

УДК 532.5.031:532.593

ЭФФЕКТИВНОСТЬ TVD-МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА С. К. ГОДУНОВА ПРИ РАСЧЕТЕ ВОЛН В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

© А. А. Аганин, Н. А. Хисматуллина*

ИММ – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН
Россия, Республика Татарстан, 420111 г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31.

Тел.: +7 (843) 272 90 34.

*Email: nailya_hism@mail.ru

Исследуется возможность повышения эффективности расчета волн в упруго-пластическом теле методом С. К. Годунова за счет его TVD-модификации. Оценка повышения эффективности осуществляется путем сравнения результатов расчетов методом С. К. Годунова и его модификацией одномерной и двумерной задач о распространении волн в упруго-пластическом теле, возникающих в нем при импульсном воздействии на его свободную поверхность. Показано, что в рассматриваемых задачах TVD-модификация оказывается существенно более эффективной. В частности, при ее использовании близкого по точности численного решения как одномерных, так и двумерных задач удается получить на значительно (в четыре раза) более грубых сетках, что позволяет сократить на порядок время расчета.

Ключевые слова: упруго-пластическое тело, метод Годунова, схема TVD, эффективность разностных схем.

Введение

При изучении динамики тела [1] широко применяется классический метод С. К. Годунова [2–3] из-за его устойчивости и монотонности. Однако он имеет первый порядок точности, поэтому для описания с приемлемой точностью распространения волн в теле зачастую необходимы очень мелкие сетки. Это может приводить к непомерно большим затратам компьютерных ресурсов.

В работах [4–6] показано, что эффективность расчетов линейных волн в упругом теле методом С. К. Годунова можно повысить с помощью его TVD- и UNO-модификаций второго порядка точности [7] (TVD – Total Variation Diminishing, уменьшающей полную вариацию; UNO – Uniformly Non Oscillatory, равномерно безосцилляционной). Как известно, в TVD- и UNO-схемах условие монотонности заменяется условием TVD – невозрастания полной вариации, причем в TVD-схемах оно выполняется строго, а в UNO-схемах приближенно (на уровне погрешностей аппроксимации).

В настоящей работе изучается возможность повышения эффективности расчета волн в упруго-пластическом теле классическим методом С. К. Годунова за счет его TVD-модификации, предложенной ранее авторами для повышения эффективности расчета упругих волн [4–5].

Постановка задачи

Для описания динамики тела используются следующие уравнения:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(S_{rr} - P)}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r},$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial(S_{zz} - P)}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} - 2 \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время; r, z – радиальная и осевая цилиндрические координаты; ρ – плотность; u, v – компоненты вектора скорости; $S_{rr}, S_{zz}, S_{\varphi\varphi}, S_{rz}$ – компоненты девятатора S тензора напряжений σ , P – всестороннее (гидростатическое) давление; $\sigma = S - PE$; E – тензорная единица, $K = \lambda + 2/3\mu$ – коэффициент объемного расширения; $\lambda = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)$, $\mu = \rho c_2^2$ – параметры Ламе, c_1 и c_2 – продольная и сдвиговая скорости звука.

В пластических зонах выполняется условие текучести Мизеса [8]

$$\sigma_i = Y_0,$$

где Y_0 – предел текучести материала тела, σ_i – интенсивность напряжений,

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S_{rr} - S_{zz})^2 + (S_{rr} - S_{\varphi\varphi})^2 + (S_{zz} - S_{\varphi\varphi})^2 + 6S_{rz}^2}$$

На большом удалении от места приложения нагрузки параметры тела остаются невозмущенными. В начальный момент времени деформации и напряжения в теле отсутствуют.

Изучается возможность повышения эффективности расчета упруго-пластических волн в теле классическим методом С. К. Годунова за счет его TVD-модификации.

Исследуемая в настоящей работе TVD-модификация полностью аналогична той, что изучалась в [4–5] для чисто упругого тела. В этой модификации производные по времени искомым функций выражаются через их пространственные производные [9]. Это позволяет вычислить значения искомым функций на следующем полуслое по времени в центре ячеек сетки и по обе стороны каждой из их граней. Значения на самих гранях определяются как решение задачи о распаде разрыва. Расчет значений на следующем временном слое осуществляется по явной схеме. На значения производных по пространственным переменным в ячейке вводятся ограничители. Применяемый в схеме TVD ограничитель включает в себя аппроксимации производных первого порядка. Схема TVD имеет второй порядок точности всюду, кроме экстремумов, где порядок ее точности понижается до первого.

В [4–5] было установлено, что в случае чисто упругого тела TVD-модификация метода С. К. Годунова позволяет добиться существенного повышения эффективности расчетов. В частности, в указанных работах было показано, что TVD-модификация значительно лучше описывает радиально-сходящиеся, радиально-расходящиеся продольные и сдвиговые волны и контактные разрывы как в одномерной, так и двумерной постановке задач.

Наличие пластичности не внесло каких-либо дополнительных изменений в алгоритм и формулы рассматриваемой TVD-модификации по сравнению с тем, как они выглядят в случае чисто упругого тела. Их подробное описание можно найти в работах [4–6]. Вместе с тем, из-за эффекта пластичности задача становится существенно нелинейной. Кроме того, различие скоростей распространения упругих и пластических волн может также повлиять на качество численных решений. Все это и обусловило проведение представленного в настоящей работе исследования.

Методика расчета

Цилиндрическая система координат r, z вводится так, что ее начало располагается на поверхности тела в центре круговой области воздействия, а ортогональная поверхности тела ось z направлена от тела. Расчетная область в одномерном случае представляет собой отрезок прямой $[-d, 0]$, а в двумерном – квадрат $[0, d] \times [-d, 0]$. Она покрывается равномерной сеткой с шагом h . Краями расчетной области могут быть жесткая стенка, свободная поверхность или искусственная граница. В случае жесткой стенки задается ее скорость, в случае свободной поверхности – нормальное напряжение. Искусственная граница вводится для выделения части тела, наиболее важной для конкретного исследования. На ней ставятся неотражающие условия.

Для решения системы (1) используется явная конечно-разностная схема. Шаг по времени опре-

деляется из условия Куранта [10] в одномерном случае по формуле $\Delta t = \delta h/c$, а в двумерном, с квадратной сеткой – по формуле

$$\Delta t = \delta \frac{h}{2c},$$

где c – максимальная скорость распространения волн в теле, $\delta < 1$. В настоящей работе $c = c_1$, $\delta = 0.95$.

При использовании как метода С. К. Годунова, так и его TVD-модификации для учета пластичности используется подход работы [8]. На каждом шаге по времени напряжения в теле рассчитываются сначала как решение системы (1) без учета его пластичности. Далее, если в некоторой точке условие текучести нарушается, то есть если интенсивность напряжений в этой точке оказывается больше предела текучести, то тензор S корректируется в ней по формуле

$$S_{corr} = \frac{Y_0}{\sigma_i} S.$$

В рассматриваемых ниже задачах считается, что материалом тела является никелевый сплав со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга $E=196$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность $\rho=8000$ кг/м³, предел текучести $Y_0=125$ МПа.

Расчет одномерных волн, обусловленных изменением давления на поверхности тела

Рассматривается распространение внутрь ненапряженного тела одномерных волн при импульсном воздействии на его свободную поверхность $z=0$. Импульсное воздействие состоит в том, что давление $p_T(t)$ на свободной поверхности сначала скачкообразно повышается, затем некоторое время удерживается на достигнутом уровне, после чего плавно снимается по эллипсоидальному закону (рис. 1). Математически это выражается следующим образом:

$$p_T(t) = \begin{cases} p^*, & \text{если } t \leq t^* \\ p^* \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t - 4t^*}{3t^*} \right)^2} \right), & \text{если } t \leq 4t^* \\ 0, & \text{если } t > 4t^* \end{cases} \quad (2)$$

Расчеты выполнены при следующих значениях параметров воздействия: $p^*=400$ МПа, $t^*=3 \times 10^{-5}$ с. В качестве характерного пространственного размера выбрана величина $L=c_1 t^*$, а определяющий размеры расчетной области параметр d принят равным $23.2 L$.

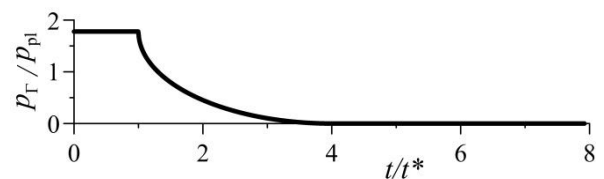


Рис. 1. Закон нагружения поверхности тела.

При указанных выше механических характеристиках никелевого сплава возмущения в теле остаются упругими, пока p^* не превышает $p_{pl} = 225$ МПа. При более высоких значениях p^* в теле возникают пластические деформации.

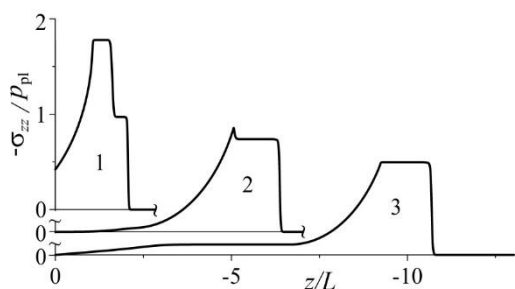


Рис. 2. Распространение импульсов σ_{zz} в теле (по расчетам схемой TVD на равномерной очень мелкой сетке с шагом $h/L = 1/176$). Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_{1,3} / t^* = 2.1, 6.4, 10.7$.

Рис. 2 иллюстрирует особенности возникающих в теле импульсов и их распространения внутрь тела. Видно, что передний фронт импульса расщепляется на упругий предвестник, который движется вглубь тела со скоростью c_1 , и пластическую волну, скорость которой $c_* = \sqrt{K/\rho} < c_1$ (момент 1). Задний фронт представляет собой упругую волну и имеет профиль, соответствующий профилю нагружения (2). Со временем упругий предвестник удаляется от пластической волны, а задний фронт догоняет ее и взаимодействует с ней. В результате этого амплитуда пластической волны уменьшается (момент 2) и становится сравнимой с амплитудой упругой волны, а в области заднего фронта возникает волна относительно небольшой амплитуды, распространяющаяся в сторону поверхности тела (момент 3).

Рис. 3 демонстрирует сходимость численных решений метода С. К. Годунова и его TVD-модификации в момент 3 на трех сетках, последовательно измельчаемых в четыре раза. Видно, что решение TVD-модификации сходится существенно быстрее. При этом решение TVD-модификации для сетки с шагом $h/L = 1/11$ близко (и даже несколько точнее) решения метода С. К. Годунова для сетки с $h/L = 1/44$. Аналогичное соотношение имеет место и между их решениями для сеток с $h/L = 1/44$ и $1/176$. По затратам компьютерного времени в данной задаче TVD-модификация в двадцать раз эффективнее метода С. К. Годунова.

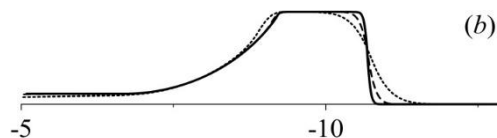
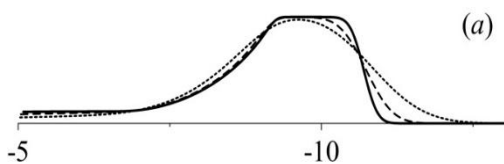


Рис. 3. Численные решения в момент t_3 , рассчитанные методом С. К. Годунова (а) и его TVD-модификацией (b) на сетках с $h/L = 1/11$ (пунктирные линии), $1/44$ (штриховые) и $1/176$ (сплошные).

Расчет волн, обусловленных изменением давления на части поверхности тела

Рассматривается распространение внутрь ненапряженного тела волн, возникающих в нем при импульсном воздействии, аналогичном воздействию (2), но не на всю его свободную поверхность $z = 0$, а на круговую область радиуса R с центром в начале координат. При таком воздействии давление $p_r(r, t)$ на свободной поверхности изменяется следующим образом:

$$p_r(r, t) = \begin{cases} p^*, & \text{если } t \leq t^* \text{ и } r \leq R \\ p^* \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t - 4t^*}{3t^*} \right)^2} \right), & \text{если } t \leq 4t^* \text{ и } r \leq R \\ 0, & \text{если } t > 4t^* \text{ или } r > R \end{cases}$$

Значения параметров воздействия p^* , t^* принимаются теми же, что и в одномерном случае. В качестве характерного пространственного размера выбирается $R = d/4$, где, как и в предыдущей задаче, $d = 23.2 L$, $L = c_1 t^*$.

Рис. 4 иллюстрирует особенности изменения осевых профилей σ_{zz} в теле и их отличие от того, что реализуется в одномерном случае. Видно, что в первый момент соответствующие профили полностью совпадают. В последующие моменты влияние неоднородности воздействия приводит ко все большему расхождению в их задней части, где реализуется взаимодействие пластической и упругой волн. Очевидно, что расхождение обусловлено радиальными волнами, возникающими на периферии круговой области поверхности тела, подвергающегося импульсному воздействию. В частности, в момент 3 профиль двумерной задачи в отличие от профиля одномерной имеет в своей задней части сильно немонотонный характер.

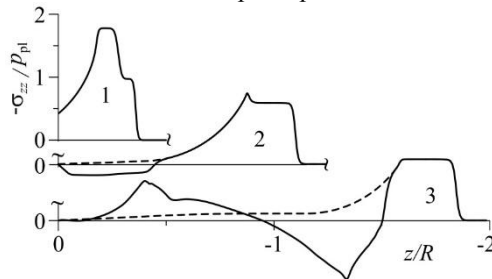


Рис. 4. Изменение осевых профилей σ_{zz} в теле (по результатам расчетов схемой TVD на очень мелкой равномерной сетке с шагом $h/R = 1/256$). Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_{1,3} / t^* = 2.1, 6.4, 10.7$. Штриховыми кривыми показано решение одномерной задачи.

Рис. 5 демонстрирует изменение поля интенсивности напряжений σ_i и зон с ее предельным значением $\sigma_i = Y_0$ (зоны текучести) в процессе импульсного воздействия. Видно, что возникшая в теле зона текучести в момент 1 находится на некотором удалении от поверхности тела. Ее размеры в радиальном направлении примерно равны размерам подвергаемой импульсному воздействию области свободной поверхности тела. Со временем она постепенно удаляется от поверхности, уменьшается в размерах и распадается на несколько частей, наибольшая из которых находится вблизи переднего фронта возмущений, распространяющихся вглубь тела (момент 2). В дальнейшем относительно небольшие части зоны текучести остаются лишь вблизи оси симметрии у поверхности и внутри тела. Их возникновение обусловлено сложным взаимодействием волн в области между задним фронтом импульса и поверхностью тела.

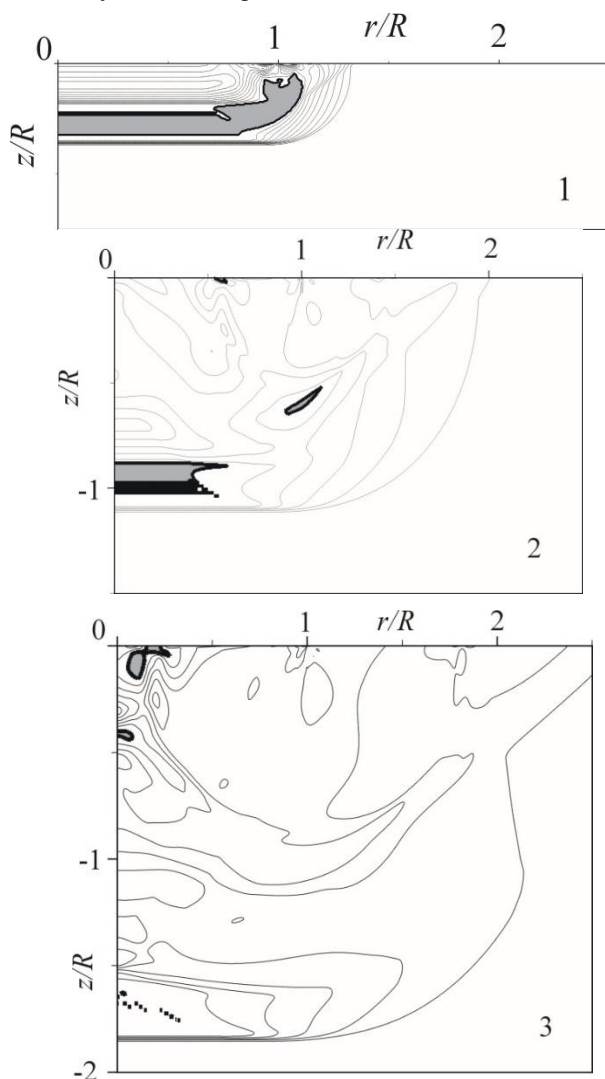


Рис. 5. Изолинии интенсивности напряжений σ_i в теле в три момента времени $t_{1-3} / t^* = 2.1, 6.4, 10.7$ (по результатам расчетов схемой TVD на очень мелкой равномерной сетке с шагом $h/R = 1/256$). Закрашенные области – зоны с предельной интенсивностью напряжений $\sigma_i = Y_0$.

Рис. 6 демонстрирует сходимость численных решений метода С. К. Годунова и его TVD-модификации в рассматриваемом двумерном случае в момент времени 3. Видно, что так же, как и в одномерном случае, TVD-модификация сходится значительно быстрее, причем ее решение на сетке с шагом $h/R = 1/64$ визуально практически совпадает с решением метода С. К. Годунова на сетке с $h/R = 1/256$. При этом окрестности экстремумов описываются схемой TVD заметно точнее. По затратам компьютерного времени в этой задаче TVD-модификация более чем в шестьдесят раз эффективнее классического метода С. К. Годунова.

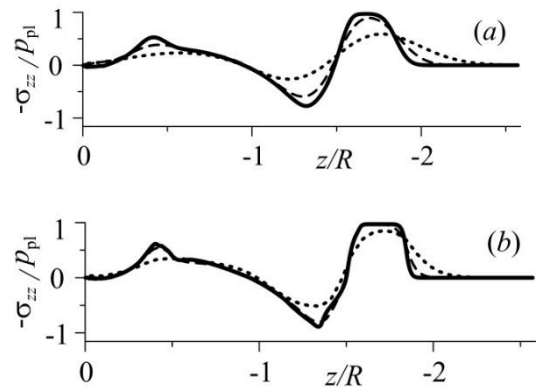


Рис. 6. Осевые профили численных решений двумерной задачи в момент t_3 , рассчитанные методом С. К. Годунова (a) и его TVD-модификацией (b) на сетках с $h/R = 1/16$ (пунктирные линии), $1/64$ (штриховые) и $1/256$ (сплошные).

Заключение

Приведены результаты исследования эффективности расчета волн в упруго-пластическом теле с использованием TVD-модификации метода С. К. Годунова, имеющей условно второй порядок точности, по сравнению с его классическим вариантом, имеющим первый порядок точности. Второй порядок точности TVD-модификации условен, поскольку в точках экстремумов решения он снижается до первого. Рассмотрены одномерная и двумерная задачи в осесимметричной постановке в том случае, когда давление на свободной поверхности тела в одномерной задаче и на круговой части свободной поверхности в двумерной задаче сначала скачкообразно возрастает, затем в течение некоторого времени удерживается на достигнутом уровне, после чего плавно снижается по эллипсоидальному закону. Показано, что TVD-модификация существенно эффективнее метода С. К. Годунова. В частности, по затратам компьютерного времени она эффективнее в двадцать раз в одномерной задаче и более чем в шестьдесят раз в двумерной. При этом учет пластичности не ухудшает эффективности TVD-схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебан В. Г., Навал И. К., Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А. Численные методы решения задач динамической теории упругости. Кишинев: изд-во Штиинца, 1976. 226 с.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
4. Аганин А. А., Хисматуллина Н. А. Расчет двумерных возмущений в упругом теле // Ученые записки Казанского университета. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Т. 159. Кн. 2. С. 143–160.
5. Аганин А. А., Хисматуллина Н. А. Схемы второго порядка точности для расчета динамики возмущений в упругом теле // Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12. №1. С. 44–50.
6. Аганин А. А., Хисматуллина Н. А. Модификации метода С. К. Годунова для расчета распространения возмущений в упругом теле // Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11. С. 119–126.
7. Harten A., Engquist B., Osher S. and Chakravarthy S. R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J.Comp. Phys. 1987. V. 71. P. 231–303.
8. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
9. Lax P. D., Wendroff B. Systems of Conservation Laws // Comm. Pure and Appl Math. 1960. V. 13. P. 217–237.
10. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // УМН. 1941. Вып. 8. С. 125–160.

Поступила в редакцию 24.04.2018 г.

THE EFFICIENCY OF TVD-MODIFICATION OF THE GODUNOV METHOD IN COMPUTATION OF WAVES IN AN ELASTIC-PLASTIC BODY

© A. A. Aganin, N. A. Khismatullina*

*Institute of Mechanics and Engineering, subdivision of Kazan Scientific Center of RAS
2/31 Lobachevsky Street, 420111 Kazan, Republic of Tatarstan, Russia.*

Phone: +7 (843) 272 90 34.

**Email: nailya_hism@mail.ru*

The authors of the article studied the possibility of increasing the efficiency of computing the waves in an elastic-plastic body by the Godunov method by means of its TVD-modification. The considered TVD-modification allow the computation to reach the second order of accuracy for all cases except the extreme points of the solution, where the order of accuracy is reduced to first. The estimation of the increase in efficiency was carried out by direct comparison of the results of computations of one- and two-dimensional problems on the propagation of waves in an elastic-plastic body according to the Godunov method and its TVD-modification. The waves were assumed to appear in the body under the pressure pulse action on its free surface. It is shown that the TVD-modification is much more efficient. In particular, it allows one to obtain numerical solutions of nearly the same accuracy on much more (about four times) coarser computational grids than the grids used in computations by the Godunov method. This means that the TVD-modification makes it possible to reduce the computation time by about an order of magnitude. It is also found that the effect of plasticity has no significant influence on the efficiency of the TVD-modification.

Keywords: elastic-plastic body, Godunov method, TVD-modification, difference scheme efficiency.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Cheban V. G., Naval I. K., Sabodash P. F., Cherednichenko R. A. *Chislennyye metody resheniya zadach dinamicheskoy teorii uprugosti* [Numerical methods for solving problems of the dynamic theory of elasticity]. Kishinev: izd-vo Shtiintsa, 1976.
2. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Raznostnyye skhemy* [Difference schemes]. Moscow: Nauka, 1973.
3. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1976.
4. Aganin A. A., Khismatullina N. A. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauki*. 2017. Vol. 159. Kn. 2. Pp. 143–160.
5. Aganin A. A., Khismatullina N. A. *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*. 2017. Vol. 12. No. 1. Pp. 44–50.
6. Aganin A. A., Khismatullina N. A. *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*. 2016. Vol. 11. Pp. 119–126.
7. Harten A., Engquist B., Osher S. *J.Comp. Phys.* 1987. Vol. 71. Pp. 231–303.
8. Wilkins M. L. *Vychislitel'nye metody v gidrodinamike*. Moscow: Mir, 1967. Pp. 212–263.
9. Lax P. D., Wendroff B. *Comm. Pure and Appl Math.* 1960. Vol. 13. Pp. 217–237.
10. Courant R., Friedrichs K., Lewi H. *UMN*. 1941. No. 8. Pp. 125–160.

Received 24.04.2018.