МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ В РЕЖИМЕ ПРОТИВОТОКА

© Л. А. Прокудина*, М. П. Вихирев, А. С. Беляев

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)
Россия, 454080 г. Челябинск, пр. им. В. И. Ленина, 76.

Тел./факс: +7 (351) 297 93 17.

*Email: prokudina-la@mail.ru

В данной работе рассматривается течение жидкой пленки под действием силы тяжести в контакте с потоком газа в режиме противотока. Учтено присутствие на поверхности жидкой пленки нерастворимых поверхностно-активных веществ, таких как масла, жиры. Течение жидкой пленки описывается системой уравнений Навье-Стокса и непрерывности. Граничные условия включают поверхностное натяжение, постоянное касательное напряжение, поверхностную вязкость. Представлено дифференциальное уравнение в частных производных состояния свободной поверхности вертикальной жидкой пленки для умеренных чисел Рейнольдса. Коэффициенты уравнения включают основные характеристики течения пленки: число Рейнольдса, число Фруда, поверхностное натяжение, постоянное касательное напряжение. Получены аналитические зависимости для инкремента, частоты, фазовой скорости жидкой пленки в режиме противотока. Представлены результаты вычислительных экспериментов по влиянию постоянного касательного напряжения на волновые характеристики и область неустойчивости жидкой пленки. Выделены режимы течения пленки с максимальным значением инкремента. Режим противотока приводит к увеличению инкремента, расширению области неустойчивости.

Ключевые слова: жидкая пленка, постоянное касательное напряжение, неустойчивость, инкремент, фазовая скорость.

Введение

Данная работа посвящена математическому моделированию течения жидкой пленки под действием силы тяжести в контакте с потоком газа, создающим на свободной поверхности пленки постоянное касательное напряжение.

Исследование течения тонких слоев вязкой жидкости, называемых жидкими пленками, под действием силы тяжести впервые было представлено в работах П. Л. Капицы [1–2]. Теоретические и экспериментальные исследования жидких пленок имеют большое научное и прикладное значение. [3–9]. Жидкие пленки составляют основу многих технологических процессов в нефтехимической, тепло – энергетической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Использование контактных устройств пленочного типа обусловлено их большой свободной поверхностью при малой толщине жидких пленок, что позволяет ускорять тепловые, химические, диффузионные процессы на поверхности раздела газ-жидкость. Математическое моделирование режимов течения жидких пленок с учетом различных физико-химических факторов позволяет исследовать влияние этих факторов на волновые характеристики [5; 10–14]. Результаты математического моделирования используются при проектировании пленочных аппаратов и устройств, таких как пленочные ректификаторы, абсорберы, конденсаторы и др., а также разработке технологических процессов в жидких пленках.

Целью работы является расчет волновых характеристик (частоты, инкремента, фазовой скорости) жидкой пленки при умеренных числах Рей-

нольдса и исследование влияния на них постоянного касательного напряжения в режиме противотока.

Для достижения этой цели решены задачи:

- получены аналитические зависимости для волновых характеристик;
- разработан алгоритм расчета инкремента, частоты, фазовой скорости для диапазона чисел Рейнольдса $Re \leq 15$;
- в пакете MATLAB проведены вычислительные эксперименты по воздействию постоянного касательного напряжения на свободной поверхности пленки на ее области неустойчивости и волновые характеристики.

1. Математическая модель течения жидкой пленки

Рассмотрено течение жидкой пленки под действием силы тяжести по твердой непроницаемой поверхности (рис. 1) для диапазона чисел Рейнольдса $Re \leq 15$. Над жидкой пленкой в режиме противотока движется поток газа, создающий на ее свободной поверхности постоянное касательное напряжение.

Рис. 1. Схема течения пленки.

Течение описывается системой уравнений Навье-Стокса и непрерывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

Граничные условия

$$y = 0: \quad u = 0, v = 0 \quad (2)$$

$$y = \delta: \quad \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_x = 0 \quad (3)$$

$$P = \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] - \sigma \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \quad (4)$$

Кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = v - u \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (5)$$

где безразмерные параметры: Re – число Рейнольдса, F_x – число Фруда, σ – поверхностное натяжение, τ_x – постоянное касательное напряжение, N – поверхностная вязкость.

Система уравнений (1–4) решена [11] методами возмущений. Найденные в трех первых приближениях проекции скорости u и v подставлены в условие (5). В результате получено дифференциальное уравнение в частных производных для отклонения свободной поверхности пленки от невозмущенного состояния [11]. Для случая двухмерного течения вертикальной жидкой пленки линейная часть уравнения свободной поверхности с сохранением нумерации коэффициентов модели запишется в виде:

$$a_1 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + a_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + a_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_7 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + a_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Коэффициенты уравнения (6):

$$a_1 = -\frac{\text{Re} \sigma}{3}, \quad a_4 = -\frac{\text{Re}^2 F_x N}{2},$$

$$a_6 = \frac{3}{40} \text{Re}^3 F_x \tau_x + F_x, \quad a_7 = \frac{5}{24} \text{Re}^2 F_x,$$

$$a_{11} = -\text{Re} F_x - \text{Re} \tau_x,$$

Уравнение (6) допускает решение вида

$$\psi = A \exp i k_x x - \omega t \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим дисперсионное уравнение, связывающие волновые характеристики жидкой пленки

$$\omega a_7 k_x + i + a_1 k_x^4 - a_4 i k_x^3 - a_6 k_x^2 + a_{11} i k_x = 0. \quad (8)$$

где $\omega = \omega_r + i \omega_i$ (ω_r – частота, ω_i – инкремент), k_x – волновое число.

Разделив в (8) действительную и мнимую части, получим аналитические зависимости для частоты и инкремента:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{Y - X \cdot Z}{1 + Z^2}, \\ \omega_i &= X + \omega_r \cdot Z. \end{aligned} \quad (9)$$

Где $X = a_1 k_x^4 - a_6 k_x^2$; $Y = a_4 k_x^3 - a_{11} k_x$; $Z = a_7 k_x$;

Фазовая скорость определяется по формуле:

$$c_r = \frac{\omega_r}{k}. \quad (10)$$

2. Вычислительные эксперименты

Вычислительные эксперименты проведены для исследования неустойчивости жидкой пленки воды для чисел Рейнольдса $\text{Re} \leq 15$ в диапазоне волновых чисел $0 \leq k \leq 0.3$ в двух случаях:

- 1) свободного стекания пленки ($\tau = 0$),
- 2) противотока ($\tau = -0.1$).

В пакете MATLAB по формулам (9–10) рассчитаны волновые характеристики жидкой пленки воды. Течение жидкой пленки неустойчиво, если инкремент $\omega_i > 0$.

Физические параметры, представленной модели, связаны зависимостями [10, 12–13]:

$$\sigma = 4887 \cdot \text{Re}^{-\frac{5}{3}}; \quad F_x = \frac{3}{\text{Re}} - \frac{3}{2} \tau_x.$$

Значения параметров сведены в табл.

Таблица

Физические параметры			
Re	σ	F_x	
		$\tau = -0.1$	$\tau = 0$
5	334.2661	0.45	0.75
6	246.6741	0.35	0.65
7	190.7856	0.2786	0.5786
8	152.7187	0.225	0.525
9	125.4984	0.1833	0.4833
10	105.2872	0.15	0.45
11	89.8231	0.1227	0.4227
12	77.6975	0.1	0.4
13	67.9939	0.0808	0.3808
14	60.0937	0.0643	0.3643
15	53.5661	0.05	0.35

На рис. 2 представлены кривые инкрементов для режимов свободного стекания и противотока. В условиях противотока газ оказывает дестабилизирующее влияние на течение пленки, что приводит к увеличению инкремента и расширению области неустойчивости по диапазону волновых чисел.

Рис. 2. Зависимость инкремента от волнового числа для
 $Re = 5$: кривая 1 — $\tau = 0$, 2 — $\tau = -0,1$;
 $Re = 10$: кривая 3 — $\tau = 0$, 4 — $\tau = -0,1$.

В результате вычислительных экспериментов получены режимы течения жидкой пленки [5; 7], для которых инкремент достигает максимального значения, как при свободном стекании пленки, так в режиме противотока.

Рис. 3. Максимальные значения инкремента
 кривая 1 — $\tau = 0,2$ — $\tau = -0,1$.

Рис. 4. Фазовая скорость для максимального инкремента:
 кривая 1 — $\tau = 0,2$ — $\tau = -0,1$.

На рис. 3–4 представлены волновые характеристики жидкой пленки, соответствующие режимам течения с максимальным значением инкремента. Сравнение величин фазовой скорости для режимов свободного стекания и противотока проведено на рис. 4. В режиме противотока наблюдается повышение фазовой скорости для малых чисел Рейнольдса ($Re \leq 8$) и ее снижение для чисел Рейнольдса больших восьми по сравнению со свободным режимом стекания пленки.

Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости:
 кривая 1 — $\tau = 0$, 2 — $\tau = -0,1$.

На рис. 5 изображена область неустойчивости жидкой пленки, ограниченная кривыми нейтральной устойчивости, рассчитанными при нулевых значениях инкремента.

Заключение

Представлена математическая модель течения жидкой пленки, учитывающая такие физические факторы как поверхностное натяжение, постоянное касательное напряжение и поверхностную вязкость.

Выведены аналитические зависимости для частоты и инкремента с учетом поверхностного натяжения, постоянного касательного напряжения и поверхностной вязкости.

С использованием пакета MATLAB проведено моделирование влияния постоянного касательного напряжения в режиме противотока на волновые характеристики вертикальной жидкой пленки воды.

В режиме противотока наблюдается увеличение величины инкремента, расширение области неустойчивости на заданном диапазоне чисел Рейнольдса.

Выявлены режимы течения жидкой пленки с максимальным значением инкремента, которые с наибольшей вероятностью реализующиеся в экспериментах [7]. Рассчитаны частота, фазовая скорость этих режимов течения жидкой пленки.

Полученные результаты исследований направлены на дальнейшее изучение формирования волновых процессов в жидких пленках, на амплитуды волн с учетом касательного напряжения в режиме противотока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ, 1948. Т. 18. С. 3–28.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ, 1949. Т. 19. №2. С. 105–120.
3. Ганчев Б. Г. Охлаждение элементов ядерных реакторов стекающими пленками. М.: Энергоатомиздат, 1987. 192 с.
4. Олевский В. М., Ручинский В. Р., Кашников А. М., Чернышев В. И. Пленочная тепло- и массообменная аппаратура // Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии / под ред. В. М. Олевского. М.: Химия, 1988. 240 с.

5. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я Гидродинамика и тепломас-сообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990. 271 с.
6. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
7. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок жидкости. М.: Наука, 1992. 256 с.
8. Гагонин И. И., Шемагин И. А. Теплообмен при пленочной конденсации и пленочном кипении в элементах оборудования АЭС. М.: Энергоатомиздат, 1993. 208 с.
9. Горбатьюк В. И. Процессы и аппараты пищевых производств. М.: Колос, 1999. 335 с.
10. Прокудина Л. А., Вяткин Г. П. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки // Доклады РАН, 1998. Т. 362. №6. С. 770–772.
11. Prokudina L. A. Influence of Surface Tension inhomogeneity on the Wave Flow of a Liquid Film // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2014. V. 87. Issue 1. P. 165–173. DOI: 10.1007/s10891-014-0996-2.
12. Прокудина Л. А., Саламатов Е. А. Нелинейное развитие возмущений в жидкой пленке при обдуве газовым потоком // Нелинейный мир, 2010. Т. 8. №11. С. 709–713.
13. Прокудина Л. А., Саламатов Е. А. Влияние касательного напряжения на волновое течение жидкой пленки // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математика. Механика. Физика», 2012. Вып. 7. №34(293). С. 173–176.
14. Prokudina L. A. Nonlinear Evolution of Perturbations in a Thin Fluid Layer during Wave Formation // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2014. V. 118. No 3. P. 480–488. DOI: 10.1134/S1063776114020046.

Поступила в редакцию 18.06.2018 г.

THE CALCULATION OF THE INSTABILITY OF LIQUID FILM IN COUNTERCURRENT MODE

© L. A. Prokudina*, M. P. Vikhirev, A. S. Belyaev

*South Ural State University (National Research University)
76 Lenin Avenue, 454080 Chelyabinsk, Russia.*

Phone: +7 (351) 297 93 17.

**Email: prokudina-la@mail.ru*

Flows of thin liquid films are realized in many technological processes of petrochemical, metallurgical, food, and other industries. The authors of the paper considered the flow of a liquid film under the action of gravity in contact with the gas flow in countercurrent mode. The presence of insoluble surfactants such as oils and fats on the surface of the liquid film was taken into account. The flow of the liquid film was described by a system of Navier-Stokes equations and continuity. Boundary conditions included surface tension, constant shear stress, and surface viscosity. A differential equation of state of the free surface of a vertical liquid film for the Reynolds moderates was presented. The coefficients of this equation include the main characteristics of the film flow: Reynolds number, Froude number, surface tension, surface viscosity, and constant shear stress. The relationship between the main characteristics of the film flow was established. Analytical dependences for increment, frequency, phase and group velocities of the liquid film in countercurrent mode were obtained. Computational experiments were carried out for liquids with a sufficiently large surface tension, such as water and alcohol. The results of computational experiments on the effect of constant shear stress on the wave characteristics (increment, frequency) and the instability region of the liquid film were presented. The regimes of the film flow with the maximum value of the increment are distinguished. Frequency and phase velocity for such modes were calculated. Countercurrent mode leads to an increase in the increment and to the expansion of the instability area. The surface viscosity has a stabilizing effect, which leads to a decrease in the value of the increment and a reduction in the instability region in the countercurrent regime.

Keywords: liquid film, constant shear stress, instability, increment, phase velocity.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Kapitsa P. L. ZhETF, 1948. Vol. 18. Pp. 3-28.
2. Kapitsa P. L., Kapitsa S. P. ZhETF, 1949. Vol. 19. No. 2. Pp. 105-120.
3. Ganchev B. G. Okhlazhdenie elementov yadernykh reaktorov stekayushchimi plenkami. Moscow: Energoatomizdat, 1987.
4. Olevskii V. M., Ruchinskii V. R., Kashnikov A. M., Chernyshev V. I. Protsessy i apparaty khimicheskoi i neftekhimicheskoi tekhnologii. Ed. V. M. Olevskogo. Moscow: Khimiya, 1988.
5. Kholpanov L. P., Shkadov V. Ya. Gidrodinamika i teplomassoobmen s poverkhnost'yu razdela. Moscow: Nauka, 1990.
6. Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G., Shreiber I. R. Volnovaya dinamika gazo- i parozhidkostnykh sred. Moscow: Energoatomizdat, 1990.
7. Alekseenko S. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G. Volnovoe techenie plenok zhidkosti. Moscow: Nauka, 1992.
8. Gagonin I. I., Shemagin I. A. Teploobmen pri plenochnoi kondensatsii i plenochnom kipenii v elementakh oborudovaniya AES. Moscow: Energoatomizdat, 1993.
9. Gorbatyuk V. I. Protsessy i apparaty pishchevykh proizvodstv. Moscow: Kolos, 1999.
10. Prokudina L. A., Vyatkin G. P. Doklady RAN, 1998. Vol. 362. No. 6. Pp. 770-772.
11. Prokudina L. A. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2014. Vol. 87. Issue 1. Pp. 165-173. DOI: 10.1007/s10891-014-0996-2.
12. Prokudina L. A., Salamatov E. A. Nelineinyi mir, 2010. Vol. 8. No. 11. Pp. 709-713.
13. Prokudina L. A., Salamatov E. A. Vestnik YuUrGU. Ser. «Matematika. Mekhanika. Fizika», 2012. No. 7. No. 34(293). Pp. 173-176.
14. Prokudina L. A. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2014. Vol. 118. No 3. Pp. 480-488. DOI: 10.1134/S1063776114020046.

Received 18.06.2018.