УДК 620.179.14

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТНЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Р. В. Загидулин[1]*, Т. Р. Загидулин[2]

[1]*Башкирский государственный университет*
Россия, Республика Башкортостан,450076 г Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2]*ООО «НТЦ «Спектр»*
Россия, Республика Башкортостан,450077 г Уфа, ул. Кирова,89.

Тел./факс:+7 (347) 234 02 12.
**Email: doctech.zagrv@post.com*

Приведены базисные вейвлетные функции для преобразования функций двух переменных, которые основаны на одномерных вейвлетных функциях алгебраического типа.

Ключевые слова: *вейвлетные функции алгебраического типа, параметры вейвлетного преобразования, двумерные базисные функции, преобразование Фурье, двумерное вейвлетное преобразование.*

Введение

Практика показала эффективность применения вейвлетного преобразования при цифровой обработке измеренной информации различного вида (временные электрические сигналы преобразователей физических полей, акустические и сейсмические сигналы и т.д.), которые в общем случае не являются периодическими функциями и для которых характерна существенная неоднородность (как по амплитуде, так и по частоте сигнала), а также наличие случайных шумов и помех [1–4].

Вейвлетное преобразование широко применяется также при цифровой обработке видеоизображений, графических поверхностей и т.д., т.к. часто информация, полученная над массивными объектами, представляется в удобном для восприятия виде трехмерных изображений (*рис.*1) [5–7].

Вейвлетное преобразование, как и Фурье – преобразование, основано на синтезе исследуемого сигнала на основе заданных базисных функций, при этом базисные функции для преобразования многомерных сигналов (графические поверхности, видеоизображения и т.д.) строятся на основе существующих одномерных базисных функций [1; 5].

Практика показала, что применение большинства существующих вейвлетов, относящихся к классу трансцендентных функций, приводит к значительным вычислительным трудностям при реализации математической обработки измеренных сигналов в микропроцессорных устройствах, функционирующих в масштабе реального времени. В связи с этим, разработчикам аппаратуры часто приходится решать задачу выбора наиболее подходящих вейвлетных функций для обеспечения практического решения проблемы эффективной цифровой обработки измеренной информации.

Для преодоления этих трудностей были разработаны материнские вейвлетные функции алгебраического типа, позволяющие анализировать широкий класс одномерных измеренных сигналов [3; 8].

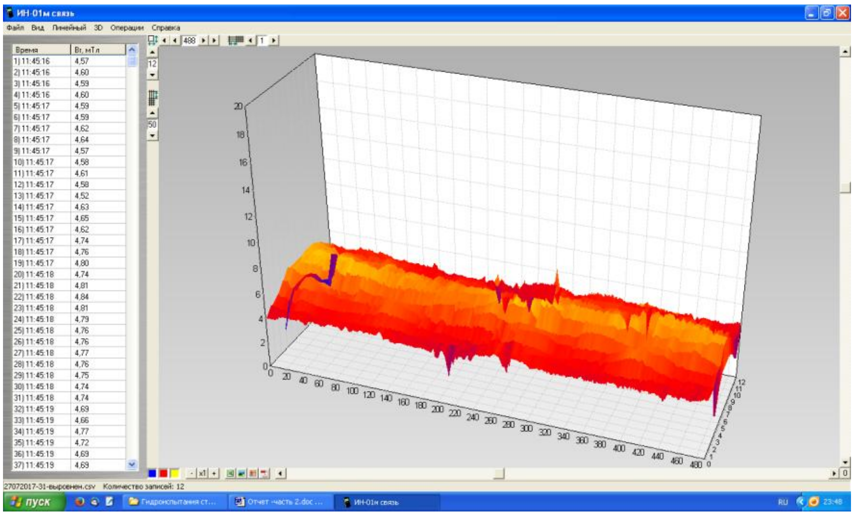

Рис.1. Графическая поверхность распределения напряженного состояния металла стальной трубы (получено индикатором механического напряжения металла ИН-02 сканирующего типа).

В данной работе рассматриваются вопросы, касающиеся двумерных базисных функций алгебраического типа, необходимых для эффективного вейвлетного преобразования функций двух переменных, которыми описываются графические поверхности, видеоизображения и т.д.

Метод расчета

В теории преобразования Фурье показано, что базисные функции для преобразования функций двух переменных (двумерные базисные функции) строятся на основе одномерных базисных функций [9], при этом:

$$g\left(\bar{k},\bar{x}\right)=g\left(k_1,x_1\right)g\left(k_2,x_2\right),$$

где $g(k,x)=\exp(ikx)$ – одномерные тригонометрические базисные функции (i^2 = -1), $\bar{k}=\left\{k_1,k_2\right\}$ – параметры, $\bar{x}=\left\{x_1,x_2\right\}$ – переменные.

Аналогичный подход применяется и при двумерном вейвлетном преобразовании анализируемой информации [1; 5]. Можно показать правомерность этого подхода на основе соответствующих расчетов.

Вейвлетное преобразование функции одной переменной *f(x)* (одномерный сигнал) осуществляется по формуле [1]:

$$Wf(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,dx\,, \qquad (1)$$

где ψ – вейвлетная функция, a – масштабирующий параметр, b – параметр сдвига.

Осуществим вейвлетное преобразование (1) функции двух переменных $f(x_1, x_2)$, которая является непрерывной в области определения:

$$Wf\left(\tilde{o}_2,a_1,b_1\right)=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1.\tilde{o}_2\right)\,\overline{\psi\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)}\,dx_1\,, \qquad (2)$$

где a_1, b_1 – параметры вейвлетного преобразования функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1.

Коэффициенты вейвлетного преобразования (2) также являются непрерывными функциями от переменной x_2, по которой осуществим повторное вейвлетное преобразование (1) функции $Wf\left(\tilde{o}_2,a_1,b_1\right)$ (непрерывность этой функции позволяет перейти от повторных интегралов, возникающих при расчетах, к кратным интегралам [9]).

Определим полученный результат как вейвлетное преобразование функции двух переменных $f(x_1, x_2)$:

$$Wf\left(a_1,b_1,a_2,b_2\right)=\frac{1}{\sqrt{a_2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Wf\left(\tilde{o}_2,a_1,b_1\right)\,\overline{\psi\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)}\,dx_2=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\tilde{o}_1,\tilde{o}_2\right)\,\overline{\psi\left(\frac{x_1-b_1}{a_1}\right)\psi\left(\frac{x_2-b_2}{a_2}\right)}\,dx_1\,dx_2=\ldots \qquad (3)$$

$$\ldots=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\tilde{o}_1,\tilde{o}_2\right)\,\overline{\psi_{a_1,b_1}\left(x_1\right)\ \psi_{a_2,b_2}\left(x_2\right)}\,dx_1\,dx_2,$$

где a_2 ,b_2 – параметры вейвлетного преобразования функции $f(x_1,x_2)$ по переменной x_2 .

С другой стороны, по определению:

$$Wf\left(a_1,b_1,a_2,b_2\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\tilde{o}_1,\tilde{o}_2\right)\,\overline{\psi_{a_1,b_1,a_2,b_2}\left(x_1,x_2\right)}\,dx_1\,dx_2\,, \qquad (4)$$

где $\psi_{a_1,b_1,a_2,b_2}\left(x_1,x_2\right)$ – двумерные базисные вейвлетные функции.

Из формул (3)–(4) следует, что действительно, двумерные базисные функции для вейвлетного преобразования функций двух переменных определяются произведением одномерных базисных функций и представляются в следующем виде:

$$\psi_{a_1,b_1,a_2,b_2}\left(x_1,x_2\right)=\psi_{a_1,b_1}\left(x_1\right)\ \psi_{a_2,b_2}\left(x_2\right), \qquad (5)$$

где $\psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ – принятое обозначение вейвлетной функции [1].

Результаты и их обсуждение

Из формулы (5) следует, что двумерные базисные функции алгебраического типа для вейвлетного преобразования функций двух переменных могут быть получены на основе одномерных материнских вейвлетных функций (вейвлетов), имеющих вид (*рис.* 2) [3; 8]:

$$\psi_1(x)=\frac{z_1}{x^2+z_1^2}-\frac{z_2}{x^2+z_2^2}\,, \qquad (6а)$$

$$\psi_2(x)=\frac{\tilde{o}}{x^2+z_1^2}-\frac{\tilde{o}}{x^2+z_2^2}\,, \qquad (6б)$$

где z_1, $z_2 > 0$ – параметры вейвлетов, $|x| < \infty$ – переменная.

Вейвлеты (6) являются сопряженными функциями и могу быть представлены как действительная и мнимая части некоторой аналитической функции комплексного переменного [9]:

$$\psi(w)=\psi_1(x)+i\ \psi_2(x),$$

где $w=x+i\,z$ i^2=-1.

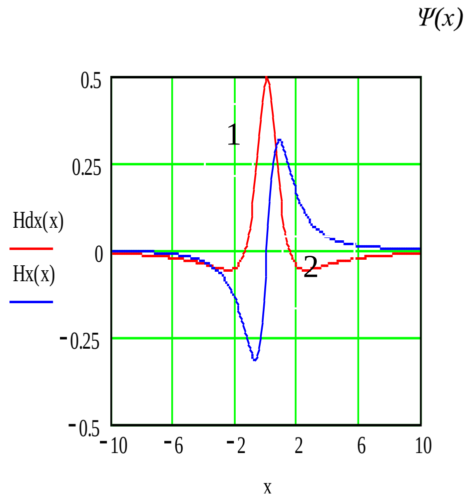

Рис.2. Материнская вейвлетная функция алгебраического типа. Кривая 1 – $\Psi_1(x)$; 2 – $\Psi_2(x)$.

С учетом выражений (6), материнская вейвлетная функция алгебраического типа в комплексной форме будет иметь вид:

$$\psi(w)=\frac{i}{w_1}-\frac{i}{w_2}, \qquad (7)$$

где $w_1 = x + i\,z_1$, $w_2 = x + i\,z_2$.

На основе формул (5), (7) можно получить двумерные базисные функции для вейвлетного преобразования функций двух переменных:

$$\psi(w_1, w_2)= \psi(w_1)\ \psi(w_2). \qquad (8)$$

В общем случае величины параметров вейвлетного преобразования (а также вейвлетных функций) на основе двумерных базисных функций (8) по переменным x_1, x_2 могут быть различными, при которых из (8) следует:

$$\psi(w_1, w_2)=-\left(\frac{1}{w_{11}}-\frac{1}{w_{21}}\right)\left(\frac{1}{w_{12}}-\frac{1}{w_{22}}\right), \qquad (9)$$

где $w_{11} = x_1 + i\,z_{11}$, $w_{21} = x_1 + i\,z_{21}$, $w_{12} = x_2 + i\,z_{12}$, $w_{22} = x_2 + i\,z_{22}$,.

Следует заметить, что для упрощения вейвлетных функций типа (9) на практике вейвлетного преобразования измеренной информации выбирают значения параметров $\bar{z}=\{z_{11}, z_{21}, z_{12}, z_{22}\}$ таким образом, что величина $z_{21} >> z_{11}$, $z_{22} >> z_{12}$, вследствие чего вторыми слагаемыми в формуле (9) можно пренебречь [10], при этом:

$$\psi(w_1, w_2)=-\frac{1}{w_{11}\,w_{12}}.$$

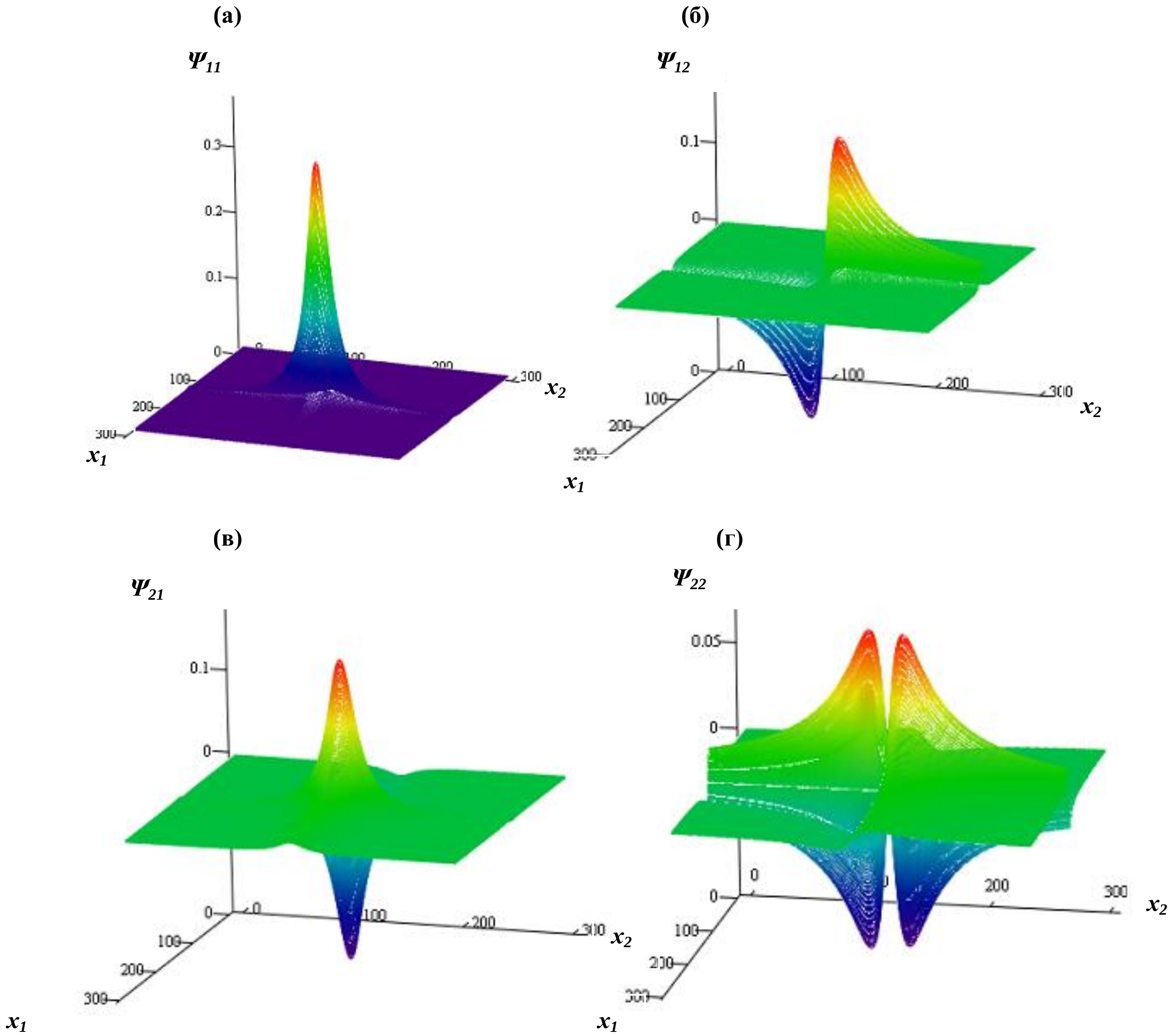

Рис. 3. Поверхности двумерных базисных функций алгебраического типа для вейвлетного преобразования функций двух переменных:
(а) – функция $\psi_{11}(x_1, x_2)$, (б) – $\psi_{12}(x_1, x_2)$, (в) – $\psi_{21}(x_1, x_2)$, (г) – $\psi_{22}(x_1, x_2)$,
параметры z_{11}= 1, z_{12}= 3.

Раскрывая скобки в формуле (9) получаем суперпозицию двумерных базисных функций алгебраического типа для вейвлетного преобразования функций двух переменных, которые в вещественной (действительной) форме имеют следующий вид:

$$\phi_{11}(x_1, \tilde{o}_2) = \phi_1(x_1)\ \phi_1(\tilde{o}_2),$$
$$\phi_{12}(x_1, \tilde{o}_2) = \phi_1(x_1)\ \phi_2(\tilde{o}_2), \quad (10)$$
$$\phi_{21}(x_1, \tilde{o}_2) = \phi_1(x_2)\ \phi_2(\tilde{o}_1),$$
$$\phi_{22}(x_1, \tilde{o}_2) = \phi_2(x_1)\ \phi_2(\tilde{o}_2).$$

Коэффициенты вейвлетного преобразования функций двух переменных (5) определяются множеством скалярных произведений анализируемой функции с двумерными базисными функциями алгебраического типа (10).

Следует заметить, что по своей структуре двумерные базисные функции (10) весьма схожи с двумерными тригонометрическими базисными функциями $g(k,x) = \exp(ikx)$ преобразования Фурье [9].

На *рис.*3 показаны графики поверхностей двумерных базисных функций алгебраического типа (10) для вейвлетного преобразования функций двух переменных. Видно, что они являются узколокализованными функциями, для которых характерна осцилляция значений.

Исследуем основные свойства двумерных базисных вейвлетных функций алгебраического типа (10).

Для принадлежности к классу вейвлетов, двумерные базисные функции алгебраического типа (10) должны удовлетворить необходимым условиям:

- функция $\psi(x_1, x_2)$ должна быть непрерывной в области определения и ее среднее значение равно нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)\, dx_1\, dx_2 = 0\,; \quad (11);$$

- норма функции $\psi(x_1, x_2)$ (ее энергия) должна быть конечной:

$$\left\|\Psi(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)\right\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)\,\overline{\Psi(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)}\, dx_1\, dx_2\right)^{1/2} < \infty\,. \quad (12)$$

Подставив двумерные базисные вейвлетные функции (10) в формулу (11) получаем, что действительно:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{11}\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{12}\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{21}\, dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{22}\, dx_1\, dx_2 = 0\,.$$

Норму двумерных базисных функций (10) определим при величинах параметров $z_{21} >> z_{11}$, $z_{22} >> z_{12}$ (для упрощения выражений). Подставив вейвлетные функции (10) в формулу (12) получаем, что действительно:

$$\left\|\Psi_{11}\right\| = \left\|\Psi_{12}\right\| = \left\|\Psi_{21}\right\| = \left\|\Psi_{22}\right\| = \frac{\pi}{2\sqrt{z_{11} z_{12}}} < \infty\,.$$

Таким образом, базисные функции алгебраического типа (10) действительно являются вейвлетами.

Двумерные базисные функции для вейвлетного преобразования функций двух переменных (10) являются ортогональными, так как скалярные произведения этих функций равны соответственно:

$$\left\langle \Psi_{ij}, \Psi_{kl} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ij}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)\,\overline{\Psi_{kl}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)}\, dx_1\, dx_2 = ,$$

$$= \frac{\pi^2}{4 z_{11} z_{12}}, \text{ïðè } i = k,\ j = l,$$

$$\left\langle \Psi_{ij}, \Psi_{kl} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ij}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)\,\overline{\Psi_{kl}(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2)}\, dx_1\, dx_2 = 0,$$

при $i \neq k$, $j \neq l$, где $i, j = 1.2$; k , $l = 1.2$.

Если множество вейвлетных функций (10) поделить на величину нормы $\left\|\Psi_{11}\right\| = \dfrac{\pi}{2\sqrt{z_{11} z_{12}}}$, то они образуют множество ортонормированных двумерных базисных функций для вейвлетного преобразования функций двух переменных:

$$\phi(x_1, \tilde{o}_2) = \left\{\phi'_{11}(x_1, \tilde{o}_2),\ \phi'_{12}(x_1, \tilde{o}_2),\ \phi'_{21}(x_1, \tilde{o}_2),\ \phi'_{22}(x_1, \tilde{o}_2)\right\},$$

где

$$\phi'_{11} = \frac{\phi_{11}}{\left\|\Psi_{11}\right\|},\ \ \phi'_{12} = \frac{\phi_{12}}{\left\|\Psi_{11}\right\|},\ \ \phi'_{21} = \frac{\phi_{21}}{\left\|\Psi_{11}\right\|},\ \ \phi'_{22} = \frac{\phi_{22}}{\left\|\Psi_{11}\right\|}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2006. 272 с.
2. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. Успехи физических наук, 1996. Т. 166, №11, С. 1145–1170.
3. Загидулин Р. В., Мужицкий В. Ф., Шлеин Д. В., Загидулин Т. Р. Вейвлет-анализ магнитного поля дефекта сплошности в ферромагнитном изделии. Контроль. Диагностика, 2008. №7. С. 18–24.
4. Перов Д. В., Ринкевич А. Б. Применение дискретного вейвлетного преобразования для выделения сигналов из шумов различного спектрального состава. Акустический журнал, 2005, №51.4. С. 520–526.
5. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование. Успехи физических наук, 2001. Т. 171. №5. С. 465–501.
6. Shapiro J. M. Embedded image coding using zerotress of wafelet coefficients. IEEE Trans. Signal Processing, IP-41, 1993, P. 3445–3462.
7. Tian J., Wells R.O. Embedded image coding using wafelet difference-reduction, in Wafelet Image and Video Compression. Kluwer Academic Publ., Norwell, MA, 1998. P. 289–301.
8. Загидулин Р. В., Коннов А. В. Поиск оптимальных параметров вейвлетной функции для вейвлет-преобразования сигналов вихретокового преобразователя над дефектами сплошности в стальном изделии. Контроль. Диагностика, 2013. №5. С. 12–17.
9. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 464 с.
10. Осипов К. О., Загидулин Р. В., Загидулин Т. Р. К вейвлетному преобразованию сигнала акустического преобразователя на основе функций алгебраического типа. Контроль. Диагностика, 2016. №10. С. 34–43.

Поступила в редакцию 05.02.2018 г.

A STUDY OF ALGEBRAIC WAVELET FUNCTIONS FOR TRANSFORM OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

© R. V. Zagidulin[1]*, T. R. Zagidulin[2]

[1]*Bashkir State University*
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]*STC "Spector"*
89 Kirov Street, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 234 02 12.
**Email: doctech.zagrv@post.com*

The article is devoted to the study of two-dimensional algebraic functions that can be used as the basis for effective wavelet transform of two variables dependent functions representing such data as surface graphics, video images, etc. It is shown that, similar to the Fourier transform theory, the basic functions for wavelet transform of two variables dependent functions (two-dimensional basic functions) are constructed on the base of one-dimensional basic functions. On the basis of symbolic calculations, the legitimacy of proposed approach was shown in the general case of wavelet transform of two variables dependent functions. As a result of the calculations, the expressions were obtained representing two-dimensional basic functions for wavelet transform as multiplication of one-dimensional basic functions. From general expressions, two-dimensional algebraic basic functions for wavelet transform of two variables dependent functions were obtained on the basis of one-dimensional mother wavelet functions. It is known from practice, that one-dimensional algebraic mother wavelet functions have great advantage in digital processing of measured one-dimensional signals (functions of one variable). The coefficients of wavelet transform of two variables dependent functions are determined using the scalar composition of function and array of four two-dimensional algebraic basic functions. It is noted that the structure of obtained two-dimensional basic functions is similar to two-dimensional trigonometric basic functions used in the Fourier transform. General features of obtained two-dimensional algebraic basic functions for wavelet transform of two variables dependent functions were studied and typical surface plots were described. It is shown that these functions are orthogonal, good localized and have specific oscillations of values. By appropriate transform, the sequence of orthonormal two-dimensional algebraic basic functions for wavelet transform of two variables dependent functions were obtained.

Keywords: algebraic wavelet functions, wavelet transform parameters, two-dimensional basic functions, Fourier transform, two-dimensional wavelet transform.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Blatter K. Veivlet-analiz. Osnovy teorii [Wavelet analysis. Fundamentals of the theory]. Moscow: Tekhnosfera, 2006.
2. Astaf'eva N. M. Uspekhi fizicheskikh nauk, 1996. Vol. 166, No. 11, Pp. 1145–1170.
3. Zagidulin R. V., Muzhitskii V. F., Shlein D. V., Zagidulin T. R. Kontrol'. Diagnostika, 2008. No. 7. Pp. 18–24.
4. Perov D. V., Rinkevich A. B. Akusticheskii zhurnal, 2005, No. 51.4. Pp. 520–526.
5. Dremin I. M., Ivanov O. V., Nechitailo V. A. Uspekhi fizicheskikh nauk, 2001. Vol. 171. No. 5. Pp. 465–501.
6. Shapiro J. M. IEEE Trans. Signal Processing, IP-41, 1993, Pp. 3445–3462.
7. Tian J., Wells R.O. Kluwer Academic Publ., Norwell, MA, 1998. Pp. 289–301.
8. Zagidulin R. V., Konnov A. V. Kontrol'. Diagnostika, 2013. No. 5. Pp. 12–17.
9. Bugrov Ya. S., Nikol'skii S. M. Vysshaya matematika. Differentsial'nye uravneniya. Kratnye integraly. Ryady. Funktsii kompleksnogo peremennogo [Higher mathematics. Differential equations. Multiple integrals. Series. Functions of complex variable]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989.
10. Osipov K. O., Zagidulin R. V., Zagidulin T. R. Kontrol'. Diagnostika, 2016. No. 10. Pp. 34–43.

Received 05.02.2018.