УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАТИМОСТИ ПО ЭРЕНПРАЙСУ

© Н. Ф. Абузярова*, В. С. Шустов

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (927) 326 16 13.
**Email: abnatf@gmail.com*

Изучаются условия на сдвиг целочисленной последовательности, при которых она будет оставаться нулевым множеством обратимой по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца $\mathcal{P}$ целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси. При этом функция из $\mathcal{P}$ называется обратимой по Эренпрайсу, если (алгебраически) порожденный ею идеал в $\mathcal{P}$ замкнут.

Ключевые слова: *целые функции, распределение нулевого множества, алгебра Шварца.*

Введение

Определим класс $\mathcal{P}$ состоящим из всех целых функции f, для которых существуют постоянные $C_f > 0$, $a_f > 0$, $m_f \in \mathbb{N}$, такие, что

$$|f(z)| \le C_f e^{a_f |Im(z)|} (1 + |z|)^{m_f} .$$

Из соотношений

$$(1 + |z|)^{m_f} = e^{m_f \ln(1+|z|)} = e^{o(|z|)}$$

видим, что это целые функции экспоненциального типа, не превосходящего a_f:

$$|f(z)| \le C_f e^{\left(a_f + o(1)\right)|z|}.$$

Определение: Если $f \in \mathcal{P}$, и для любого $g \in H(\mathbb{C})$ из того, что $gf = F \in \mathcal{P}$ вытекает что $g = \frac{F}{f} \in \mathcal{P}$, то f называется *обратимой по Эренпрайсу* в $\mathcal{P}$ (см. [1]).

Из определения обратимой функции видим, что

$$|fg| \le \tilde{C} e^{\tilde{a}|Im(z)|}(1 + |z|)^{m_f} .$$

И вне нулей функции f

$$|g| \le \frac{\tilde{C} e^{\tilde{a}|Im(z)|}(1 + |z|)^{m_f}}{|f|}.$$

Возникает вопрос: при каких ограничениях на множество нулей функции f, она будет обратимой?

Определение: Целая функция экспоненциального типа называется *функцией типа синуса*, если для нее существуют постоянные c и C, такие, что выполняется двусторонняя оценка

$$0 < c \le |F(z)| e^{-\pi |Imz|} \le C < +\infty.$$

В качестве примера функции типа синуса можно привести функцию

$$s(z) = \sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right).$$

Нулями функции $s(z)$ будут все целые числа, и для этой функции вне малых d_0 окрестностей нулей верны оценки

$$|s(x)| \le 1$$

и

$$|s(x)| \ge m_{d_0} ,$$
где $|x - j| \ge d_0, m_{d_0} > 0, x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функции вида

$$f(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \tag{0}$$

где последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\}$ *такова, что предел в (0)* существует и определяет целую функцию.

Пусть нули f имеют вид

$$\lambda_k = k + l(|k|), k \in \mathbb{Z},$$

где l – некоторая вещественная функция на неотрицательной полуоси.

В статье А.А.Юхименко[2] дан ответ на вопрос: какой должна быть функция l, чтобы $f(z)$ была функцией типа синуса?

В данной статье будут изучаться условия на функцию l, при которых функция f с такими нулями обратима.

Условия обратимости по Эренпрайсу

Рассмотрим вещественнозначную дифференцируемую функцию $l(t)$ на луче $[0, \infty)$, для которой выполнены следующие условия:

$$l(0) = 0, \tag{1}$$

$$l(t) = o(t), t \to \infty, \tag{2}$$

$$l'(t) = O\left(\frac{\ln(t)}{t}\right), t \to \infty. \tag{3}$$

Определим последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}, j \neq 0, \tag{4}$$

где

$$\lambda_k = k + l(|k|), k = \pm1, \pm2, \ldots \tag{5}$$

Элементы последовательности Λ отстоят друг от друга на расстояние $\delta \geq \frac{1}{2}$:

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} = k - (k-1) + l(k) - l(k-1) = 1 + l'(k^*) \geq \frac{1}{2},$$
$$\text{при} \quad k^* \in [k, k-1],\ k \geq k_0 .$$

Функция

$$\lambda(t) = t + l(|t|) \tag{6}$$

будет строго возрастающей при $|t| \geq t_0$, причем $\lambda(t) = t + o(t)$. Обратная к ней функция $\lambda^{-1}(t)$ будет определена при достаточно больших по модулю значениях аргумента t и

$$\lambda^{-1}(t) = t + o(t), t \to \infty. \tag{7}$$

Найдем более точное значение $\lambda^{-1}(t)$. Подставим $x = \lambda^{-1}(t)$ в уравнение

$$x = \lambda(x) - l(|x|),$$

получим

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|\lambda^{-1}(t)|) = t - l(|t|) + \big(l(|t|) - l(|\lambda^{-1}(t)|)\big). \tag{8}$$

По теореме Лагранжа

$$\big(l(|t|) - l(|\lambda^{-1}(t)|)\big) = sgn\big(\xi(t)\big) \cdot l'(|\xi(t)|)\big(t - \lambda^{-1}(t)\big) == sgn(t) \cdot l'(|\xi(t)|)\big(t - \lambda^{-1}(t)\big),$$

где $\xi(t)$ – некоторая точка, лежащая между t и $\lambda^{-1}(t)$. Оценка *(7)* дает

$$\lambda^{-1}(t) - t = o(t),$$

и т.к. $\xi(t) \in [\lambda^{-1}(t), t]$, заключаем, что

$$\xi(t) \sim t, t \to \infty \tag{9}$$

Обозначим $A(t) := sgn(t) \cdot l'(|\xi(t)|)$. Воспользовавшись оценками *(3)* и *(9)*, получаем, что

$$A(t) = O\left(l'\left(\frac{|t|}{2}\right)\right) = o(1), t \to \infty \tag{10}$$

В новых обозначениях (8) перепишется следующим образом:

$$\lambda^{-1}(t)\big(1 + A(t)\big) = t - l(|t|) + A(t)t.$$

Разделим левую и правую часть равенства на $(1 + A(t))$ и применим оценку *(10):*

$$\lambda^{-1}(t) = t - l(|t|) + l(|t|)\tfrac{A(t)}{1+A(t)} = t - l(|t|) + O\left(l(|t|)l'\left(\tfrac{t}{2}\right)\right). \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \tag{12}$$

Пусть $l(t)$ удовлетворяет условиям *(1)*, *(3)* и

$$l(t) = O(ln(t)), \ t \to \infty. \tag{2'}$$

Теорема 1. *Для функции $\varphi(z)$ верно*

$$ln|\varphi(x)| = O(ln|x|),$$
$$\text{при } |x| \to +\infty, |x - \lambda_k| \geq d_0 > 0, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{13}$$

Для доказательства воспользуемся леммой С. Ю. Фаворова[3]:

Лемма Фаворова: *Пусть $\{a_k\}$ – последовательность комплексных чисел, отличных от нуля, и $n(z,t)$ – число точек a_k, принадлежащих множеству*

$$\{w: |z - w| \leq t\}.$$

Предположим, что для последовательности $\{a_k\}$ выполнены следующие условия:
1) существует предел

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{0<|a_k|<R} a_k^{-1} \in \mathbb{C},$$

2) $n(0,t) = O(t)$, *при* $t \to \infty$,
3) $n(0, t+1) - n(0,t) = o(t)$, *при* $t \to \infty$.
Тогда

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_k|<R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

– целая функция экспоненциального типа и

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty \frac{n(0,t) - n(z,t)}{t} dt, z \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Убедимся, что наша последовательность Λ удовлетворяет условиям леммы Фаворова:
1):

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \left(\frac{1}{k + l(|k|)} + \frac{1}{-k + l(|k|)}\right) = \lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{2l(|k|)}{k^2 + l^2(|k|)} \leq \lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{k^\varepsilon}{k^2 + l^2(|k|)} =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<R} \frac{1}{k^{2-\varepsilon}} < \infty$$

2):

Обозначим $\Lambda(t)$ считающую функцию последовательности Λ, т.е. функцию, которая при $t > 0$ равна количеству точек последовательности Λ на интервале $(0, t)$, а при $t < 0$ равна минус количеству точек последовательности Λ на промежутке $(t, 0]$. Поскольку последовательность Λ имеет вид $\Lambda = \{\lambda(n), n \in \mathbb{Z}\}$ и функция $\lambda(t)$ строго монотонна, то при достаточно больших t

$$\Lambda(t) = [\lambda^{-1}(t)]$$

Отсюда

$$\mathrm{n}(0, \mathrm{t}) = \Lambda(t) - \Lambda(-t) \le t - l(|t|) - \big(-t - l(|-t|)\big) + O(1) = 2t + O(1) = O(t), t \to +\infty.$$

3):

$$\begin{aligned} n(0, t+1) - n(0, t) &= \Lambda(t+1) - \Lambda(-t-1) - \Lambda(t) + \Lambda(-t) \\ &\le \big(t + 1 - l(|t+1|)\big) - \big(-t - 1 - l(|-t-1|)\big) - \big(t - l(|t|)\big) + \big(-t - l(|-t|)\big) + O(1) \\ &= 2 + O(1) = O(1) = o(t), t \to +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность Λ удовлетворяет условиям леммы Фаворова и, в частности,

$$\ln|\varphi(x)| = \int_0^\infty \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt, x \in \mathbb{R},$$

где φ определяется формулой *(12)*

Пусть $x > 0$ (для $x < 0$ – рассуждения аналогичны). Разобьем интеграл на четыре интеграла:

$$\ln|\varphi(x)| = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt + \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt + \int_{2x}^{x^2} \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt + \int_{x^2}^{\infty} \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{n(0, t) - n(x, t)}{t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\Lambda(t) - \Lambda(-\mathrm{t}) - \Lambda(\mathrm{x} + \mathrm{t}) + \Lambda(\mathrm{x} - \mathrm{t})}{t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{t - l(t) - (-t - l(t)) - (x + t - l(x+t)) + (x - t - l(x-t)) + O(1)}{t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{l(x+t) - l(x-t)}{t} dt + O(\ln(x)) = \int_0^{\frac{x}{2}} 2l'(\tilde{t}) dt + O(\ln(x)),\ x \to +\infty$$

здесь $\tilde{t} \in [x - t, x + t]$

Пользуясь условием (3), получаем оценку для $l'(\tilde{t})$:

$$l'(\tilde{t}) = O\left(\frac{\ln\tilde{t}}{\tilde{t}}\right) \le C \frac{\ln\tilde{t}}{\tilde{t}} \le C \frac{\ln(x-t)}{(x-t)}.$$

Итак,

$$I_1 = \int_0^{\frac{x}{2}} 2l'(\tilde{t}) dt + O(\ln(x)) = O\left(\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\ln(x-t)}{(x-t)} dt\right) + O(\ln x) \le$$

$$\le O\left(\ln x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}}\right) + O(\ln(x)) = O(\ln(x)), x \to +\infty.$$

Учитывая условие

$$|x-\lambda_k| \geq d_0, \quad d_0 > 0,$$

запишем I_2 в виде суммы :

$$I_2 = \int_{\frac{x}{2}}^{x-d_0} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt + \int_{x-d_0}^{x} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt + \int_{x}^{x+d_0} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt + \int_{x+d_0}^{2x} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt =$$
$$= I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}$$

И далее:

$$I_{21} = \int_{\frac{x}{2}}^{x-d_0} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt = \int_{\frac{x}{2}}^{x-d_0} \frac{l(|x+t|)-l|(x-t|)}{t}dt + O(1)$$
$$= \int_{\frac{x}{2}}^{x-d_0} \frac{l(x+t)-l(x)+l(x)-l(x-t)}{t}dt = \left| \begin{matrix} t=\sigma x \\ \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1-\frac{d_0}{x} \\ dt = x d\sigma \end{matrix} \right|$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{d_0}{x}} \frac{l\big((1+\sigma)x\big)-l(x)+l(x)-l((1-\sigma)x)x}{\sigma x} d\sigma =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{d_0}{x}} \frac{l\big((1+\sigma)x\big)-l(x)}{\sigma} d\sigma + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{d_0}{x}} \frac{l(x)-l\big((1-\sigma)x\big)}{\sigma} d\sigma = \left| \begin{matrix} \delta = 1-\sigma \\ d\sigma = -d\delta \end{matrix} \right| =$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{d_0}{x}} \frac{l'\big((1+\tilde{\sigma})x\big)\sigma x}{\sigma} d\sigma + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{d_0}{x}} \frac{l(x)-l(\delta x)}{1-\delta}(-d\delta) \leq \leq O\left(\frac{\ln(2x)}{x}x\right) + 2\int_{\frac{d_0}{x}}^{\frac{1}{2}} l(x)-l(\delta x)d\delta, x \to +\infty.$$

Используя замену

$$\lambda(s) = l(e^s), \lambda'(s) = l'(e^s)e^s,$$

преобразуем подынтегральное выражение в правой части:

$$l(x)-l(\delta x) = l(e^{lnx}) - l\big(e^{lnx+ln\delta}\big) = \lambda(lnx) - \lambda(lnx+ln\delta) = \lambda'(s^*)\cdot(-ln\delta) = l'\big(e^{s^*}\big)e^{s^*}(-ln\delta) =$$
$$= l'(x^*)x^*(-ln\delta),$$

где $s \in [lnx, lnx+ln\delta], x \in [\delta x, x]$.
Имеем для I_{21}:

$$I_{21} = O(lnx) + 2\int_{\frac{d_0}{x}}^{\frac{1}{2}} |l(|x|)-l(|\delta x|)| d\delta =$$
$$= O(lnx) + 2\int_{\frac{d_0}{x}}^{\frac{1}{2}} O(\ln x)(-\ln\delta)d\delta =$$
$$= O(\ln x) + O(\ln x)\cdot \int_{\frac{d_0}{x}}^{\frac{1}{2}} -\ln\delta d\delta =$$
$$=O(\ln x) + O(\ln x)\cdot O(1) = O(\ln x), x \to +\infty.$$

Аналогично получим оценку I_{24}:

$$I_{24} = \int_{x+d_0}^{2x} \frac{l(x+t) - l(x) + l(x) - l(x-t)}{t} dt = \left| \begin{matrix} t = \sigma x \\ 1 + \frac{d_0}{x} \le \sigma \le 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{1+\frac{d_0}{x}}^{2} \frac{l\big((1+\sigma)x\big) - l(x)}{\sigma} d\sigma + \int_{1+\frac{d_0}{x}}^{2} \frac{l(x) - l\big((1-\sigma)x\big)}{\sigma} d\sigma =$$

$$= \left| \begin{matrix} \delta = \sigma - 1 \\ \frac{d_0}{x} \le \delta \le 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{1+\frac{d_0}{x}}^{2} l'\big((1+\tilde{\sigma})x\big) x d\sigma + \int_{\frac{d_0}{x}}^{1} \frac{l(x) - l(\delta x)}{\delta + 1} d\delta \le$$

$$\le O(\ln x) + \int_{\frac{d_0}{x}}^{1} \ln\delta d\delta \cdot \ln x = O(\ln x)\big(2 + o(1)\big) = O(\ln x), x \to +\infty.$$

Интегралы I_{22} и I_{23} оцениваются так же, как и интеграл I_1:

$$I_{22} = \int_{x-d_0}^{x} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} dt =$$

$$= \int_{x-d_0}^{x} \frac{\Lambda(t) - \Lambda(-\mathrm{t}) - \Lambda(\mathrm{x}+\mathrm{t}) + \Lambda(\mathrm{x}-\mathrm{t})}{t} dt$$

$$= \int_{x-d_0}^{x} \frac{t - l(t) - (-t - l(t)) - (x + t - l(x+t)) + (x - t - l(x-t)) + O(1)}{t} dt$$

$$= \int_{x-d_0}^{x} \frac{l(x+t) - l(x-t)}{t} dt + O(1) \cdot \ln\left(\frac{x}{x-d_0}\right) \le$$

$$\le \int_{x-d_0}^{x} \frac{l(x+t) + l(x+t)}{t} dt + o(1) \le 2 \int_{x-d_0}^{x} \frac{l(2x)}{x-d_0} dt + o(1), x \to +\infty.$$

Учитывая что $d_0 \ll x$ и пользуясь условием $l(x) = O(\ln(x))$, получим:

$$I_{22} = \frac{O(\ln(x))}{x-d_0} d_0 + o(1) = o(1), x \to +\infty.$$

Аналогично выведем оценку для I_{23}:

$$\int_{x}^{x+d_0} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} dt =$$

$$= \int_{x}^{x+d_0} \frac{\Lambda(t) - \Lambda(-\mathrm{t}) - \Lambda(\mathrm{x}+\mathrm{t}) + \Lambda(\mathrm{x}-\mathrm{t})}{t} dt$$

$$= \int_{x}^{x} \frac{t - l(t) - (-t - l(t)) - (x + t - l(x+t)) + (x - t - l(x-t)) + O(1)}{t} dt =$$

$$= \int_{x}^{x+d_0} \frac{l(x+t)-l(x-t)}{t}dt + O(1)\cdot \ln\left(\frac{x+d_0}{x}\right) \le$$

$$\le \int_{x}^{x+d_0} \frac{l(x+t)+l(x+t)}{t}dt + o(1) \le 2\int_{x}^{x+d_0} \frac{l(3x)}{x}dt + o(1) =$$

$$= \frac{O(\ln(x))}{x}d_0 + o(1) = o(1)$$

Для оставшихся интегралов имеет место условие $t > x$. Принимая это во внимание, имеем:

$$I_3 = \int_{2x}^{x^2} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt = \int_{2x}^{x^2} \frac{-\Lambda(-\mathrm{t})+\Lambda(-\mathrm{t}+\mathrm{x})}{t}dt - \int_{2x}^{x^2} \frac{\Lambda(\mathrm{t}+\mathrm{x})-\Lambda(t)}{t}dt = I_{31}+I_{32}$$

и далее получим:

$$I_{31} = \int_{2x}^{x^2} \frac{[-t+l(t))]-[-t+x+l(t-x)]}{t}dt == \int_{2x}^{x^2} \frac{l(t)-l(t-x)-x+O(1)}{t}dt =$$

$$= \int_{2x}^{x^2} \frac{l(t)-l(t-x)}{t}dt - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) \le$$

$$\le x\int_{2x}^{x^2} \frac{O\left(\frac{\ln(t-x)}{t-x}\right)}{t}dt - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) == O\left(\int_{2x}^{x^2} \frac{x\ln(t-x)}{t(t-x)}dt\right) - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) =$$

$$= O\left(\ln x \cdot \int_{2x}^{x^2} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t}\right)dt\right) - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) =$$

$$= O\left(\ln x\left(\ln\frac{x^2-x}{x^2} - \ln\frac{1}{2}\right)\right) - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) = O(\ln x) - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t}$$

И аналогично для I_{32}:

$$I_{32} = \int_{2x}^{x^2} \frac{[t+x-l(t+x)]-[t-l(t)]}{t}dt = \int_{2x}^{x^2} \frac{x-(l(t+x)-l(t))}{t}dt + O(\ln x) = x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x)$$

Имеем:

$$I_{31} + I_{32} = O(\ln x) - x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + x\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{t} + O(\ln x) = O(\ln x)$$

Для оценки последнего интеграла, заметим, что при условиях, наложенных выше на функцию $l(t)$, справедливо асимптотическое соотношение:

$$\left|\int_{x^2}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt - \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}dt + \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}dt\right| = O(1). \qquad (15)$$

Докажем это утверждение:

$$\int_{x^2}^{\infty} \frac{n(0,t)-n(x,t)}{t}dt - \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t)-\lambda^{-1}(-t)}{t}dt + \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t)-\lambda^{-1}(x-t)}{t}dt$$

$$= \int_{x^2}^{\infty} \frac{\zeta(t)-\zeta(-t)+\zeta(x+t)-\zeta(x-t)}{t}dt,$$

где $\zeta(t) = \frac{1}{2} - \{\lambda^{-1}(t)\}$.

Для первообразной $Z(t) = \int_0^t \zeta(\tau)d\tau$ функции ζ справедлива оценка

$$|Z(t)| = O(|t|), |t| \to \infty \,. \tag{16}$$

Действительно:

$$|Z(t)| = \left| \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \{\lambda^{-1}(t)\} \right) d\tau \right| = \left| \int_0^{\lambda^{-1}(t)} \left(\frac{1}{2} - y \right) \lambda^{'}(y) dy \right| \le \frac{3}{2} \left| \int_0^{\lambda^{-1}(t)} |\lambda^{'}(y)| dy \right| == O(|t|), |t| \to \infty \,.$$

Из оценки *(16)*, и того, что

$$\int_0^t \zeta(-\tau)d\tau = -Z(-t), \int_0^t \zeta(x+\tau)d\tau = Z(x+t) - Z(x), \int_0^t \zeta(x-\tau)d\tau = Z(x) - Z(x-t),$$

нетрудно вывести оценку

$$\left| \int_{x^2}^{\infty} \frac{n(0,t) - n(x,t)}{t} dt - \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(-t)}{t} dt + \int_{x^2}^{\infty} \frac{\lambda^{-1}(x+t) - \lambda^{-1}(x-t)}{t} dt \right| = O(1).$$

Воспользовавшись соотношением *(15)*, имеем:

$$I_4 = \int_{x^2}^{\infty} \frac{-\Lambda(-\mathrm{t}) + \Lambda(-\mathrm{t}+\mathrm{x})}{t} dt - \int_{x^2}^{\infty} \frac{\Lambda(\mathrm{t}+\mathrm{x}) - \Lambda(t)}{t} dt =$$

$$= \int_{x^2}^{\infty} \frac{x - l(t) + l(t-x)}{t} dt - \int_{x^2}^{\infty} \frac{x + l(t+x) - l(t)}{t} dt + O(1) =$$

$$= I_{41} - I_{42} + O(1).$$

Для I_{41} получим:

$$I_{41} = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x - l(t) + l(t-x)}{t} dt = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O\left(x \cdot \int_{x^2}^{\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \right) = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O(1),$$

и аналогично для I_{42}:

$$I_{42} = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x + l(t+x) - l(t)}{t} dt = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O\left(x \cdot \int_{x^2}^{\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \right) = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O(1).$$

В результате имеем:

$$I_4 = I_{41} - I_{42} = \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O(1) - \int_{x^2}^{\infty} \frac{x}{t} dt + O(1) = O(1)$$

Соединяя полученные для I_1, I_2, I_3 и I_4 оценки, получим требуемую оценку для φ. Теорема доказана. *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00002).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division, IV // Amer. Journal of Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
2. Юхименко А. А. Об одном классе функций типа синуса // Матем. заметки, 2008, Т 83. Вып. 6. С. 941–954.
3. Фаворов С. Ю. Множества нулей целых функций экспоненциального типа с дополнительными условиями на вещественной прямой // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. №1. С. 138–145.

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

ON CONDITIONS OF EHRENPREIS INVERTIBILITY

© N. F. Abuzyarova*, V. S. Shustov

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (927) 326 16 13.
**Email: abnatf@gmail.com*

The authors of the article study the following question: under what restrictions the shifts of integers form zero sets of Ehrenpreis invertible functions in the Schwartz bra $\mathcal{P}$. Here $\mathcal{P}$ is the set of all entire functions having exponential type in the complex plane and polynomial growth along the real axis. The function in $\mathcal{P}$ is considered to be Ehrenpreis invertible if it (algebraically!) generates the closed ideal in $\mathcal{P}$. At the moment, there are only few works that contain results on the zero sets of the Ehrenpreis invertible functions. There are much more papers and monographs in which their authors deal with zero sets of the sine-type functions. Each Ehrenpreis invertible function is also an element of some Schwartz topological module $\mathcal{P}(-a;a)$, where a is a positive real number. This module (under the ring of all polynomials) is defined as a subspace of $\mathcal{P}$, containing the functions from $\mathcal{P}$ which types with respect to the order 1 do not exceed a. The module $\mathcal{P}(-a;a)$ and its submodules are effective “tools” for studying the spectral synthesis problem in the Schwartz space E(-*a*; *a*) of all infinitely differentiable functions on the interval (-*a*; *a*). Previously, the authors obtained some results in the study of the possibility of the (weak) spectral synthesis for the differentiation invariant subspaces of E(-*a*; *a*). There is an interesting unsolved problem related to the spectral synthesis. It is the fundamental principle problem for the differentiation invariant subspaces of the E(-*a*; *a*), taking into consideration the weak spectral synthesis. The authors are going to use the results obtained in the present work in the study of the fundamental principle problem of invariant subspaces of the Schwartz space.

Keywords: entire functions, zero set, distribution, Schwartz algebra.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Ehrenpreis L. Amer. Journal of Math. 1960. Vol. 57. Pp. 522–588.
2. Yukhimenko A. A. Matem. zametki, 2008, T 83. No. 6. Pp. 941–954.
3. Favorov S. Yu. Algebra i analiz. 2008. Vol. 20. No. 1. Pp. 138–145.

Received 29.05.2018.