

УДК 517.4+519.71+519.688

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНО-РЕЗОНАНСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БАЛКИ ЭЙЛЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ УПРУГИМИ КРЕПЛЕНИЯМИ

© Д. Н. Валеева¹, К. В. Трунов^{2*}

¹Московский государственный университет
Россия, 119991 г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, стр. 2.

²Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 65.

*Email: trounovkv@mail.ru

Рассмотрена модель малых изгибных колебаний балки в одной плоскости шарнирно закрепленной на концах и дополнительными упругими креплениями в точках x_1, x_2, \dots, x_n под действием внешней силы $f(x, t)$ и начальных данных: начальным прогибом и начальной скоростью. Данная модель основана на уравнении колебаний балки – уравнении Эйлера -Бернулли. С помощью метода конечных элементов получены формулы для численного расчета собственных значений и собственных форм колебаний балки, на основе которых разработан алгоритм решения задачи. На основе полученного алгоритма разработана программа на языке Matlab, которая позволяет исследовать формы колебаний и их частоты в зависимости точек крепления балки x_1, x_2, \dots, x_m и коэффициентов упругости k_1, k_2, \dots, k_m . Разработанная программа может быть полезна при исследовании и моделировании резонансных свойств балки с упругими креплениями.

Ключевые слова: метод конечных элементов, динамические системы, собственные значения, управление собственными частотами, математические модели, matlab.

Постановка задачи

Будем рассматривать малые, низкочастотные, плоские колебания однородного, прямого стержня. Через $\mathbf{u}(x, t)$ обозначим компоненту вектора смещения зависящую от одной пространственной координаты x , отсчитываемой вдоль оси недеформируемого стержня длины l , и времени t , которая описывает деформации изгиба оси стержня. Для получения уравнения колебаний балки достаточно выписать функционалы кинетической и потенциальной энергии, а также учесть работу внешних сил. Затем с помощью известного принципа наименьшего действия выводится соответствующее дифференциальное уравнение с учетом того, что мы рассматриваем задачу в которой балка прикреплена к неподвижному основанию в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ с помощью упругих пружин с коэффициентами упругости $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m$. В итоге мы получаем уравнение с обобщенными функциями $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$.

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \sum_{j=1}^n k_j \delta(x - x_j) u(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{m}{EI}$, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{EI}$, $F(x, t)$ – внешняя сила.

Так как концы стержня шарнирно закреплены, получаем следующие граничные условия

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

Начальные условия :

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (3)$$

Для того чтобы найти собственные изгибные колебания балки (формы стоячих волн) в уравнении (1) положим $f(x, t) = 0$.

Будем искать решения в виде $u(x, t) = y(x)e^{i\omega t}$, подставляя в (1) получаем проблему собственных значений:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + \sum_{j=1}^n k_j \delta(x - x_j) y(x) = \lambda a^2 y(x) \quad (4)$$

где $\lambda = \omega^2$.

$$y(0) = y(l) = 0, \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

Будем искать λ – собственные значения и собственные функции $y(x)$, удовлетворяющие (4)–(5). Заметим, что собственные функции и собственные значения задачи (4)–(5) образуют бесконечную последовательность.

Алгоритм решения задачи

Перейдем к системе дифференциальных уравнений. Пусть $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y''(x)$. Тогда справедливы соотношения:

$$y_1''(x) = y_2(x), \quad (6)$$

$$y_2''(x) = \left(\lambda a^2(x) - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j) \right) y_1(x). \quad (7)$$

Получаем систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка для вектор-функции $\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, которая имеет вид:

$$\bar{Y}'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda a^2 - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j) & 0 \end{pmatrix} \bar{Y}, \quad (8)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} y_1''(x) \\ y_2''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda a^2 - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

При этом граничные условия будут представлены следующим образом:

$$\bar{Y}(0) = \bar{Y}(l) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} (y_1''(x) - y_2(x), \varphi(x)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^l (y_1''(x) - y_2(x)) \varphi(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(y_2''(x) - \left(\lambda a^2(x) - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j) \right) y_1(x), \psi(x) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^l (y_2''(x) - (\lambda a^2(x) - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j)) y_1(x)) \psi(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^l (y_1''(x) - y_2(x)) \varphi(x) dx &= \\ y_1'(x) \varphi(x) \Big|_0^l - \int_0^l y_1'(x) \varphi'(x) dx - \int_0^l y_2(x) \varphi(x) dx &= 0 \Rightarrow \\ \int_0^l y_1'(x) \varphi'(x) dx + \int_0^l y_2(x) \varphi(x) dx &= 0. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l (y_2''(x) - (\lambda a^2(x) - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j)) y_1(x)) \psi(x) dx &= \\ \int_0^l y_2'(x) \psi'(x) dx + \int_0^l (\lambda a^2(x) - \sum_{j=1}^m k_j \delta(x - x_j)) y_1(x) \psi(x) dx &= 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Далее для расчета собственных значений и собственных форм колебаний воспользуемся методом конечных элементов.

Пусть $0 = x_0^* < x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^* = l$ – разбиение на узлы, причем точки крепления ких x_1, x_2, \dots, x_m совпадают с некоторыми узлами, и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – базисные функции.

Будем искать приближенное решение в виде

$$\bar{y}_1(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x), \quad (11)$$

$$\bar{y}_2(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j(x) \quad (12).$$

Подставим приближенные решения $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x)$ в (9) и (10) получаем:

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^l \varphi_j'(x) \varphi_j'(x) dx \right) \alpha_j + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^l \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx \right) \beta_j = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\lambda \int_0^l a^2 \varphi_j(x) \psi(x) dx \right) \alpha_j + \sum_{j=1}^n k_j y_1(x_j) \psi(x_j) = 0 \quad (14)$$

Обозначим

$$\int_0^l \varphi_j'(x) \varphi_k'(x) dx = a_{k,j}, \quad A = \|a_{k,j}\|_{j,k=1}^n,$$

$$\int_0^l \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = b_{k,j}, \quad B = \|b_{k,j}\|_{j,k=1}^n,$$

$$\int_0^l a^2 \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = c_{k,j}, \quad C = \|c_{k,j}\|_{j,k=1}^{n-1}, \quad k = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$$

Матрица $Q = \|q_{k,j}\|_{j,k=1}^n$, где $q_{j_s, j_s} = k_s$ для $s = 1, 2, \dots, m$ и $q_{i,j} = 0$ для всех остальных i и j , соответствует точечным упругим креплениям.

Далее рассмотрим вектора:

$$\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Для этих векторов сформируем систему линейных уравнений. Из (13) имеем равенство

$$A \bar{y}_1 + B \bar{y}_2 = 0 \quad (15).$$

Соответственно из (14) получаем равенство

$$A \bar{y}_2 + \lambda C \bar{y}_1 + Q \bar{y}_1 = 0 \quad (16)$$

Так как мы ищем только вектор \bar{y}_1 , который соответствует функции $y_1(x) = y(x)$, то из (15) и (16) выводим уравнение для \bar{y}_1 .

$$A \bar{y}_1 + B \bar{y}_2 = 0 \Rightarrow B \bar{y}_2 = -A \bar{y}_1 \Rightarrow \bar{y}_2 = -B^{-1} A \bar{y}_1.$$

Подставив $\bar{y}_2 = -B^{-1} A \bar{y}_1$ в (14), получаем уравнение

$$-AB^{-1} A \bar{y}_1 + \lambda C \bar{y}_1 + Q \bar{y}_1 = 0,$$

равносильное выражению

$$(AB^{-1} A + Q) \bar{y}_1 = \lambda C \bar{y}_1 \quad (17)$$

Таким образом получаем, что для нахождения приближенных собственных функций задачи (4)-(5) нам необходимо:

1. Вычислить элементы матриц A, B, C, Q

2. Решить алгебраическую задачу на собственные значения:

$$(AB^{-1} A + Q) v^p = \lambda C v^p.$$

Вычислить собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ и собственные векторы $v_1^p, v_2^p, \dots, v_n^p$.

3. Строим приближения собственных функций:

$$v_k(x) = v_{k,1} \varphi_1(x) + v_{k,2} \varphi_2(x) + \dots + v_{k,n} \varphi_n(x), \quad k = \overline{1, n}$$

$$\text{где } v_k^p = (v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,n})^T.$$

В качестве базисных функций можно выбрать функции вида:

1. $\varphi_k(x)$ – непрерывная кусочно-линейная функция, определенная на всем интервале $(0; l)$,

2. $\varphi_k(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j \end{cases}$.

Тогда все элементы матриц A, B, C, Q легко вычисляются.

На основе разработанного алгоритма написан программный модуль в среде Matlab, позволяющий исследовать формы колебаний и их частоты в зависимости точек крепления балки x_1, x_2, \dots, x_m и коэффициентов упругости k_1, k_2, \dots, k_m .

На рис. 1 представлен интерфейс программного модуля. Пользователь может задать основные характеристики балки: длину, точки крепления балки x_1, x_2, \dots, x_m и

коэффициентов упругости k_1, k_2, \dots, k_m , индекс собственной функции, количество точек разбиения.

После ввода всех данных, происходит расчет элементов всех матриц A, B, C, Q и строится приближение выбранной собственной функции, а также выводится на экран ее график (рис. 2). При необходимости пользователь может вывести на одном экране графики нескольких собственных функций.

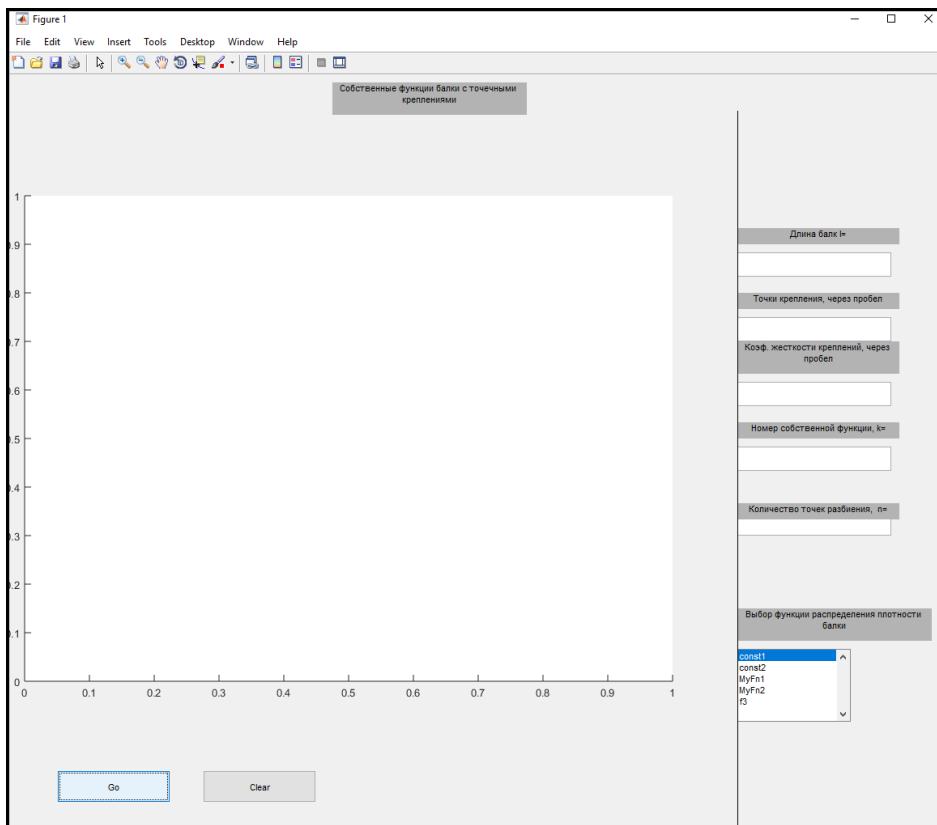


Рис. 1. Интерфейс программного модуля.

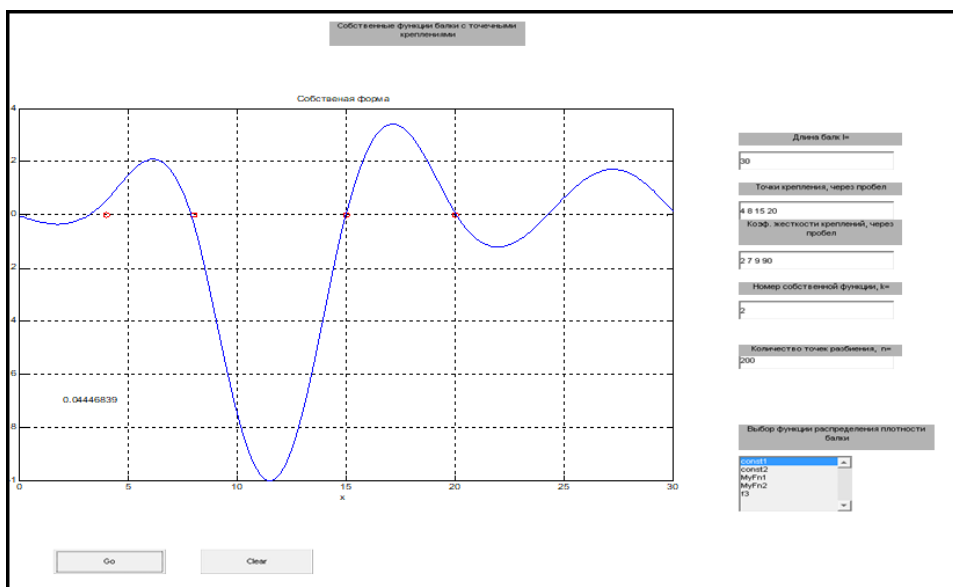


Рис. 2. График собственной функции.

Заключение

В работе рассмотрено применение метода конечных элементов для численного расчета собственных значений и собственных форм колебаний. Разработана алгоритм и на его основе написана программа в среде Matlab, позволяющая исследовать формы колебаний и их частоты в зависимости $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. Такие программы могут быть использованы при исследовании и моделировании резонансных свойств балки с упругими креплениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-41-020195 p_a).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ciarlet P. G., Lions J.L. Handbook of numerical analysis V. 2. 2003. 928 с.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. 1981. 416 с.
3. Алгазин С. Д. Численное исследование свободных колебаний балки с осцилляторами // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, №4.
4. Базаров М. Б., Сафаров И. И., Шокин Ю. И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: изд-во СО РАН, изд-во «Студия Дизайн ИНФОЛИО», 1996. 189 с.
5. Валеев Н. Ф., «Обратная спектральная задача для конечномерных операторов» // Уфимск. матем. журн., 2:2 (2010), 3–19.
6. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля // М.: Наука. 1984. 240 с.
7. Под ред. В. В. Болотина, Вибрации в технике: Колебания линейных систем // М.: Машиностроение. 1978. 352 с.
8. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями) // М.: Наука. 1968. 503 с.
9. Юрко В. А., Обратные спектральные задачи и их приложения // Саратов: Саратов. педагогич. ин-т, 2001. 499 с.
10. Валеев Н. Ф., Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем. // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 2. С. 45.
11. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Валеев Н. Ф., Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426. №4. С. 457–460.
12. Валеев Н. Ф. Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи // Матем. заметки, 85:6 (2009). С. 940–943.
13. Грэхем М. Л. Глэдвелл // Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: изд-во РХД. 2008. 610 с.
14. Валеев Н. В., Трунов К. В. Численное решение многопараметрических обратных спектральных задач // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. №4. С. 845–847.
15. Гандер В., Гржебичек И. Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB. ISBN: 985-6642-06-X. Изд-во «Вассамедина». 2005. 520 с.

Поступила в редакцию 19.09.2018 г.

NUMERICAL SIMULATION OF FREQUENCY-RESONANCE CHARACTERISTICS OF THE EULER BEAM WITH POINT ELASTIC FASTENINGS

© D. N. Valeeva¹, K. V. Trunov^{2*}

¹Moscow State University
1/2 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia.

²Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

*Email: trounovkv@mail.ru

The authors of the article considered the model of small bending oscillations of the beam occurring within one plane under the influence of external force $f(x, t)$ according to initial data (initial deflection and initial velocity). The beam is hinged at the ends and it also has additional elastic fasteners at points x_1, x_2, \dots, x_n . This model is based on the Euler-Bernoulli equation. To obtain the beam oscillation equation, functionals of kinetic and potential energy were composed in the work, and the work of external forces was taken into account. Then, using the known principle of least action, the corresponding differential equation was derived, taking into account that the beam in the considered problem is attached to a fixed base at the points x_1, x_2, \dots, x_n using elastic springs with elastic coefficients k_1, k_2, \dots, k_n . Using the finite element method, formulas for numerical calculation of eigenvalues and eigenforms of beam vibrations were obtained. On the basis of these formulas, an algorithm for solving the problem was developed. Then, using the Matlab language, the program based on the algorithm was developed. This software enables studying the shapes and their frequencies according to the attachment points of the beams x_1, x_2, \dots, x_m and to elastic coefficients x_1, x_2, \dots, x_m . The developed program can be useful in studying and modeling the resonance properties of a beam with elastic fasteners.

Keywords: finite element method, dynamical systems, eigenvalues, eigenfrequency control, mathematical models, Matlab.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Ciarlet P. G., Lions J.L. Handbook of numerical analysis V. 2. 2003.
2. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Vvedenie v proektsionno-setochnye metody [Introduction to projection-grid methods]. 1981.
3. Algazin S. D. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2006. Vol. 47, No. 4.
4. Bazarov M. B., Safarov I. I., Shokin Yu. I. Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh system [Numerical modelling of oscillations of dissipatively homogeneous and inhomogeneous mechanical systems]. Novosibirsk: izd-vo SO RAN, izd-vo «Studiya Dizain INFOLIO», 1996.
5. Valeev N. F. Ufimsk. matem. zhurn., 2:2 (2010), 3–19.
6. Levitan B. M. Moscow: Nauka. 1984.
7. Pod red. V. V. Moscow: Mashinostroenie. 1978.
8. Collatz L.M.: Nauka. 1968.
9. Yurko V. A. Saratov: Sarat. pedagogich. in-t, 2001.
10. Valeev N. F. Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta. 2008. Vol. 2. Pp. 45.
11. Sadovnichii V. A., Sultanaev Ya. T., Valeev N. F. Doklady Akademii nauk. 2009. Vol. 426. No. 4. Pp. 457–460.
12. Valeev N. F. Matem. zametki, 85:6 (2009). Pp. 940–943.
13. Graham M. L. Gladwell. Obratnye zadachi teorii kolebaniy. M.-Izhevsk: izd-vo RKhD. 2008.
14. Valeev N. V., Trunov K. V. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2016. Vol. 21. No. 4. Pp. 845–847.
15. Gander W., Hrebicek J. Reshenie zadach v nauchnykh vychisleniyakh s primeneniem Maple i MATLAB [Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB]. ISBN: 985-6642-06-X. Izd-vo «Vassamedina». 2005.

Received 19.09.2018.