

УДК 532.5+519.63

НАКОПЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

© В. П. Житников*, Н. М. Шерыхалина, А. А. Зарипов

*Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, Республика Башкортостан, 450008 г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.*

Тел.: +7 (347) 273 79 67.

*Email: zhitnik@mail.ru

Проведено исследование процесса накопления погрешности, вызванной неточностью решения системы уравнений итерационным методом за несколько шагов по времени. Найдена верхняя оценка погрешности, которая показывает ее линейную зависимость от порогового значения критерия ограничения числа итераций, квадратичный рост погрешности от числа разбиений по пространству и ее независимость от числа разбиений по времени. Вычислительный эксперимент показал хорошее соответствие полученной оценки с реальными погрешностями, возникающими при краевых и начальных условиях различного вида.

Ключевые слова: *постоянный шаг, верхняя оценка, вычислительный эксперимент.*

Введение

При решении задач конечноразностными методами обычно рассматривают два вида погрешностей: теоретическую погрешность конечноразностной аппроксимации и погрешность округления. Эти погрешности для одномерного уравнения диффузии подробно исследованы в [1]. Однако для решения различных задач, важных для практики, применяются итерационные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений [2–7]. При этом возникает третий вид погрешности: накопленная погрешность, вызванная неточностью решения систем уравнений при их решении на каждом временном шаге. Данная работа посвящена исследованию этого вида погрешности. Как показали результаты вычислительного эксперимента, для одномерного и осесимметричного уравнения диффузии зависимости погрешностей от числа узлов сетки и других параметров качественно совпадают.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный стержень кольцевого сечения из пронцаемого для жидкости материала. Предположим, что внутри и вовне стержня расположены резервуары с жидкостью, давление в которых задано. Пусть ось x направлена вдоль оси стержня, а радиус r изменяется от R до $R+1$. Тогда задача сводится к определению зависимости от времени давления u в точках стержня, т.е. функции двух переменных $u(r,t)$, которая должна удовлетворять осесимметричному уравнению диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (R < r < R+1, 0 < t \leq T), \quad (1)$$

начальному условию

$$u(r,0) = f(r), \quad (R < r < R+1), \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(R,t) = \varphi_1(t), \quad u(R+1,t) = \varphi_2(t), \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

Задача решается методом конечных разностей.

На плоскости (r, t) строится сетка с шагом h по переменной r ($r_i = R + ih$, $i=0, \dots, n$, $h=1/n$) и с шагом τ по переменной t ($t_j = j\tau$, $j=0, \dots, m$, $\tau=T/m$). Вводятся обозначения $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$. Обозначим число Куранта

$\lambda = \tau/h^2$. Тогда разностные уравнения запишутся в виде

$$\lambda \left(1 - \frac{h}{2r_i} \right) u_{i-1,j} - (1 + 2\lambda) u_{i,j} + \lambda \left(1 + \frac{h}{2r_i} \right) u_{i+1,j} = -u_{i,j-1}, \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m.$$

В соответствии с (2) и (3) значения

$$u_{i,0} = f(r_i), \quad u_{0,j} = \varphi_1(t_j), \quad u_{n,j} = \varphi_2(t_j) \quad (5)$$

являются известными. Решается система уравнений относительно $u_{i,j}$ последовательно для всех $j=1, \dots, m$.

Неявная схема устойчива при любых значениях числа Куранта.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно проводить методом простых итераций. Для этого представим уравнения (4) в виде

$$u_{i,j} = \frac{\lambda}{1+2\lambda} \left(1 - \frac{h}{2r_i} \right) u_{i-1,j} + \frac{\lambda}{1+2\lambda} \left(1 + \frac{h}{2r_i} \right) u_{i+1,j} + \frac{u_{i,j-1}}{1+2\lambda}, \quad (6)$$

или $x = Bx + b$, $x_i = u_{i,j}$.

При этом норма получившейся в правой части (6) матрицы

$$\|B\| = \frac{\lambda}{1+2\lambda} \left(1 - \frac{h}{2r_i} \right) + \frac{\lambda}{1+2\lambda} \left(1 + \frac{h}{2r_i} \right) = \frac{2\lambda}{1+2\lambda} < 1. \quad (7)$$

Поэтому итерационный процесс $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$ сходится при любом λ со скоростью геометрической прогрессии

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|B\| \|x^{(k-1)} - x\|, \quad \|x\| = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (8)$$

Условием окончания итерационного процесса служит неравенство

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Оценка погрешности, обусловленной неточностью решения СЛАУ

Рассматриваются 3 варианта краевых и начальных условий

$$\text{I) } f(r) = \sin(\pi(r-R)), \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0, \\ \text{II) } f(r) = 0, \quad \varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = 0. \quad (10)$$

$$\text{III) } f(r) = \ln \frac{r}{R+1} / \ln \frac{R}{R+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial r}(1, t) = 0.$$

При исследовании величина n изменялась от значения $n=5$ до $n=5120$ последовательным удвоением текущего значения.

Используя оценку абсолютной погрешности [1] и условие окончания итерационного процесса (9), получим на j -м временном шаге

$$\Delta_j = \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \varepsilon. \quad (11)$$

Поскольку число Куранта $\lambda = \frac{\tau}{h^2} = n^2 \tau$, то согласно (7)

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} = 2\lambda = 2n^2 \tau.$$

Учитывая (11), получим неравенство

$$\Delta_j \leq 2n^2 \varepsilon \tau. \quad (12)$$

С другой стороны на каждом шаге происходит уменьшение накопленной на предыдущих шагах погрешности по экспоненциальному закону

$$\Delta'_j = \Delta(t - \tau) e^{-\alpha^2 \tau} - \Delta(t - \tau), \quad (13)$$

где α – наименьшее собственное число задачи (1) – (3). Здесь значения α определялись численно путем использования равенства типа (13), записанного для искомой функции $u(r, t) = u(r, t - \tau) e^{-\alpha^2 \tau}$ при больших t . Для плоской задачи $\alpha = \pi$, для осесимметричной – при $R=1$ $\alpha^2 \approx 9.75$; при $R=0.1$ $\alpha^2 \approx 8.83$.

Учитывая (12) и (13), в качестве верхней оценки получим равенство

$$\frac{\Delta(t) - \Delta(t - \tau)}{\tau} = 2\varepsilon n^2 - \Delta(t - \tau) \frac{1 - e^{-\alpha^2 \tau}}{\tau}.$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} + \alpha^2 \Delta(t) = 2\varepsilon n^2,$$

решением которого при начальном условии $\Delta(0) = 0$ является функция

$$\Delta(t) = \frac{2\varepsilon n^2}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\alpha^2 t}\right). \quad (14)$$

Вследствие (12) эту зависимость можно считать верхней оценкой погрешности, вызванной неточностью решения СЛАУ.

Результаты вычислительного эксперимента

Далее приводятся результаты численного исследования реального значения коэффициента перед εn^2 в (14) $C(t) = \Delta(t) / (\varepsilon n^2)$. При этом для анализа погрешности, вызванной неточностью решения СЛАУ, из численных значений, полученных итерационным методом вычитаются результаты решения методом прогонки. При этом составляющие погрешности численного метода взаимно уничтожаются, а погрешность округления имеет меньшую на несколько порядков величину и не влияет на общую картину. Для анализа выбираются значения погрешностей, соответствующие определенному значению r , при котором при больших t погрешность максимальна по модулю.

На *рис. 1а* приведены зависимости коэффициента $C(t)$ для $m=2n$ (линии 1 соответствуют $R=1$; линии 2 – $R=0.1$). Видно, что погрешности практически совпадают с оценками. Для других значений $\varepsilon=10^{-8} - 10^{-12}$, $n=40 - 1280$ зависимости выглядят так же.

Следует отметить, что относительная погрешность при условиях типа I растет экспоненциально и может быть очень большой, в отличие от погрешности округления, которая растет линейно, аналогично плоской задаче [1].

На *рис. 1б* приведены аналогичные зависимости погрешностей для $\lambda=1$, $\varepsilon=10^{-10}$. В этом случае реальные погрешности меньше оценок примерно на 20%. Это объясняется тем, что при $\lambda=1$ число итераций существенно меньше, поскольку норма $\|B\|$, меньше, чем при $m=2n$, а скорость убывания погрешности от итерации к итерации выше. При этом реальная величина $\sigma_k = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ может оказаться существенно меньше ε . Поэтому в целом средняя скорость накопления погрешности происходит медленнее, чем предполагалось при выводе оценки.

При достаточно больших n и ε значение накопленной погрешности $\Delta(t)$ может начать уменьшаться, поскольку величина σ_k становится очень малой и происходит уменьшение погрешности в силу (13). На *рис. 2, а* приведены зависимости погрешности от t для $R=1$ при трех значениях ε : кривая 1 соответствует $\varepsilon=10^{-6}$, кривая 2 – $\varepsilon=10^{-8}$, кривая 3 – $\varepsilon=10^{-10}$, кривая 0 – функции (14). Видно появление спада погрешности, причем при уменьшении ε точка начала спада отодвигается в сторону больших t (при увеличении n происходит сдвиг в сторону меньших t). Для объяснения этого на

рис. 2б показаны зависимости сумм $S_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j$ в отношении к $m=n^2$ (кривые 1–3 соответствуют тем же ε , что и на *рис. 2а*) и самих σ_k в отношении к ε (кривые 1', 3'). В качестве σ_k использовалась максимальная по модулю разность компонент решения СЛАУ (9).

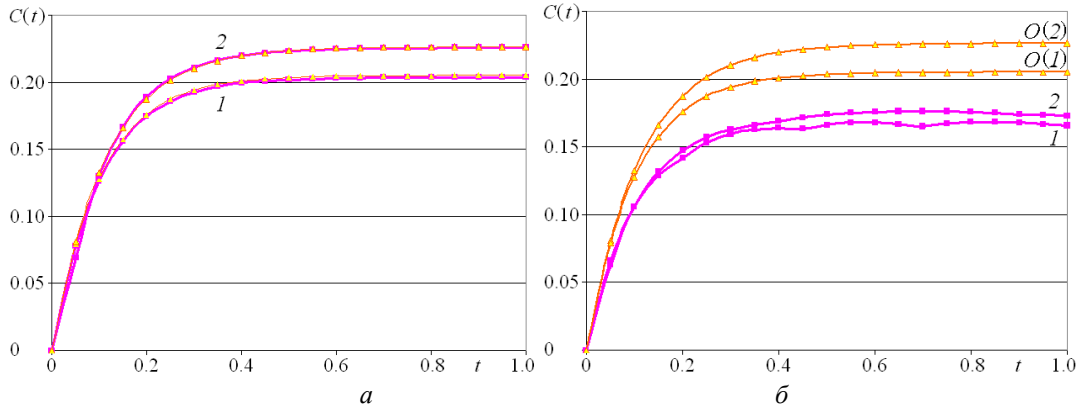


Рис. 1. Зависимости коэффициента абсолютной погрешности от t для $n=640$: $a - m=2n$; $b - \lambda=1$.

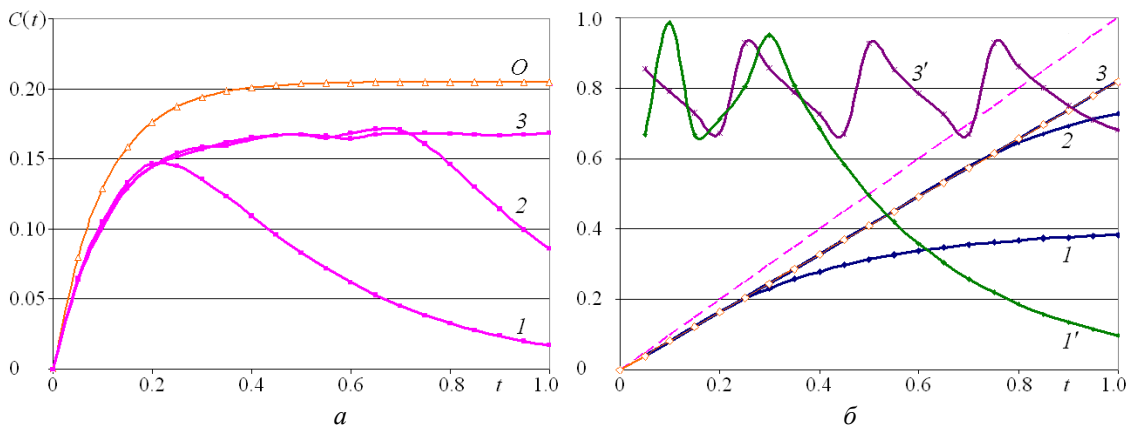


Рис. 2. Зависимости элементов погрешностей от t для $\lambda=1, n=1280$: a – коэффициента $C(t)$; b – сумм σ_k и самих σ_k . Пунктирные прямые $y=t$ и $y=0.82t$.

Отметим, что кривая $3'$ имеет характерную пилообразную форму. Это объясняется следующим образом. На определенном отрезке времени, на каждом временном шаге совершается определенное число итераций L . При этом σ_j от шага к шагу уменьшается вследствие уменьшения $u(r, t)$ по экспоненциальному закону. В определенный момент времени условие $|\sigma_j| \leq \varepsilon$ начинает выполняться на $L-1$ -й итерации и $|\sigma_j|$ скачком увеличивается до значения, почти равного ε , а дальше снова начинает уменьшаться. Поэтому среднее значение $|\sigma_j|$ оказывается меньше ε , и зависимость накопленной суммы S_k близка к функции $y=0.82t$ (кривая 3). На определенном временном шаге величина L может стать равной 1, и далее начинается процесс монотонного убывания $|\sigma_j|$ (кривая $1'$). При этом скорость роста S_k замедляется (кривая 1

на рис. 2б), а погрешность уменьшается (кривая 1 на рис. 2а).

Рассмотрим условия типа II. Главное отличие от первого типа заключается в скачке левого граничного значения, что приводит к смещению наибольшей погрешности влево на начальном этапе. На рис. 3а показано распределение погрешности по радиусу при $R=0.1$ (кривые 1, 2, ..., 20 соответствуют $t=0.05, 0.1, \dots, 1$), а на рис. 3б его сечение вертикальной прямой $r-R=0.4$ (кривые 1 соответствуют $R=1, \alpha^2 \approx 9.75$, кривые 2 – $R=0.1, \alpha^2 \approx 8.83$).

Отметим, что граничные условия для погрешности при варианте II остаются нулевыми. Поэтому реальные погрешности остаются близкими к оценкам (рис. 3б), только вначале наблюдается отставание, связанное с тем, что при малых t условие (9) ограничивает разность значений при малых $r-R$, а при $r-R=0.4$ эта разность существенно меньше. При больших t это отставание сказывается меньше, поскольку происходит экспоненциальное уменьшение накопленной погрешности (13).

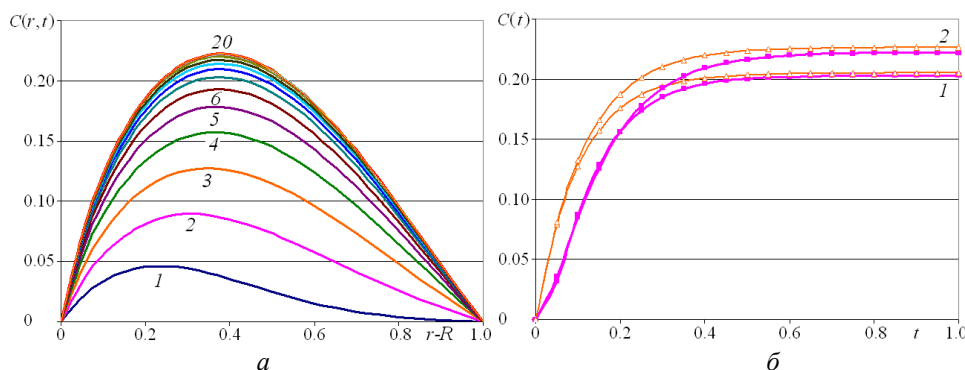


Рис. 3. Зависимости погрешностей от t для условий типа II, $n=640$, $m=2n$:
 a – распределения $C(r,t)$; b – коэффициента $C(t)$.

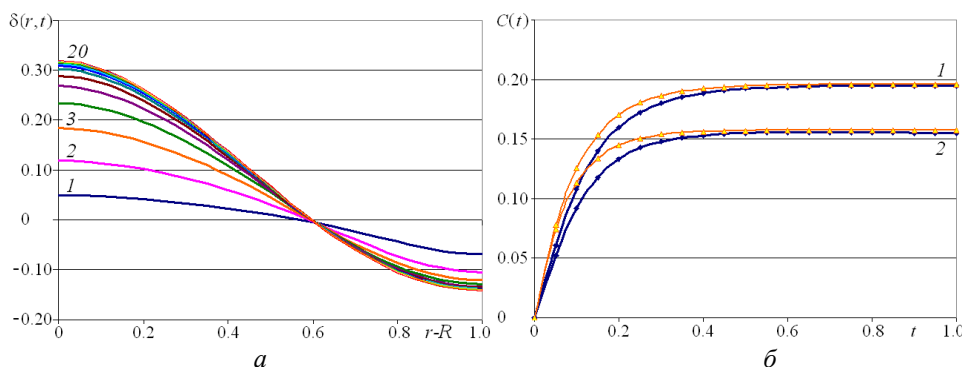


Рис. 4. Зависимости погрешностей от t для условия типа III, $n=640$, $m=2n$:
 a – распределения относительной погрешности $\delta(r,t)$; b – коэффициента $C(t)$.

Рассмотрим задачу с условиями типа III. В этом случае в качестве начального распределения давления используется распределение, которое устанавливается в результате решения предыдущей задачи. В силу нулевых условий 2-го рода количество энергии в исследуемой области сохраняется во времени. Поэтому при увеличении t устанавливается постоянное по r давление

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \frac{R+1}{R}} - \frac{R^2}{2R+1}. \quad (14)$$

Для этой задачи собственное число $\alpha^2 \approx 10.22$ при $R=1$ и $\alpha^2 \approx 12.71$ при $R=0.1$. Погрешность имеет разные знаки в левой и правой частях (рис. 4а). Для анализа рассматривались крайние левые точки с наибольшей погрешностью. На рис. 4б видно, что при больших t реальная погрешность приближается к оценке, но в начале процесса значительно от нее отличается. Это можно объяснить разной скоростью убывания погрешности в начале и конце процесса.

Выводы

Таким образом, найденная оценка погрешности итерационного метода находится в хорошем соответствии с реальными погрешностями, соответствующими краевым и начальным условиям различного вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-07-00356).

ЛИТЕРАТУРА

1. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Муксимова Р. Р. Особенности процесса накопления погрешностей при решении задач для простейших уравнений математической физики конечноразностными методами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, №2. С. 139–152.
2. Идрисова Г. Р., Ковалева Л. А., Мавлетов М. В., Мусин А. А. Математическое моделирование двухфазной фильтрации в обводненном пласте с осадкообразованием // Механика жидкости и газа. 2011. №1, с. 116–123.
3. Тухбатова Э. Р., Мусин А. А., Юлмухаметова Р. Р., Ковалева Л. А. Исследование влияния тепловой конвекции на процесс разрушения водонефтяной эмульсии при СВЧ воздействии // Вестник Башкирского университета. Математика и механика. 2017. Т. 22, №4. С. 930–935.
4. Sayakhov F. L., Kovaleva L. A., Nasyrov N. M. Heat and Mass Transfer in the Well-Stratum System under the Electromagnetic Action on Massive Oil Deposits // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2002. Vol. 1(75). №1. P. 126–133.
5. Саяхов Ф. Л., Ковалева Л. А., Насыров Н. М. Тепло-массоперенос в системе «скважина – пласт» при нагнетании растворителя с одновременным электромагнитным воздействием // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ / 1998. №4. С. 47–55.
6. Nigmatulin R. I., Sayakhov F. L., Kovaleva L. A. Cross Transport Phenomena in Disperse Systems Interacting with a High-Frequency Electromagnetic Field // Doklady Physics. 2001. Vol. 46, №3. P. 215–218.
7. Камалтдинов И. М., Ковалева Л. А., Хисматуллина Ф. С., Галимбеков А. Д. Влияние высокочастотного электромагнитного поля на адсорбционные процессы в пористой среде // Нефтяное хозяйство. 2013, №8. С. 90–92.

Поступила в редакцию 14.09.2018 г.

**ACCUMULATION OF THE ERROR AT THE SOLUTION
OF THE MIXED PROBLEM FOR THE AXISYMMETRIC EQUATION
OF DIFFUSION BY THE ITERATIVE METHOD**

© V. P. Zhitnikov*, N. M. Sherykhalina, A. A. Zaripov

*Ufa State Aviation Technical University
12 Karl Marx Street, 450008 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

Phone: +7 (347) 273 79 67.

**Email: zhitnik@mail.ru*

The authors of the article considered the mixed problem of axisymmetric diffusion equation. The problem was solved with the help of the implicit differential scheme. The authors used boundary conditions of the first and second type. The system of the linear algebraic equations was solved by iterative method. The iterative process was finished when the differences between the values of modules of required parameters of two next iterations become less than certain threshold value. In the process of solving problems by finite difference methods, two types of errors are usually considered: the theoretical error of finite difference approximation and the round-off error. These errors for the one-dimensional equation of diffusion were previously studied in detail. However, for the solution of various problems important for practice, the iterative methods of systems solution of the linear and nonlinear equations are applied. There is also the third type of errors. It is the accumulated error caused by inaccuracy of solutions of the equations systems on each step of time. This type of errors was studied in this work. The upper estimate of error was found and two factors were considered. The first factor is an accumulation of error from iteration to iteration. The second factor is the exponential decrease of error determined by the first eigenvalue of a problem. Taking into account these factors, the authors formulated the linear differential equation. The solution of this differential equation gives the upper estimate of the total accumulated error. According to the results of the estimation, there are linear dependence of error on the threshold value of restriction criterion of iterations number and the square growth of error from number of subdivisions on space. The error is independent from the number of subdivisions on time. The following computing experiment was realized. The results of the equations system solution by a sweep method were subtracted from the numerical values received by the iterative method. Thus, the error components of finite difference approximation were mutually annihilated; the round-off error had the smaller size in some orders and it had no significant influence on overall result. The results of the computing experiment correspond to the real errors arising for boundary and initial conditions of various types.

Keywords: implicit scheme, constant step, upper estimate, computing experiment.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M., Muksimova R. R. Sib. zhurn. vychisl. matematiki. 2016. Vol. 19, No. 2. Pp. 139–152.
2. Idrisova G. R., Kovaleva L. A., Mavletov M. V., Musin A. A. Mekhanika zhidkosti i gaza. 2011. No. 1, s. 116–123.
3. Tukhbatova E. R., Musin A. A. Vestnik Bashkirskogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2017. Vol. 22, No. 4. Pp. 930–935.
4. Sayakhov F. L., Kovaleva L. A., Nasyrov N. M. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2002. Vol. 1(75). No. 1. Pp. 126–133.
5. Sayakhov F. L., Kovaleva L. A., Nasyrov H. M. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz / 1998. No. 4. Pp. 47–55.
6. Nigmatulin R. I., Sayakhov F. L., Kovaleva L. A. Doklady Physics. 2001. Vol. 46, No. 3. Pp. 215–218.
7. Kamaltdinov I. M., Kovaleva L. A., Khismatullina F. S., Galimbekov A. D. Neftyanoe khozyaistvo. 2013, No. 8. Pp. 90–92.

Received 14.09.2018.