ПОРЯДКА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

© Н. А. Сидельникова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 32.
Email: artsid2000@mail.ru

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения четвертого порядка на полуоси с вещественными коэффициентами при x→∞.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, асимптотические формулы, кратные корни, вырожденный случай.*

1. Введение

В теории сингулярных дифференциальных операторов центральное место занимают вопросы, связанные с изучением спектральных свойств операторов в зависимости от коэффициентов соответствующего дифференциального выражения. Исследованию асимптотического поведения решений уравнений вида:

$$ly=(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)} = \lambda y, 0 \le x < \infty,$$

при $x\to\infty$, здесь λ- комплексный параметр, $p_k(x)$– дважды непрерывно-дифференцируемые вещественные функции, посвящено большое количество работ. В статье [2] изучалось асимптотическое поведение фундаментальной системы решений уравнения $ly=\lambda y$ при $x\to\infty$ в случае, когда $p_n(x) = 0$, вклад всех остальных коэффициентов в асимптотические формулы одинаков и при $x\ge x_0$ $|p_{n-1}(x)| \ge cx^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Мы рассматриваем уравнение четвертого порядка и нам удалось ослабить данное условие на коэффициенты, приведенное в работе [2].

Целью настоящей работы является изучение асимптотики фундаментальной системы решений уравнения:

$$Ly = y^{IV}-2(p(x)y')' = \lambda y,\ 0 \le x \le \infty \qquad (1),$$

при $x\to\infty$

Введем следующее обозначения:

$$F(x, \lambda, \mu) = \mu^4-2p(x)\mu^2 + \lambda \qquad (2).$$

При $x\to\infty$ два корня характеристического уравнения μ_1 и μ_2 стремятся к нулю, а остальные корни μ_3 и μ_4 неограниченно растут по абсолютной величине.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. $p(x)= a\,x^{\alpha}$, где a, α- const : $a\neq 0$, $\alpha>0$;

2. $\mathrm{Re}\,(\mu_3(x, \lambda) - \mu_4(x, \lambda))$ не меняет знак при достаточно больших x;

3. при достаточно большом $x_0> 0$ и при $x \ge x_0$ имеет место оценка

$b \le \frac{\mu3(x,\lambda)}{\mu4(x,\lambda)} \le c$, где b,c – положительные константы.

Основным результатом работы является теорема, которая дает асимптотические формулы для четырех линейно-независимых решений уравнения (1).

2. Преобразование уравнения (1)

Заменим уравнение (1) системой линейных уравнений первого порядка. Для этого рассмотрим вектор-столбец

$$Y = (y,y^{[1]},y^{[2]},y^{[3]}),$$

где $y^{[\kappa]}(x)$ – это k-я квазипроизводная функции $y(x)$ (см. [1]). Тогда уравнение (1) эквивалентно системе

$$Y'= A(x, \lambda)\,.Y, \text{ где } A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2p(x) & 0 & -1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем необходимо привести матрицы $A(x, \lambda)$ к диагональному виду

$$T^{-1} AT=\Lambda,$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, $t_{ij} = \alpha_i \cdot \mu_i^{j-1}$, i=1,2,3, j=1,2,3,4, $t_{4j} = \alpha_j \cdot \mu_j (2p(x) - \mu_i^2)$,

$$\alpha_j = \left(\frac{\partial F(x,\lambda,\mu)}{\partial \mu}\right)^{-1/2} \tag{3}$$

Теперь при помощи замены $Y = T(x, \lambda)U$ приходим к системе

$$U' = (\Lambda(x, \lambda) - C(x, \lambda)U, \tag{4}$$

где $C(x, \lambda) = T^{-1}T'$, причем ее элементы определяются по формулам

$$c_{ij}(x, \lambda) = 0$$

$$c_{ij}(x, \lambda) = \frac{\alpha_i(x,\lambda)\alpha_j(x,\lambda)(-2p'_1(x)\mu_i(x,\lambda)\mu_j(x,\lambda))}{\mu_i(x,\lambda) - \mu_j(x,\lambda)}, \tag{5}$$

при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Полученная система (4) не является L-диагональной, поэтому в системе (4) произведем еще одну замену

$$U = B(x, \lambda)z,$$

$$\text{где } B(x, \lambda) = \begin{pmatrix} S(x,\lambda) & 0 \\ 0 & I + G(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$S(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}(x,\lambda)}{\upsilon_1(x_1) + \mu_1(x,\lambda)} \\ \frac{c_{12}}{\upsilon_1(x,\lambda) + \mu_1(x,\lambda)} & 1 \end{pmatrix}, \upsilon_{12}(x, \lambda) = \pm\sqrt{\mu_1^2(x,\lambda) - c_{12}^2(x,\lambda)} \tag{6}$$

$$G(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{34}(x,\lambda)}{\mu_3(x,\lambda) + \mu_4(x,\lambda)} \\ \frac{c_{43}(x,\lambda)}{\mu_4(x,\lambda) + \mu_3(x,\lambda)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

O – нулевая, а I – единичная матрицы 2-го порядка. Тогда мы получим следующую систему

$$z' = \operatorname{diag}\{\upsilon_1, \upsilon_2, \mu_3, \mu_4\}\, z - B^{-1}C_2Bz - B^{-1}B'z - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I+G)^{-1}\tilde{C}_3 G \end{pmatrix} z, \tag{8}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tilde{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & C_{34} \\ C_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Асимптотика решений уравнения (1)

Исследуем поведение при $x \to \infty$ матрицу входящих в качестве коэффициентов в правую часть системы (8).

Лемма 1: Элементы матрицы G
$g_{ij} \to 0$, при $x \to \infty$, i,j=3,4.
Доказательство: Согласно формулам (7), имеем, что

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_{34}}{\mu_3 - \mu_4} \\ \frac{c_{43}}{\mu_4 - \mu_3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_{34} \\ g_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные элементы симметричны, поэтому исследуем элемент g_{34}. Принимая во внимание формулы (2) и (3), по формуле (5) получаем, что

$$g_{34(x,\lambda)} = \frac{\alpha 3(x) \cdot \alpha 4(x)[-2p'(x)\mu_3(x,\lambda)\mu_4(x,\lambda)]}{(\mu_3(x,\lambda) - \mu_4(x,\lambda))^2} = \frac{-p'(x)}{8i\sqrt{p^2(x)+\lambda}\sqrt{p(x)+\sqrt{p^2(x)+\lambda}}}.$$

Согласно условию 1) имеем оценку $|g_{34}(x, \lambda)| \leq \text{const}\, \frac{|p'_{(x)}|}{|p(x)|^{3/2}}$, что и доказывает лемму.

Следствие 1: Для достаточно больших x матрица (I + G) обратима и

$$\|I + G\| \leq \text{const}, \|(I+G)^{-1}\| \leq \text{const (здесь } \|A(x)\| = \textstyle\sum_{ij} |a_{ij}(x)|).$$

Лемма 2: Элементы матрицы C_2 суммируемы на интервале $[x_0, \infty]$

Доказательство: $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку для нулевых элементов матрицы утверждение тривиально, а для всех нулевых элементов доказательство совершенно одинаково, проведем его для элемента $c_{13}(x, \lambda)$.

В силу формулы (5) имеем, что

$$c_{13}(x,\lambda) = \frac{\alpha_1(x,\lambda)\cdot\alpha_3(x,\lambda)\,[-2p'(x)\mu_1(x,\lambda)\mu_3(x,\lambda)]}{\mu_1(x,\lambda)-\mu_3(x,\lambda)} = \frac{-p'(x)\lambda^{1/4}}{2i^{1/4}\sqrt{p^2(x)+\lambda}\,\sqrt{p(x)-\sqrt{p^2(x)+\lambda}}-\sqrt{p(x)+\sqrt{p^2(x)+\lambda}}}.$$

В силу того, что $\mu_1 \sim \sqrt{-\frac{\lambda}{p(x)}}$, $\mu_3 \sim \sqrt{2p(x)}$, мы получаем, что $|c_{13}(x,\lambda)| \leq \mathrm{const}\,\frac{\left|p'_{(x)}\right|}{|p_1(x)|^{3/2}}$, откуда в силу условия 1) с очевидностью следует, что $\int_{x_0}^{\infty}|c_{13}(x,\lambda)|dx < \infty$. Что и доказывает лемму.

Лемма 3. Элементы матрицы $\tilde{C}_3 \cdot G$ суммируемы на интервале $[x_0, \infty]$.

Доказательство: $\tilde{C}_3 \cdot G = \begin{pmatrix} 0 & g_{34}\cdot c_{34} \\ g_{34}\cdot c_{34} & 0 \end{pmatrix}$.

Из леммы 1 следует оценка

$$|g_{34}(x,\lambda)| \leq \mathrm{const}\,\frac{|p`(x)|}{|p(x)|^{3/2}}.$$

Далее оценим элемент C_{34}, используя формулу (5):

$$c_{34}(x,\lambda) = \frac{-p'(x)\sqrt{\mu_3(x,\lambda)\cdot\mu_4(x,\lambda)}}{2\sqrt{(\mu_3^2(x,\lambda)-p(x))(\mu_4^2(x,\lambda)-p(x))(\mu_3(x,\lambda)-\mu_4(x,\lambda))}} = \frac{p'(x)}{4\sqrt{p^2(x)+\lambda}}.$$

Из полученной формулы следует оценка $|c_{34}(x,\lambda)| \leq \mathrm{const}\,\frac{\left|p_1'(x)\right|}{|p_1(x)|^{1/2}}$. Следовательно имеем, что

$$|g_{34}(x,\lambda)\cdot c_{34}(x,\lambda)| \leq \mathrm{const}\,\frac{\left|p_1'(x)\right|^2}{|p_1(x)|^{5/2}}.$$

Отсюда в силу условия 1) получаем, что $\int_{x_0}^{\infty}\left|\left(\tilde{C}_3(x,\lambda)\cdot G(x,\lambda)\right)_{ij}\right|dx < \infty$.

Следствие 2. Из леммы 3 и следствия 1 вытекает, что элементы матрицы $(I + G)^{-1} * \hat{C}_3 * G$ суммируемы на интервале $[x_0, +\infty)$.

Прежде, чем исследовать на суммируемость матрицу $B^{-1}B^1$ напомним, что

$$B^{-1}B' = \begin{pmatrix} S^{-1}S' & 0 \\ 0 & (I+G)^{-1}G' \end{pmatrix}, \qquad (9).$$

где матрицы S и S^{-1} определены соотношением (6).

Лемма 4. Элементы матрицы $S^{-1}S^1$ суммируемы на интервале $[x_0, \infty)$.

Доказательство: Непосредственно вычислениями из (6) получаем

$$S^{-1}S' = -\alpha\beta'\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}, \qquad (10).$$

$$\alpha = \frac{v_1+\mu_1}{2v_1} = \frac{\sqrt{\mu_1^2-c_{12}^2}+\mu_1}{2\sqrt{\mu_1^2-c_{12}^2}}, \qquad (11).$$

$$\beta = \frac{c_{12}}{v_1+\mu_1} = \frac{c_{12}}{\sqrt{\mu_1^2-c_{12}^2}+\mu_1}.$$

Далее из (5) имеем, что $c_{12}^{(x,\lambda)} = \frac{\alpha_1(x,\lambda)\alpha_2(x,\lambda)[-2p'(x)\mu_1(x,\lambda)\mu_2(x,\lambda)]}{\mu_1(x,\lambda)-\mu_2(x,\lambda)} = \frac{ip'(x)}{4\sqrt{p^2(x)+\lambda}}$. Таким образом получаем, что

$$c_{12} \sim \frac{i}{4}\cdot\frac{p'(x)}{p(x)}, \text{ при } x\to\infty. \qquad (12)$$

Далее исследуем на суммируемость функции $\alpha\beta'$. Поскольку

$$\beta' = \frac{\mu_1' * c_{12} - \mu_1 - c_{12}'}{c_{12}^2} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1^2 - c_{12}^2} - \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 - c_{12}^2}},$$

то $\alpha\beta' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_1' c_{12} - \mu_1 c_{12}'}{\mu_1^2 - c_{12}^2}$.

Теперь $\mu_1'(x,\lambda) = \left(\sqrt{p(x) - \sqrt{p^2(x) + \lambda}}\right)' == \frac{p'\sqrt{p^2+\lambda} - p * p'}{2\sqrt{p^2+\lambda}\sqrt{p - \sqrt{p^2+\lambda}}} \sim \frac{i\sqrt{\lambda}p'(x)}{\sqrt{2}p^{3/2}(x)}$ *при* $x \to \infty$.

Таким образом получаем, что

$$\left|\mu_1'(x,\lambda)\right| \leq \text{const}\,\frac{|p_1'(x)|}{|p_1(x)|^{3/2}}. \quad (13)$$

Далее рассмотрим

$$\mu_1^2 - c_{12}^2 = p - \sqrt{p^2 + \lambda} + \frac{(p')^2}{16(p^2+\lambda)} \sim \frac{-\lambda}{p}, \text{при } x \to \infty. \quad (14)$$

Тогда, используя оценки (12)-(14) имеем, что

$$\left|\frac{\mu_1' c_{12}}{\mu_1^2 - c_{12}^2}\right| \leq \text{const}\,\frac{|p'(x)|^2}{|p(x)|^{3/2}}.$$

Теперь рассмотрим, используя (5),

$$c_{12}' = \frac{i}{4}\left(\frac{p'(x)}{\sqrt{p^2(x)+\lambda}}\right)' = \frac{i}{4}\left(\frac{p''(x)}{\sqrt{p^2(x)+\lambda}} + \frac{p(x)\left(p'(x)\right)^2}{\left(p^2(x)+\lambda\right)^{3/2}}\right) \sim$$

$$\sim \frac{i}{4}\left(\frac{p''(x)}{p(x)} - \left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2\right), \text{при } x \to \infty. \quad (15)$$

Следовательно, в силу условия 1) получаем, что

$$\left|\frac{\mu_1' * c_{12}'}{\mu_1^2 - c_{12}^2}\right| \leq \text{const}\,\frac{|p'(x)|^2}{|p(x)|^{3/2}}. \quad (16)$$

Далее оценим, используя формулы (12) и (14),

$$\beta = \frac{c_{12}}{\nu_1 + \mu_1} = \frac{c_{12}}{\sqrt{\mu_1^2 - c_{12}^2} + \mu_1} \sim \frac{p'(x)}{4\lambda\sqrt{p(x)}}, \text{при } x \to \infty. \quad (17)$$

Поэтому элементы αβ' и αβ'β суммируемы на интервале $[x_0, +\infty)$ в силу оценок (14), (16), (17), что доказывает лемму.

Лемма 5. Элементы матрицы G'(x,λ) суммируемы на интервале $[x_0, \infty)$.

Доказательство: $G'(x,\lambda) = \begin{pmatrix} g'_{34}(x,\lambda) & 0 \\ 0 & g'_{43}(x,\lambda) \end{pmatrix}$.

Далее будем проводить доказательство для элемента g'_{34}, так как для элемента g'_{43} оно аналогично. Согласно формуле (7):

$$g'_{34}(x,\lambda) = \frac{i}{8}\left(\frac{p'(x)}{\mu_3(x,\lambda)\sqrt{p^2(x)+\lambda}}\right)' == \frac{i}{8}\left[\frac{p''(x)}{\mu_3\sqrt{p^2(x)+\lambda}} - \frac{p'(x) * \mu_3'}{\mu_3^2\sqrt{p^2(x)+\lambda}} - \frac{p(x) * (p'(x))^2}{\mu_3\left(p^2(x)+\lambda\right)^{3/2}}\right] == \frac{i}{8}(I_1 - I_2 - I_3).$$

Теперь получаем, что

$$I_1(x,\lambda) \sim const\,\frac{p''(x)}{p(x)^{3/2}}, \text{при } x \to \infty$$

$$I_2 \sim const\,\frac{(p'(x))^2}{p(x)^{3/2}}, \text{при } x \to \infty$$

$$I_3 \sim const\,\frac{(p'(x))^2}{p(x)^{5/2}}, \text{при } x \to \infty.$$

В силу полученных оценок для I_1, I_2 и I_3 следует, что лемма доказана.

Теперь, применив лемму 2 из [1, с. 288–292] и возвращаясь с помощью двух замен к переменной Y, приходим к следующей теореме:

Теорема: Пусть выполнены условия 1–3. Тогда уравнение (1) имеет четыре линейно независимых решений $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, $y_3(x,\lambda)$, $y_4(x,\lambda)$, таких, что при $x\to\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$y_1^{[k]}(x,\lambda)\sim(\alpha_1\mu_1^k+s_{21}\alpha_2\mu_2^k)exp\int_{x_0}^{x}\nu_1(t,\lambda)dt,$$

$$y_1^{[3]}(x,\lambda)\sim(\alpha_1\mu_1(2p-\mu_1^2)+\alpha_2 s_{21}\mu_2(2p-\mu_2^2))\exp(\int_{x_0}^{x}\nu_1(t,\lambda)dt),$$

$$y_2^{[k]}(x,\lambda)\sim(\alpha_2\mu_2^k+s_{12}\alpha_1\mu_1^k)exp\int_{x_0}^{x}\nu_2(t,\lambda)dt,$$

$$y_2^{[3]}(x,\lambda)\sim(\alpha_2\mu_2(2p-\mu_2^2)+\alpha_1 s_{12}\mu_1(2p-\mu_1^2))\exp(\int_{x_0}^{x}\nu_2(t,\lambda)dt),$$

$$y_3^{[k]}(x,\lambda)\sim(\alpha_3\mu_3^k+g_{43}\alpha_4\mu_4^k)\exp(\int_{x_0}^{x}\mu_3(t,\lambda)dt),$$

$$y_3^{[3]}(x,\lambda)\sim(\alpha_3\mu_3(2p-\mu_3^2)+\alpha_4 g_{43}\mu_4(2p-\mu_4^2))\exp(\int_{x_0}^{x}\mu_3(t,\lambda)dt),$$

$$y_4^{[k]}(x,\lambda)\sim(\alpha_4\mu_4^k+g_{34}\alpha_3\mu_3^k)\exp(\int_{x_0}^{x}\mu_4(t,\lambda)dt),$$

$$y_4^{[3]}(x,\lambda)\sim(\alpha_4\mu_4(2p-\mu_4^2)+\alpha_3 g_{34}\mu_3(2p-\mu_3^2))\exp(\int_{x_0}^{x}\mu_4(t,\lambda)dt),$$

где $k = 0, 1, 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Султанов Я. Т. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае. Тр. сем. им. Петровского. Вып. 13. 1988. с. 36–55.
3. Федорюк М. В. Асимптотические методы для множественных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 21.05.2018 г.

THE ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER IN DEGENERATE CASE

© N. A. Sidelnikova

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 32.
Email: artsid2000@mail.ru

In the theory of singular differential operations, the central place is occupied by the issue of studying the spectral properties of operators, depending on the coefficients of the appropriate differential expression. Many works were devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions of differential equations of the form:

ly=$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \,(p_{n-k}(x)y^{(k)})^{(k)} = \lambda y, 0 \le x < \infty,$

where x→∞, λ is the complex parameter, $p_k(x)$ are twice continuously differentiable functions.

The behavior of the fundamental system of solutions of the equation ly=λy at x→∞ was considered in the case then the contribution of all coefficients in the asymptotic formulas was the same and $p_n(x) = 0, |p_{n-1}(x)| \ge cx^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ at x≥x_0. The author of the article studied the differential equation of the fourth order and succeeded in weakening these conditions on the coefficients. The aim of this work is the study of the asymptotics of the fundamental system of solutions Ly = y^{IV}-2(p(x)y′)′ = λy, 0 ≤ x ≤ ∞ (1), when x→∞. The author introduced the following notations: F(x, λ, μ) = μ^4-2p(x)μ^2 + λ, (2), where $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ are the roots of characteristic equation (2). Let us assume that the following conditions are satisfied:

1. p(x) = a x^{α}, where a, α is a constant: a ≠ 0, α > 0;
2. Re (μ_3(x, λ) - μ_4(x, λ)) does not change the sign at sufficiently large x;
3. At sufficiently large x_0 > 0 and then x ≥ x_0, the following estimate holds b ≤ $\frac{\mu 3(x,\lambda)}{\mu 4(x,\lambda)}$ ≤ c, where b and c are positive constants.

The main result of the article is the theorem, which gives the asymptotic formulas of solutions of the equation (1), when x→∞.

Keywords: differential equation, solution, asymptotics, degenerate case, operator.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Maimark M. A. Lineinye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969.
2. Sultanov Ya. T. Asimptotika reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii v vyrozhdennom sluchae [Asymptotics of solutions of ordinary differential equations in the degenerate case]. Tr. sem. im. Petrovskogo. No. 13. 1988. s. 36–55.
3. Fedoryuk M. V. Asimptoticheskie metody dlya mnozhestvennykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Asymptotic methods for multiple ordinary differential equations]. Moscow: Nauka, 1983.

Received 21.05.2018.