

УДК 532.529

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

© Н. Ж. Джайчибеков¹, В. Н. Киреев², Б. С. Шалабаева¹,
Ж. Ж. Омарова¹, З. А. Кутпанова¹¹Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
Казахстан, 010008 г. Астана, ул. Каньша Сатпаева, 2.²Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Email: shalabaeva.b.s@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель движения, проводящей капли вязкой жидкости, погружающейся в диэлектрическую вязкую жидкость бесконечной протяженности и изменяющейся под влиянием капиллярности и электростатического отталкивания. Используя уравнения гидродинамики и электромагнетизма и ряд физически реалистичных предположений, мы сводим задачу к системе уравнений с частными производными. Решение такой системы уравнений является особенно сложным. Компьютерное моделирование в среде Comsol Multiphysics позволило получить изменения формы заряженной капли со временем.

Ключевые слова: проводящая капля жидкости, диэлектрическая вязкая, капиллярность, электростатическая сила, компьютерное моделирование.

1. Введение

Современный интерес к электрогидродинамике и в частности к эволюции заряженных капель жидкостей, формирование устойчивости этих капель и образование конечно-временных особенностей на свободной поверхности связан со многими приложениями науки и техники. Задачи электрогидродинамики микро- и наномасштабов привлекают большое внимание исследователей в связи с широкой областью применения, в основном в нано- и биотехнологиях. В частности, распыление топлива, нанесение покрытий, струйной печати, капельного охлаждения, обработка растений химикатами и во многих других отраслях промышленности [1].

Моделирование стоковых течений в различных областях, а также проведение лабораторных исследований по изучению динамики капель эмульсий в микроканалах в широком диапазоне значений различных параметров, влияющих на физические свойства всей системы в целом, имеют весьма ограниченное количество решений подобных задач, дорогостояще и трудновыполнимо. Компьютерное моделирование позволяет планировать, частично заменять и существенно дополнять эксперименты [2].

Целью настоящей работы является изучение эволюции электрически заряженных капель жидкости, движущихся под действием поверхностного натяжения и электростатических сил. Нас особенно интересует устойчивость этих капель и образование особенностей на свободной поверхности. Эти особенности имеют вид конических наконечников на поверхности капли, где кривизна поверхности и поля скорости жидкости расходятся в определенное время.

2. Математическая модель движения заряженной капли жидкости

Рассмотрим каплю D жидкости A с вязкостью μ_{in} суспендированной в бесконечной жидкости B , с вязкостью μ_{out} . (рис. 1). Движение как внутренней, так и внешней жидкости запишем в соответствии со стоковым приближением уравнений Навье-Стокса [3], т.е:

Уравнение количества движения жидкости в капле D

$$\mu_{in} \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla p(\mathbf{x}, t), (1a)$$

Уравнение количества движения жидкости вне капли D

$$\mu_{out} \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla p(\mathbf{x}, t), (1b)$$

Уравнение неразрывности

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, (1c)$$

где \mathbf{u} – поле скорости, а p – давление в жидкости. Из уравнений (1a) – (1c) следует, что давление p является гармонической функцией вне границы D :

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \notin \partial D (2)$$

Движение самой свободной границы капли зависит от t и определяется кинематическим условием:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial D (3)$$

при условии, что число Рейнольдса невелико: $Re = \frac{uR\rho}{\mu} \ll 1$, где u – скорость жидкости, R – характерная длина капли, ρ – плотность жидкости, а μ – вязкость. Размер капель, которые мы изучаем, составляет порядок микронов, и при этом условии

эта гипотеза обычно выполняется. С другой стороны, капли достаточно велики, чтобы удовлетворить гипотезе континуума, которая диктует, что совокупность движения молекул жидкости может рассматриваться как континуум.

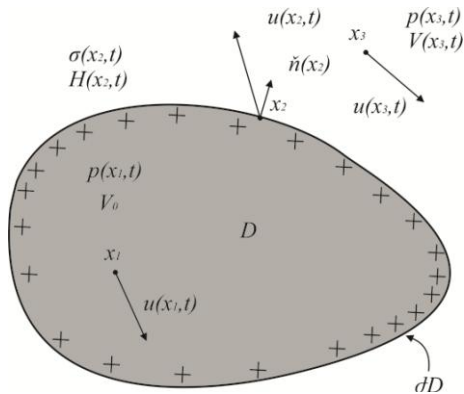


Рис. 1. Капля заряженной жидкости

Стоит отметить, что мы также не учитываем влияние испарения на эволюцию капли. Временной масштаб движения свободной границы составляет порядка миллисекунд, что явно недостаточно для значительных потерь массы из-за испарения.

Жидкость внутри капли является идеальным электрическим проводником, тогда как жидкость вне капли является идеальным электрическим изолятором. Кроме того, капля содержит количество электрического заряда Q . Так как жидкость внутри капли является проводящей, то заряды в ней отталкиваются друг от друга и движутся к свободной границе, а поскольку они не могут убежать в изолирующую внешнюю жидкость, они в конечном итоге распределяются вдоль свободной границы ∂D с плотностью поверхностного заряда σ и создают электрическое поле с электрическим потенциалом V . Электрический потенциал V постоянен внутри капли (рис. 1) т.е.

$$V(x, t) = V_0, \text{ для } x \in D \quad (4)$$

и удовлетворяет уравнению Лапласа вне капли D

$$\nabla^2 V(x, t) = 0, \text{ для } x \notin D \quad (5)$$

На свободной границе потенциал V непрерывен, но нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ терпит разрыв. Скачок нормальной производной и плотности поверхностного заряда σ на свободной границе связаны:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6)$$

где $\left[\frac{\partial V}{\partial n} \right]_{\partial D}$ обозначает скачок величины через свободную границу ∂D ,

ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Плотность поверхностного заряда σ также удовлетворяет условию:

$$\int_{\partial D} \sigma ds = Q \quad (7)$$

в силу закона сохранения заряда Q постоянна во времени.

Для поля скорости u соответствует граничное условие на свободной границе:

$$[S\hat{n}]_{\partial D} = \left(2\gamma H - \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \right) \hat{n}, \text{ или } [S\hat{n}]_{\partial D} = (2\gamma H - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}) \hat{n} \quad (8)$$

где γ – константа капиллярности, H – средняя кривизна, а \hat{n} – (нормальный вектор направленности) свободной границы, а S – тензор напряжений определяется следующим образом

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (9)$$

Заметим, что это граничное условие связывает поле скорости жидкости с электростатическим полем (через плотность поверхностного заряда σ).

Интересная динамика возникает от существования двух противоположных сил, действующих на границе раздела между двумя жидкостями, сил капиллярности $-(2\gamma H)$ и электростатической силой $(\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0})$ в выражении (8). В то время как капиллярность пытается сделать каплю максимально гладкой и сферической, электрические силы стремятся усилить любые «удары» формы капли, т.к. заряды накапливаются в частях свободной границы с высокой кривизной и тянут на поверхность в этих точках (рис. 2):

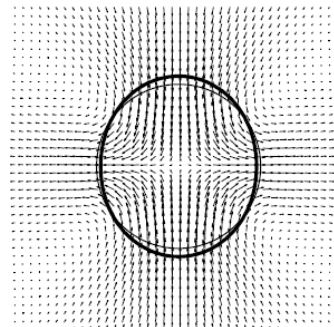


Рис. 2. Изменение границы капли.

3. Моделирование заряженной капли жидкости в пакете Comsol Multiphysics

Компьютерное моделирование в среде COMSOL Multiphysics позволяет исследовать физические явления, которые могут быть охарактеризованы как электромагнетизмом, структурной механикой, акустикой, гидродинамикой, тепловыми и химическими реакциями, а также дифференциальными уравнениями с частными производными. Программный модуль COMSOL Multiphysics был выбран для изучения и анализа динамики заряженной капли. Интерфейс пакета подобран с учетом рассматриваемой математической модели движения границы заряженной капли жидкости и определенной выше следующими уравнениями: (1a-1c), (3)-(5). Но на границе ∂D (рис. 1) нормальная производная электрического потенциала $\frac{\partial V}{\partial n}$ является разрывной функцией. Скачок нормальной производной электрического потенциала и плотности поверхностного заряда σ на свободной границе связаны и представлены выражением (6), (8).

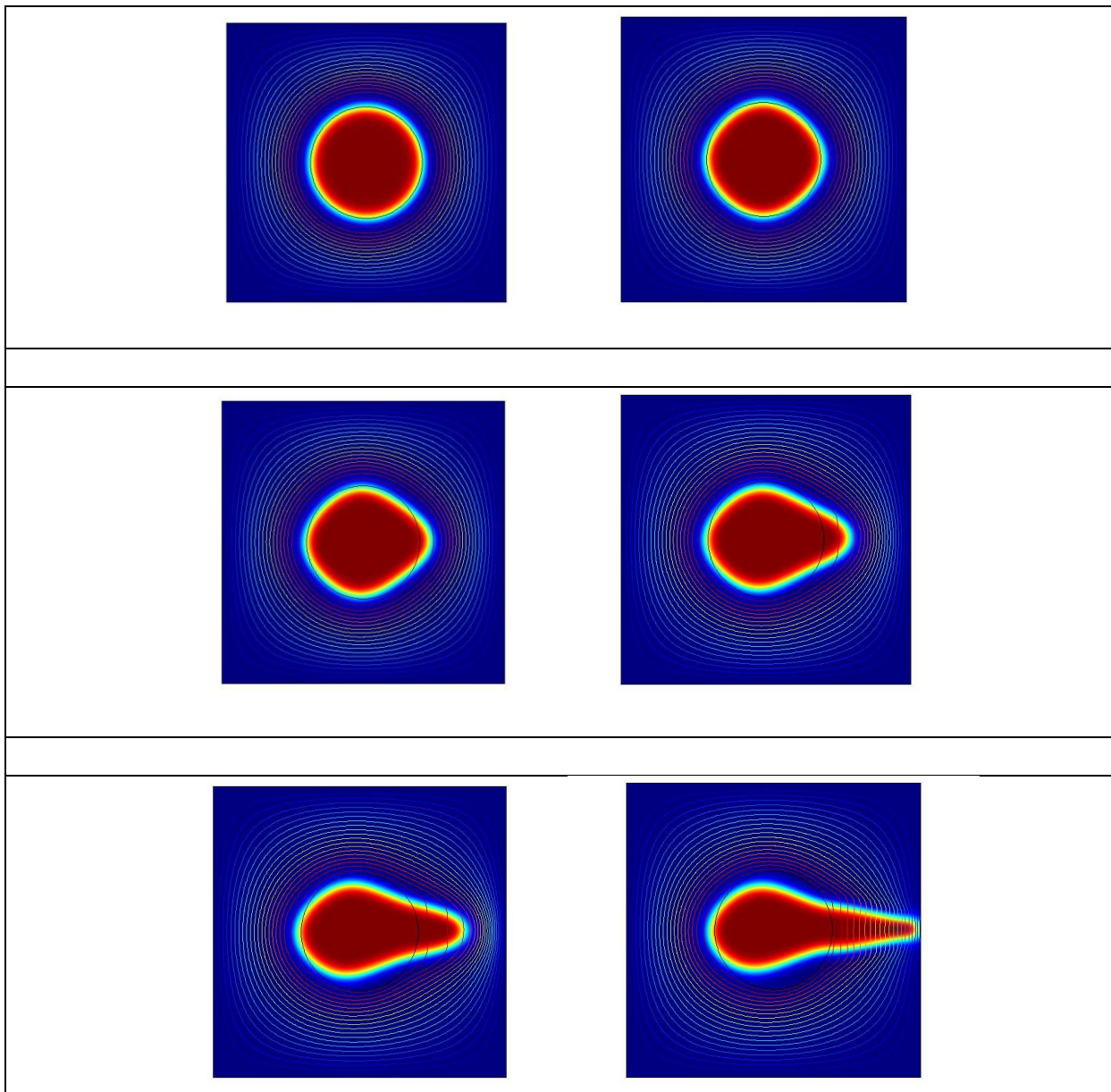


Рисунок 4. Динамика изменения свободной границы капли при $t = 0,01$ с, $t = 0,2$ с, $t = 0,35$ с, $t = 0,43$ с, $t = 0,47$ с.

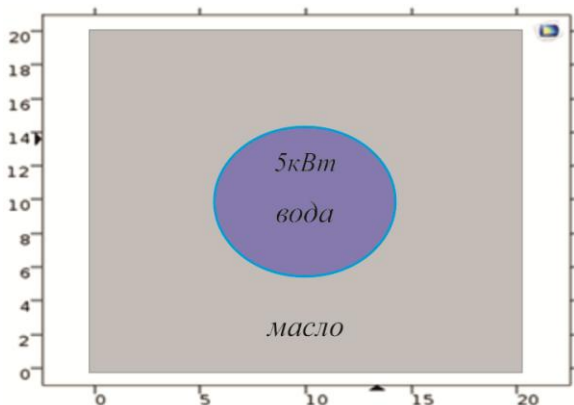


Рис. 3. Геометрические параметры формы заряженной капли и внешней среды масла.

Используя пакет COMSOL Multiphysics смоделируем динамику изменения формы заряженной капли в масле, т.е. в среде более вязкой жидкости. В качестве примера рассмотрим изменение формы заряженной капли с зарядом 5 кВт, помещенной в масло. Начальная скорость движения масла равна нулю.

В начальный момент задается ламинарный двухфазный поток, интерфейсы фазового поля устанавливаются уравнениями движения жидкости в соответствии с уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\rho \partial u}{\partial t} + \rho(u \nabla)u = \nabla[-pI + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)] + F_{st} + \rho g + F$$

$$\nabla u = 0$$

Здесь u – скорость, ρ – плотность, μ – вязкость, p – давление, I – единичный вектор, g – ускорение, F_{st} – поверхностное напряжение, F – дополнительная сила.

Электростатический интерфейс устанавливается уравнением для V (электростатический потенциал): $-\nabla(\epsilon_0\epsilon_r\nabla V) = 0$. Здесь ϵ_0 – проницаемость вакуума, ϵ_r – относительная проводимость.

Программа позволяет автоматически устанавливать уравнения, описанные ранее. Для двухфазного потока необходимо указать мощность. Электрическая мощность определяется $F = \nabla T$ где тензор Максвелла:

$$T = ED^T - \frac{1}{2}(E D) I$$

Здесь E – электрическое поле, D – электрический сдвиг:

$$E = \nabla V, D = \epsilon_0\epsilon_r E$$

В этом примере тензор напряжений двумерный $2D$, поэтому:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_0\epsilon_r E_x^2 - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r(E_x^2 + E_y^2) & \epsilon_0\epsilon_r E_x E_y \\ \epsilon_0\epsilon_r E_y E_x & \epsilon_0\epsilon_r E_y^2 - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r(E_x^2 + E_y^2) \end{bmatrix}$$

Компоненты электрического поля вычисляются с помощью электростатического интерфейса.

Для определения степени вязкости жидкости, когда заряженная капля воды распространяется в более вязкой среде в масле, можно использовать следующую формулу: $\mu = \frac{gD^2(\rho_B - \rho_M)}{18u}$. Как нам известно, $\rho_B = 0.98$ г/см³, $\rho_M = 0.89$ г/см³.

Результаты компьютерного моделирования на рис. 4 показали, что используя пакет COMSOL Multiphysics, во всех тестах происходит постепенное изменение формы заряженной капли в масле.

Программный код адекватно моделирует положение границы раздела фаз.

Заключение

В результате изучения данной темы была выведена подходящая математическая модель. Затем мы представили анализ линейной устойчивости семейства решений, возникающих из-за возмущения сферы радиуса R (являющейся равновесным решением) [4]. По итогам работы можно увидеть как стабильность капли зависит от значений заряда, объема, поверхностного натяжения и вязкости, а также от формы капли.

В результате на основе представленной математической модели создана компьютерная модель заряженной капли жидкости на базе программного модуля Comsol Multiphysics. Компьютерная и математическая модель адекватно отражают динамику изменения границы заряженной капли жидкости и показывают положение границы раздела фаз.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05134098).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалева Л. А., Миннигалимов Р. З., Зиннатуллин Р. Р. Исследование устойчивости водонефтяной эмульсии в электромагнитном поле в зависимости от ее диэлектрических свойств // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2010. №2. С. 59–62.
2. Абрамова О. А., Иткулова Ю. А., Гумеров Н. А. Моделирование трехмерного движения деформируемых капель в стоковом режиме методом граничных элементов // Вычислительная Механика сплошных сред. 2013. Т. 6, №2. С. 214–223.
3. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc5240/m1/1/>
4. Омарова Ж. Ж., Шалабаева Б. С. // Сб. мат-лов Республиканской научно-практ. конф. «Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана». Астана. 2018 г. С. 106–114.

Поступила в редакцию 14.09.2018 г.

MODELING THE DYNAMICS OF CHARGED LIQUID DROPLET

© N. J. Jaichibekov¹, V. N. Kireev², B. S. Shalabaeva^{1*},
J. J. Omarova¹, Z. A. Kutpanova¹

¹*L.N. Gumilyov Eurasian National University
2 Satpaev Street, 010008 Astana, Republic of Kazakhstan.*

²*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

**Email: shalabaeva.b.s@mail.ru*

The dynamics of disperse systems is an actual problem of studies in modern science and technology. Among the examples of such systems, there are emulsions that are used in many industries: oil and gas, construction, automotive, food, biotechnology, medicine, as well as in micro and nanotechnologies. Stokes simulation of flows in different areas is also actual for micro-fluidics. At the same time, there is a very limited number of solutions to such problems. It is hard and expensive to conduct laboratory studies on the dynamics of droplets of emulsions in micro-channels. The authors of the article considered a mathematical model: the conductive liquid droplet moving under the influence of surface tension and the electrostatic repulsion is immersed in a dielectric infinite liquid. Using the equations of hydrodynamics and electromagnetism and a number of physically realistic assumptions, the authors reduced the problem to a system of partial differential equations. The solution of such a system of equations is particularly complicated. When studying the dynamics of electrically charged liquid droplets moving under the action of surface tension and electrostatic forces, special attention is paid to the stability of these droplets and the formation of finite-time features on a free surface. These features have the appearance of conical tips on the surface of the drop, where the curvature of the surface and the velocity fields of the fluid diverge at a certain time. The mathematical and computer model created on the basis of the software module Comsol Multiphysics adequately reflected the dynamics of change boundaries of a charged liquid drop and located the position of the phase boundary.

Keywords: liquid, conductive drop, surface tension, electrostatic force, model, simulation.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Kovaleva L. A., Minnigalimov R. Z., Zinnatullin R. R. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz.* 2010. No. 2. Pp. 59–62.
2. Abramova O. A., Itkulova Yu. A., Gumerov N. A. *Vychislitel'naya Mekhanika sploshnykh sred.* 2013. Vol. 6, No. 2. Pp. 214–223.
3. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc5240/m1/1/>
4. Omarova Zh. Zh., Shalabaeva B. S. *Sb. mat-lov Res-publikanskoi nauchno-prakt. konf. «Sovremennye problemy matematicheskogo i komp'yuternogo modeli-rovaniya v usloviyakh razvitiya tsifrovoy industrii Kazakhstana.* Astana. 2018 g. Pp. 106–114.

Received 14.09.2018.