

УДК 532.5.013.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© А. Д. Низамова*, В. Н. Киреев, С. Ф. Урманчиев

*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.*

Тел.: +7 (347) 235 52 55.

*Email: adeshka@yandex.ru

В работе рассмотрена проблема об устойчивости плоскопараллельного течения термовязкой жидкости в канале с неоднородным температурным полем. Задача сведена к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся обобщенным уравнением Орра-Зоммерфельда. Численно исследованы спектры собственных значений и профили скорости течения. Показано влияние свойств термовязкой жидкости на критическое число Рейнольдса.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, уравнение Орра-Зоммерфельда, термовязкая жидкость, критическое число Рейнольдса, области неустойчивости, собственные функции.

Введение

Устойчивость течения жидкости является актуальной проблемой гидродинамики. Хорошо известно, что существует два режима течения жидкостей: ламинарный и турбулентный. Характер течения зависит от так называемого числа Рейнольдса. При малых значениях этого числа наблюдается ламинарный режим течения. Однако, начиная с некоторого определенного значения, называемого критическим числом Рейнольдса, течение приобретает турбулентный характер. Критическое значение зависит от конкретного вида течения.

Устойчивость течения жидкости с постоянной вязкостью хорошо изучена и описывается уравнением Орра-Зоммерфельда [1–2].

Однако, стоит отметить, что вязкость жидкости влияет на характер течения [3–5] и вопрос об устойчивости течения термовязкой жидкости является актуальным в настоящее время. Вязкость жидкости в большинстве моделей имеет вид экспоненциально убывающей функции, так называемые модели аррениусовского типа [6].

Постановка задачи

Рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным распределением температуры.

В отсутствии массовых сил математическая модель процесса состоит из уравнения неразрывности, уравнений Навье-Стокса и уравнения сохранения энергии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

а условия на границах области имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, H, t) = u(x, -H, t) = 0, \quad p(0, y, t) = P_{in}, \quad p(L, y, t) = P_{out}, \\ v(x, H, t) = v(x, -H, t) = 0, \quad T(x, -H, t) = T_{cold}, \quad T(x, H, t) = T_{hot}, \end{aligned}$$

где u, v – компоненты вектора скорости; p – давление; T – температура; $\mu(T)$ – динамическая вязкость; α – коэффициент температуропроводности; ρ – плотность; t – время; H – ширина канала; L – длина канала; P_{in} – давление на входе; P_{out} – давление на выходе; T_{cold} – температура нижней стенки канала; T_{hot} – температура верхней стенки канала.

Безразмерные величины будем вводить следующим образом:

$$\hat{x} = \frac{x}{H}, \hat{y} = \frac{y}{H}, \hat{t} = \frac{u_m t}{H}, \hat{p} = \frac{p}{\rho u_m^2}, \hat{u} = \frac{u}{u_m}, \hat{v} = \frac{v}{u_m}, \hat{T} = 2 \cdot \frac{T - T_{cold}}{T_m}, \hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu_m},$$

где u_m, μ_m – характерные скорость и вязкость, $T_m = T_{hot} - T_{cold}$.

Таким образом, начальную систему уравнений (1) запишем в безразмерной форме (знаки над безразмерными параметрами здесь и далее опускаем):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \end{array} \right. \quad (2)$$

где $\text{Re} = \frac{\rho u_m H}{\mu_m}$ и $\text{Pe} = \frac{u_m H}{\alpha}$ – числа Рейнольдса и Пекле.

Представим компоненты скорости, давления и температуры в виде суммы невозмущенной и возмущенной частей:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U(x, y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v = V(x, y) + \tilde{v}(x, y, t), \\ p = P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), \\ T = T(x, y) + \tilde{T}(x, y, t). \end{array} \right. \quad (3)$$

А вязкость, используя формулу разложения в ряд Тейлора, представим в виде:

$$\mu \approx \mu(x, y) + \tilde{\mu}(x, y, t),$$

где $\mu = \mu(T)$, $\tilde{\mu} = \mu'(T) \cdot \tilde{T}$ – возмущение вязкости, и, подставляя (3) в систему уравнений (4) получим, что течение в невозмущенном состоянии удовлетворяет стационарным уравнениям Навье-Стокса. Для возмущенной части проведем линеаризацию и рассмотрим случай плоскопараллельного течения $U = U(y), V = 0, T = T(y)$, $\mu = \mu(y)$, тогда систему (2) перепишем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right]. \end{array} \right. \quad (4)$$

Решение системы (4) будем искать в виде бегущей волны:

$$\tilde{u} = \varphi_1(y) \cdot e^{ik(x-ct)}, \tilde{v} = \varphi_2(y) \cdot e^{ik(x-ct)}, \tilde{p} = \psi(y) \cdot e^{ik(x-ct)}, \tilde{T} = \theta(y) \cdot e^{ik(x-ct)}, \tilde{\mu} = \frac{d\mu}{dT} \cdot \tilde{T} = \mu'(y) \cdot \theta(y) \cdot e^{ik(x-ct)},$$

где $c = \frac{w}{k}$ – фазовая скорость волны вдоль оси x (собственное значение); w – частота; k – проекция волнового вектора на ось x (волновое число); $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(y), \theta(y)$ – амплитуды возмущения компонент вектора скорости, давления и температуры.

После некоторых алгебраических преобразований уравнений исходная задача об устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным температурным полем может быть сведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \mu \cdot [\varphi_2^{IV} - 2k^2 \varphi_2'' + k^4 \varphi_2] - ik \operatorname{Re}[(U - c) \cdot (\varphi_2'' - k^2 \varphi_2) - U'' \varphi_2] + \\ + 2\mu' \cdot (\varphi_2''' - k^2 \varphi_2') + \mu'' (\varphi_2'' + k^2 \varphi_2) - ik [\mu' \cdot \theta \cdot U''' + 2 \cdot (\mu' \cdot \theta)' \cdot U'' + (\mu' \cdot \theta)'' \cdot U'] = 0, \\ (\theta'' - k^2 \theta) - ik \operatorname{Pe}(U - c)\theta - \operatorname{Pe} \varphi_2 T' = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $c = c_r + ic_i$ – собственные значения; $\varphi_2(y)$ – амплитуда возмущения поперечной скорости (собственные функции).

Граничные условия для системы уравнений (5):

$$\varphi_2(-1) = \varphi_2(1) = 0, \quad \varphi_2'(-1) = \varphi_2'(1) = 0, \quad \theta(-1) = \theta(1) = 0. \quad (6)$$

Первое уравнение из системы (5) содержит дополнительные слагаемые, характеризующие изменение и температуры, и вязкости по сечению канала. В случае изотермического течения это уравнение упрощается и может быть сведено к классическому уравнению Орра-Зоммерфельда.

Невозмущенное течение

Плоскопараллельное течение термовязкой жидкости в невозмущенном состоянии система уравнений Навье-Стокса и сохранения энергии имеет вид:

$$\begin{cases} -\frac{dp_0}{dx} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{d}{dy} \left(\mu_0 \frac{du_0}{dy} \right) = 0, \\ \frac{d^2 T_0}{dy^2} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $u_0(y)$, $p_0(x)$, $T_0(y)$ и $\mu_0(y)$ – распределения скорости, давления, температуры и вязкости жидкости в невозмущенном состоянии.

Граничные условия для уравнений (7):

$$u_0(-1) = 0, \quad u_0(1) = 0, \quad (8)$$

$$T_0(-1) = 0, \quad T_0(1) = 2.$$

Из второго уравнения (7) и граничных условий (8) видно, что температура в невозмущенном состоянии имеет линейное распределение:

$$T_0(y) = 1 + y. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (7) может быть решено аналитически для некоторых не сложных температурных зависимостей вязкости или, в случае сложных зависимостей, численно.

Рассмотрим две температурные зависимости вязкости жидкости:

1) линейная (рис. 1) $\mu_L(T) = 1 - \alpha_L T$, где $\alpha_L < 0.5$ – параметр изменения вязкости. При условии (9) вязкость $\mu_L(y) = 1 - \alpha_L(1 + y)$;

2) экспоненциальная (рис. 3) $\mu_E(T) = \exp(-\alpha_E T)$, где $\alpha_E > 0$ – параметр изменения вязкости. Или, учитывая условие (9), имеем $\mu_E(y) = \exp(-\alpha_E(1 + y))$.

Для линейной зависимости вязкости первое уравнение (7) можно записать в виде:

$$[1 - \alpha_L(1 + y)] \frac{d^2 u_0}{dy^2} - \alpha_L \frac{du_0}{dy} = \operatorname{Re} \frac{dp_0}{dx}.$$

А решение последнего уравнения имеет вид (рис. 2):

$$u_0^L(y) = \frac{\text{Re } dp_0}{\alpha_L dx} \left[\frac{-2 \ln(1 - \alpha_L(1+y))}{\ln(1 - 2\alpha_L)} + 1 + y \right]. \quad (10)$$

При экспоненциальной зависимости вязкости первое уравнение (7) можно записать:

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} - \alpha_E \frac{du_0}{dy} = \text{Re } \frac{dp_0}{dx} \exp(\alpha_E(1+y)),$$

а его решением является функция (рис. 4):

$$u_0^E(y) = \frac{\text{Re } dp_0}{\alpha_E dx} \left[\frac{2 \mathop{\text{axp}}(\alpha_E) - (1 + \mathop{\text{axp}}(2\alpha_E)) \cdot \mathop{\text{axp}}(\alpha_E y)}{\mathop{\text{axp}}(-\alpha_E) - \mathop{\text{axp}}(\alpha_E)} - \mathop{\text{ó}} \cdot \mathop{\text{axp}}(\alpha_E(1+y)) \right]. \quad (11)$$

Методы и подходы

В настоящей работе для исследования устойчивости плоскопараллельных течений применяется псевдо-спектральный метод по полиномам Чебышева.

Предполагая, что Возмущение температуры очень мало, им будем пренебрегать. Тогда, в системе (5) останется только первое уравнение с граничным условием (6) для амплитуды возмущения поперечной скорости.

Решение задачи (5)–(6) ищем в виде следующего разложения:

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^N z_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (12)$$

где $T_n(y)$ – полиномы Чебышева n -го порядка 1-го рода:

$$T_n(\cos n\theta) = \cos n\theta, \quad n \geq 0.$$

Профиль скорости основного течения также представим в виде ряда:

$$U(y) = \sum_{n=0}^N u_n T_n(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (13)$$

и найдем коэффициенты u_n .

Подставляя (12), (13) в (5), используя свойства полиномов Чебышева и приравнивая коэффициенты при различных T_n , получаем уравнения для искомых коэффициентов z_n :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \mu \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left[p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2 - 4)^2 \right] z_p - \\ & - (2k^2 \mu - ik \text{Re } c) \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) z_p + (k^4 \mu - ik \text{Re } c) d_n z_n - \\ & - \frac{1}{2} ik \text{Re} \sum_{p=2}^N z_p \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq N}} p(p^2 - n^2) \bar{u}_{n-m} - k^2 \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \bar{u}_{n-p} - \\ & - \sum_{\substack{|p| \leq N \\ |n-p| \leq N}} \bar{z}_p \sum_{\substack{m \equiv |n-p|+2 \\ m+n \equiv p \pmod{2}}} m(m^2 - (n-p)^2) u_n = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

где $\bar{z}_p = d_{|p|} z_{|p|}$, $\bar{u}_p = d_{|p|} u_{|p|}$, $-N \leq p \leq N$, $d_0 = 2$, $d_p = 1$, $p > 0$, $p \equiv n \pmod{2}$ означает, что $p - n$ делится нацело на 2.

Используя свойства полиномов Чебышева:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n^2,$$

можно привести граничные условия (6) при $y = -1$ и $y = 1$ к виду:

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N z_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 z_n = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n z_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 z_n = 0. \tag{16}$$

Для течений с симметричным профилем размер системы уравнений (14) сокращается вдвое, так как можно рассматривать только четные $z_n, n = 0, 2, \dots, N = 2M$. При этом автоматически выполняются условия (16).

Для нахождения $M + 1$ неизвестных коэффициентов $z_{2m}, m = 0, 1, \dots, M = N/2$ из $M + 3$ уравнений применяется тау-метод [7], который заключается в отбрасывании двух последних уравнений при $m = M - 1, M$ так, что с двумя граничными условиями (15) получаются $M + 1$ уравнения для $M + 1$ неизвестных коэффициентов $z_{2m}, m = 0, 1, \dots, M - 1$. В результате из (14) получаем алгебраическую задачу на собственные значения общего вида:

$$Az = cBz, \tag{17}$$

где z – вектор неизвестных длины $M + 1$; A, B – известные матрицы размерности $(M + 1) \times (M + 1)$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 4 & 9 & \dots & N^2 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & a_{M-1,1} & \dots & a_{M-1,M-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & b_{M-1,1} & \dots & b_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Первые две строки матриц A и B получены из граничных условий (15), а элементы a_{ij} и b_{ij} – из уравнений (14). Так как матрица B из-за нулевых первых двух строк особенная, то возникают трудности с ее обращением. Чтобы избежать этого, обнуляя вне диагональные элементы и нормируя диагональные элементы первых двух строк матрицы A и применяя это преобразование одновременно к матрице B , получаем собственные значения системы

$$(\tilde{A} - c\tilde{B})\tilde{z} = 0, \tag{18}$$

где A и B – уже невырожденные матрицы. Применяя далее QZ-алгоритм [8] к полученной системе (18), получаем собственные значения. Для нахождения собственных функций из вычисленных \tilde{z} обратным преобразованием находим z , затем используем разложение (12).

Численные результаты

Рассмотрим течение жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры в канале с линейным распределением температуры. На рис. 1 представлены спектры собственных значений модифицированного уравнения Орра-Зоммерфельда для нескольких значений параметра термовязкости α_E . Полученные результаты показывают, что спектр собственных значений при малых значениях параметра α_E (рис. 1а) качественно соответствует спектру собственных значений для течения жидкости с постоянной вязкостью. Однако, при увеличении значений параметра α_E спектр собственных значений значительно меняется (рис. 1в). Также, стоит отметить, что существует одно собственное значение с положительной мнимой частью (рис. 1б, в), которое определяет неустойчивый режим течения при фиксированных значениях числа Рейнольдса и волнового числа.

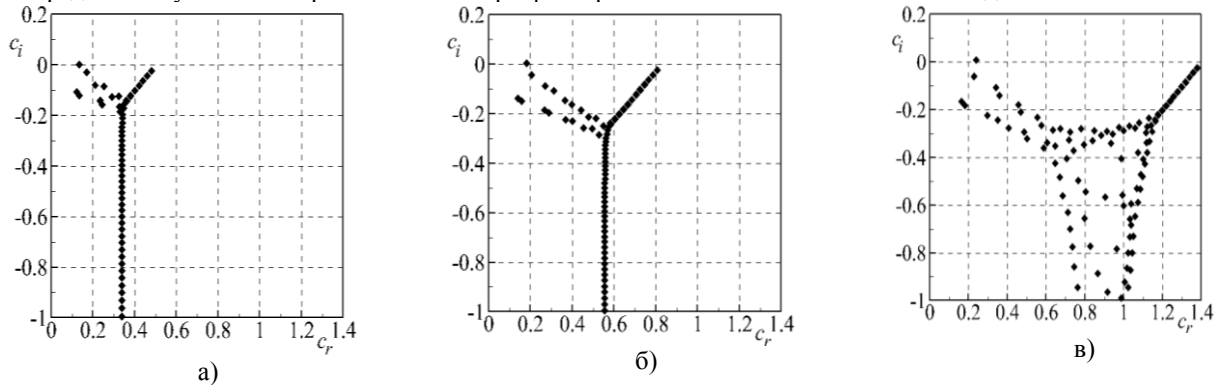


Рис. 1. Спектры собственных значений для $\alpha_E = 0.01$ (а), $\alpha_E = 0.5$ (б), $\alpha_E = 1$ (в) при $Re = 10^4, k = 1$.

На рис. 2 представлены графики вещественной $\text{Re } \varphi$ и мнимой $\text{Im } \varphi$ частей собственной функции для первого собственного значения c_1 . Рис. 3 является иллюстрацией вещественных и мнимых частей возмущений поперечной скорости течения жидкости для c_1 и различных временных значений t . По представленным результатам видно, что при рассмотрении неустойчивого собственного значения c_1 с течением времени t возмущения скорости начинают расти, что приводит к турбулизации течения.

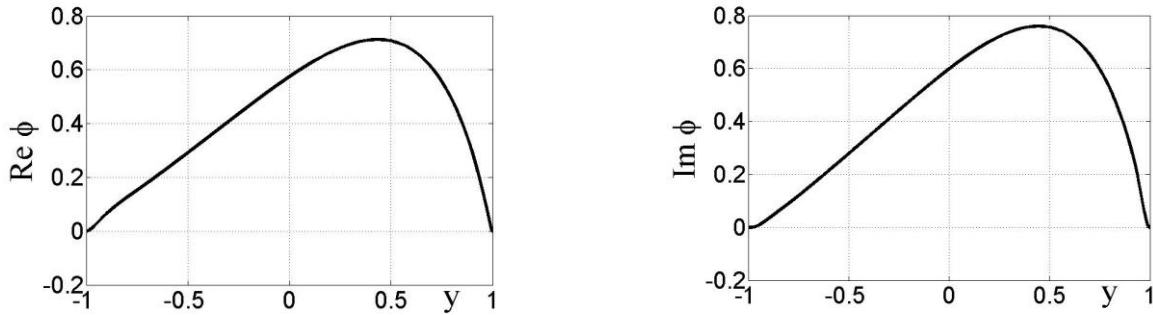


Рис. 2. Вещественная и мнимая части собственной функции первого собственного значения c_1 для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости и параметрами $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha_E = 1.0$.

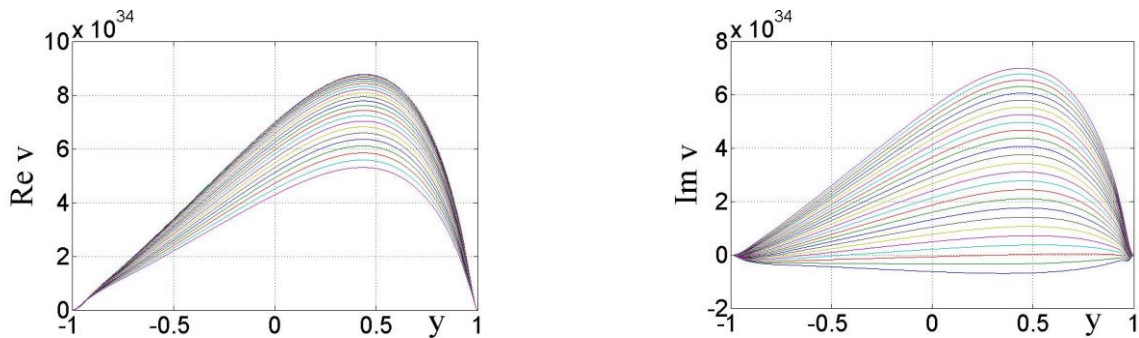


Рис. 3. Вещественная и мнимая части возмущений поперечной скорости первого собственного значения c_1 для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости и параметрами $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha_L = 1.0$ и $t = 10^4$

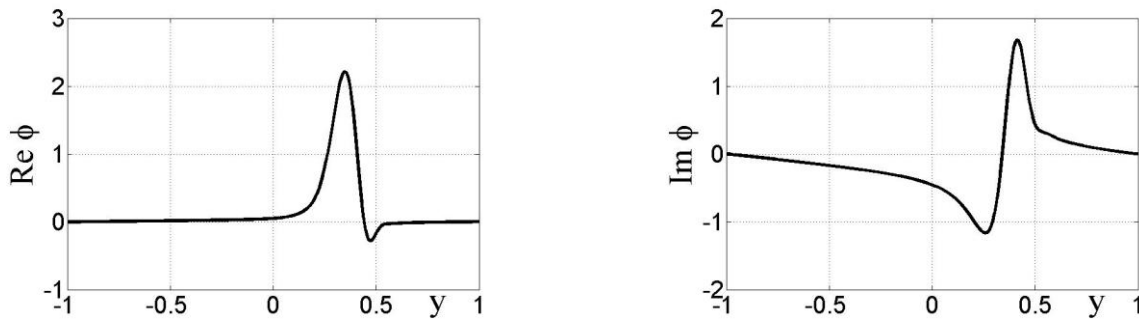


Рис. 4. Вещественная и мнимая части собственной функции второго собственного значения c_2 для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости и параметрами $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha_L = 1.0$

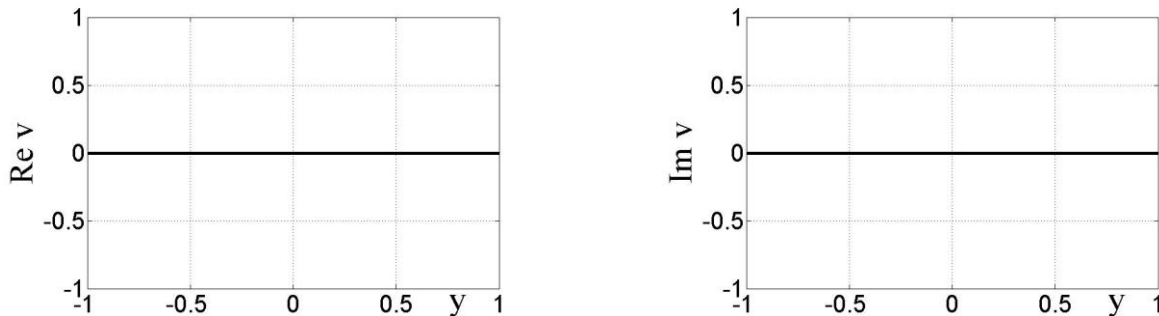


Рис. 5. Вещественная и мнимая части возмущений поперечной скорости второго собственного значения c_2 для жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости и параметрами $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha_L = 1.0$ и $t = 10^5$

Вещественная и мнимая части собственной функции для второго собственного значения изображены на *рис. 4*, а возмущения поперечной скорости – на *рис. 5*. Второе собственное значение является устойчивым и по графикам легко видеть, что с течением времени возмущения поперечной скорости затухают. Графики собственных функций как для устойчивого, так и для неустойчивого собственных значений не имеют симметрии, а максимальное значение амплитуды возмущений поперечной скорости стремится в сторону горячей стенки канала.

На *рис. 6* представлены области неустойчивости для термовязкой жидкости с профилем скорости (10) для различных значений параметра α_E и течения жидкости с постоянной вязкостью и профилем Пуазейля. По аналогии с результатами при течении жидкости с линейной зависимостью вязкости можно видеть, что при увеличении значений параметра термовязкости жидкости критическое число Рейнольдса уменьшается, т.е. течение становится менее устойчивым.

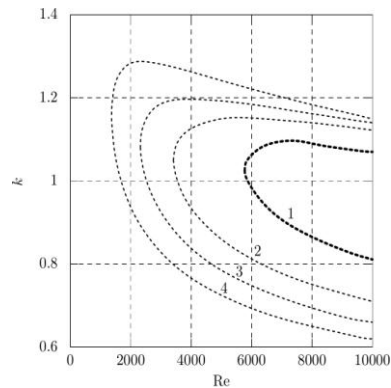


Рис. 6. Области неустойчивости течения жидкости с постоянной вязкостью (1) и термовязкой жидкости: $\alpha_E = 0.25$ (2), $\alpha_E = 0.5$ (3), $\alpha_E = 0.75$ (4).

Выводы

Численно получены спектры собственных значений для некоторых фиксированных параметров числа Рейнольдса, волнового числа и значений параметра термовязкости. Построены соответствующие собственные функции и возмущения поперечной скорости с течением времени. Найдены критические числа Рейнольдса для нескольких значений параметра термовязкости. Показано, что при увеличении параметра термовязкости жидкости течение в канале в заданном температурном поле становится менее устойчивым.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Проекта «Гидродинамические эффекты в многофазных и термовязких средах при волновом и тепловом воздействии» (№ 0246-2018-0003), Российского фонда фундаментальных исследований (грант №17-41-020999-р_а) и гранта для поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2669.2014.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // Journal of Fluid Mechanics, 1971. Vol. 50, Part 4. P. 689–703.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
3. Урманчев С. Ф., Киреев В. Н. О влиянии температурной зависимости вязкости на течение жидкости // Нефтегазовое дело, 2004. №2. С. 287–295.
4. Низамова А. Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН, 2014. Вып. 10. С. 90–94.
5. Урманчев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурно-7-й аномалией вязкости // Доклады академии наук, 2004. Т. 396, №2. С. 204–207.
6. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Ленинград: Наука, 1975. 592 с. 6.
7. Lanczos C. Applied Analysis. Prentice-Hall, 1952.
8. Moler C. B., Stewart G. W. An algorithm for generalized matrix eigenproblem // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10. P. 241–256.

Поступила в редакцию 14.09.2018 г.

**DETERMINATION OF THE CRITICAL REYNOLDS NUMBER
IN THE PROBLEM OF FLOW STABILITY OF THERMOVISCOUS LIQUID**© **A. D. Nizamova***, **V. N. Kireev**, **S. F. Urmancheev***Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center of RAS
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, republic of Bashkortostan, Russia.**Phone: +7 (347) 235 52 55.***Email: adeshka@yandex.ru*

The stability of liquid flow with constant viscosity is well studied and described by the Orr-Sommerfeld equation. Viscosity of liquid influences on the flow regime, and the studies of the problem of thermoviscous stability of liquid are relevant at the present time. The authors of the article considered the flow of incompressible thermoviscous liquid in a channel with an inhomogeneous temperature field. The mathematical model of the process consists of the continuity equation, the Navier-Stokes equation, and the energy conservation equation. The problem of the thermoviscous stability of liquid was reduced to solving a system of two ordinary differential equations, which are the generalization of the Orr-Sommerfeld equation. The exponential dependence of viscosity of liquid on temperature was studied. The problem was solved by a pseudospectral method with respect to Chebyshev polynomials. As a result, spectra of eigenvalues and eigenfunctions were obtained. Perturbations of transverse velocity were constructed for some fixed parameters. Critical Reynolds numbers for some types of flows were determined. As the liquid thermoviscous parameter increases, the critical Reynolds number decreases, that is, the flow becomes less stable.

Keywords: hydrodynamic stability, Orr-Sommerfeld equation, thermoviscous liquid, critical Reynolds number, instability fields, eigenfunctions.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Orszag S. A. *Journal of Fluid Mechanics*, 1971. Vol. 50, Part 4. Pp. 689–703.
2. Drazin F. *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoi ustoychivosti [Introduction to the theory of hydrodynamic stability]*. Moscow: Fizmatlit, 2005.
3. Urmancheev S. F., Kireev V. N. *Neftegazovoe delo*, 2004. No. 2. Pp. 287–295.
4. Nizamova A. D. *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova UNTs RAN*, 2014. No. 10. Pp. 90–94.
5. Urmancheev S. F., Kireev V. N. *Doklady akademii nauk*, 2004. Vol. 396, No. 2. Pp. 204–207.
6. Frenkel Ya. I. *Kineticheskaya teoriya zhidkosti [Kinetic theory of liquids]*. Leningrad: Nauka, 1975. 592 pp. 6.
7. Lanczos C. *Applied Analysis*. Prentice-Hall, 1952.
8. Moler C. B., Stewart G. W. *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10. Pp. 241–256.

Received 14.09.2018.