УДК 532.529, 533.6.01

**ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ МОДЕЛЬ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
О СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ**© С. К. Матвеев¹, Н. Ж. Джайчибеков², Б. С. Шалабаева^{2*}¹Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 199034 г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9.²Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева
Республика Казахстан, 010008 г. Астана, ул. Сатбаева, 2.

*Email: bakyt2809@gmail.com

На основе ранее разработанной двухкомпонентной модели обтекания тел потоком из твердых частиц приводится приближенное решение задачи о структуре скачка уплотнения в газе. При этом в указанную модель вводится некоторое уточнение, состоящее в учете вероятности перехода частиц из одного множества в другое, что позволяет использовать модель при конечных числах Маха. Полученные результаты полезны в аэродинамике разреженных газов при рассмотрении переходных режимов течения, когда длина свободного пробега молекул соизмерима с характерным масштабом задачи.

Ключевые слова: разреженный газ, вероятность перехода частиц, частота столкновений, скачок уплотнения, число Маха.

Введение

В [1–3] рассмотрено применение в динамике разреженного газа эвристической модели течения, ранее разработанной для описания течения газа с твердыми частицами в [4]. В большинстве работ, посвященных расчету двухфазных течений частицы, попавшие на обтекаемую поверхность, исключались из дальнейшего рассмотрения, т.е. поверхность считается неограниченным стоком частиц. Однако при расчете обтекания тел двухфазной средой, когда дисперсная фаза представляет собой твердые частицы, не поглощаемые обтекаемой поверхностью, необходимо учитывать отраженные от этой поверхности частицы. При малой концентрации твердой фазы можно рассмотреть траектории отраженных частиц без учета их влияния на поток газа. Задача существенно усложняется, когда концентрация частиц возрастает настолько, что необходимо учитывать взаимное влияние фаз. Впервые полный учет отраженных от поверхности частиц и их хаотического движения после столкновений был сделан С. К. Матвеевым в четырехкомпонентной модели обтекания тел газозвесью (газ с твердыми частицами) в работе [4].

В данной работе рассматривается упрощенная двухкомпонентная модель, где твердые частицы рассматриваются как аналог молекул газа. В этой модели молекулы подразделяются на два множества, каждое из которых считается континуумом, причем столкновения молекул из одного множества порождают напряжения и тепловые потоки в этом множестве, а столкновения молекул разных множеств, приводят к переходу молекул из одного множества в другое. В указанных выше работах частицы (молекулы) одного из множеств (назовем их s -частицами) двигались упорядоченно без хаотической составляющей скорости и естественно, что все столкновения таких частиц с частицами

другого множества (t -частицами) приводили к переходу s -частиц во множество хаотически движущихся t -частиц.

Достоинством рассматриваемой модели является ее простота, поскольку легко подсчитать массу, импульс и энергию, переносимые частицами при таком переходе, и не требуется никаких характеристик взаимодействия частиц, кроме частоты столкновений. Применение этой модели к расчету структуры скачка уплотнения [1] и обтекания сферы разреженным газом [2–3] показало удовлетворительную точность.

Предположение, что s -частицы движутся упорядоченно (с пренебрежимо малой хаотической составляющей скорости), ограничивает применение модели случаем гиперзвукового течения газа. В настоящей работе дается обобщение описанной модели на случай, когда частицы обоих множеств имеют хаотическую составляющую скорости, это дает возможность использовать модель при любых числах Маха.

**Уточненная модель структуры
ударной волны в газе**

Аналитическое решение движения газа в ударной волне на основе данной модели приведено в работе [5], которую кратко приведем ниже.

Как и раньше, будем считать молекулы твердыми, абсолютно упругими сферами, и по-прежнему будем считать, что при любом столкновении частиц из разных множеств, происходит переход частицы из одного множества в другое. В каждом из множеств будем считать распределение частиц по скоростям близким к максвелловскому и в соответствии с этим определять напряжения и тепловые потоки. Однако если раньше было естественно считать, что упорядоченно движущиеся s -частицы после столкновений переходят во множество хаотически движущихся t -частиц, то теперь в

случае, когда в обоих множествах есть хаотическое движение, будем считать вероятным и переход t -частиц во множество s -частиц. Обозначим β вероятность при столкновении s -частицы перейти во множество t -частиц, а вероятность t -частицы перейти во множество s -частиц, соответственно, $1 - \beta$.

Вероятность перехода частиц из одного множества в другое естественно связать с интенсивностью хаотического движения частиц в соответствующем множестве, причем больше вероятность перехода в то множество, в котором больше интенсивность хаотического движения. Эту интенсивность можно характеризовать следующей аппроксимацией для среднего модуля скорости хаотического движения [4].

$$c_i = \sqrt{16p_i / (3\pi(\kappa - 1)\rho_i)}$$

где p – давление, ρ – плотность i -го газа ($i=s, t$), κ – показатель адиабаты, причем $\kappa = 5/3$, если вращение частиц не учитывается, и $\kappa = 4/3$, если энергия хаотического движения равномерно распределена по вращательным и поступательным степеням свободы.

Наиболее естественным является предположение, что β пропорционально c_t^3 , поскольку c_t^3 есть некоторый объем в пространстве скоростей, характеризующий интенсивность хаотического движения частиц, а β есть вероятность столкнувшейся частицы оказаться после столкновения во множестве t . Аналогично $1 - \beta$ пропорционально c_s^3 , откуда следует

$$\beta = c_t^3 / (c_t^3 + c_s^3).$$

Рассмотрим теперь на основе описанной модели структуру скачка уплотнения в газе, следуя [1], где это сделано для случая гиперзвукового потока перед скачком. Уравнения баланса массы, импульса и энергии для s - и t -компонентов потока при непрерывном описании имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho_s u_s) &= -I\beta + I(1 - \beta), \\ \frac{d}{dx}(\rho_t u_t) &= I\beta - I(1 - \beta), \quad (1) \\ \frac{d}{dx} \left(\rho_s u_s^2 + p_s - \frac{4}{3} \mu_s \frac{du_s}{dx} \right) &= \\ &= -I\beta \left(u_s + \frac{p_s}{\rho_s u_s} \right) + I(1 - \beta) \left(u_t + \frac{p_t}{\rho_t u_t} \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\rho_t u_t^2 + p_t - \frac{4}{3} \mu_t \frac{du_t}{dx} \right) &= \\ &= I\beta \left(u_s + \frac{p_s}{\rho_s u_s} \right) - I(1 - \beta) \left(u_t + \frac{p_t}{\rho_t u_t} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\rho_s u_s \left(U_s + \frac{u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s} \right) - \frac{4}{3} \mu_s u_s \frac{du_s}{dx} - \frac{\lambda_s}{c_V} \frac{dU_s}{dx} \right] &= \\ -I\beta \left(U_s + \frac{u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s} \right) + I(1 - \beta) \left(U_t + \frac{u_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\rho_t u_t \left(U_t + \frac{u_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t} \right) - \frac{4}{3} \mu_t u_t \frac{du_t}{dx} - \frac{\lambda_t}{c_V} \frac{dU_t}{dx} \right] &= \\ -I(1 - \beta) \left(U_t + \frac{u_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t} \right) + I\beta \left(U_s + \frac{u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

где u_i, u_s – скорость компонент (индекс указывает соответствующий компонент), U – кинетическая энергия хаотического движения молекул, c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, I – масса молекул одного множества, столкнувшихся с молекулами другого множества в единичном объеме в единицу времени. Приближенно будем полагать

$$I = \frac{\pi d^2}{m} \rho_s \rho_t \sqrt{(u_s - u_t)^2 + c_s^2 + c_t^2}. \quad (6)$$

Здесь m – масса молекул, d – их диаметр; μ, λ – вязкость и теплопроводность компонентов, которые могут быть определены как для газа из твердых сфер. Для каждого из компонентов считается справедливым уравнение состояния

$$p_i = (\kappa - 1) \rho_i U_i. \quad (7)$$

Для расчета структуры скачка с помощью приведенных уравнений сформулируем граничные условия:

при $x \rightarrow -\infty$ $u_s \rightarrow u_{s-}$,

$\rho_s \rightarrow \rho_{s-}$, $U_s \rightarrow U_{s-}$, $\rho_t \rightarrow 0$;

при $x \rightarrow +\infty$ $u_t \rightarrow u_{t+}$,

$\rho_t \rightarrow \rho_{t+}$, $U_t \rightarrow U_{t+}$, $\rho_s \rightarrow 0$.

Вследствие сохранения массы, импульса и энергии потока должны выполняться условия динамической совместности:

$$\begin{aligned} \frac{u_{t+}}{u_{s-}} &= \frac{\rho_{s-}}{\rho_{t+}} = \frac{2}{(\kappa + 1)M^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \\ \frac{p_{t+}}{p_{s-}} &= \frac{2\kappa M^2}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \end{aligned}$$

где $M = \frac{u_{s-}}{\sqrt{\kappa p_{s-} / \rho_{s-}}}$ – число Маха потока перед скачком.

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, взяв за масштабы скорости, плотности и

длины соответственно $u_{s-}, \rho_{s-}, \frac{m}{\pi d^2 \rho_{s-}}$ и сохранив прежние обозначения.

Сначала будем считать оба компонента невязкими и нетеплопроводными, положив $\mu_s = \mu_t = 0$ и $\lambda_s = \lambda_t = 0$.

Тогда уравнения (1) – (5) можно записать в виде

$$\frac{dA_s}{dx} = I(1-2\beta), \quad \frac{dA_t}{dx} = I(2\beta-1); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx}(A_s B_s) = I[(1-\beta)B_t - \beta B_s],$$

$$\frac{d}{dx}(A_t B_t) = I[\beta B_s - (1-\beta)B_t]; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx}(A_s C_s) = I[(1-\beta)C_t - \beta C_s],$$

$$\frac{d}{dx}(A_t C_t) = I[\beta C_s - (1-\beta)C_t]; \quad (10)$$

где: $A_s = \rho_s u_s$, $A_t = \rho_t u_t$, $B_s = u_s + \frac{p_s}{\rho_s u_s}$,

$$B_t = u_t + \frac{p_t}{\rho_t u_t}, \quad C_s = U_s + \frac{u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s}, \quad C_t = U_t + \frac{u_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t}.$$

Складывая попарно уравнения (8), (9) и (10), легко получить после интегрирования и определения констант из граничных условий

$$A_s + A_t = \text{const} = 1, \quad A_s B_s + A_t B_t = \text{const} = 1 + \frac{1}{\kappa M^2},$$

$$A_s C_s + A_t C_t = \text{const} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa-1)M^2}.$$

Из решения уравнений (8–10) можно получить, что B_s, B_t, C_s, C_t не зависят от x , постоянными также являются u_s, u_t, U_s, U_t и зависящие от них c_s, c_t, β , а изменяются только плотности компонент ρ_s, ρ_t и зависящие от них p_s, p_t, I . Из первого уравнения (8) имеем $\frac{d\rho_s}{dx} = -D\rho_s(1-\rho_s)$, откуда, выбрав за начало отсчета x точку, где

$\rho_s = 0.5$, имеем $\rho_s = \frac{1}{1+e^{Dx}}$, а из второго уравне-

ния (8) получим $\rho_t = \frac{e^{Dx} \rho_{t+}}{1+e^{Dx}}$, где

$$D = (2\beta-1) \sqrt{(M^2-1)^2 + \frac{4}{\pi\kappa}((\kappa M^2+1)^2 - \kappa(M^2-1)^2)} / \left(\frac{\kappa-1}{2}M^2+1\right) \quad (11)$$

D – параметр, характеризующий ширину ударной волны, x -координата вдоль абсцисс.

То обстоятельство, что скорости и внутренние энергии компонент в соответствии с полученным решением не зависят от x , приводит к тому, что их вязкость и теплопроводность не существенны и полученное решение справедливо и для вязкого теплопроводного газа. Тогда средние значения плотности, скорости и энергии по смеси будут

$$\bar{\rho} = \rho_s + \rho_t = \frac{1}{1+e^{Dx}} (1+e^{Dx}H) \quad (12)$$

$$\bar{V} = \frac{\rho_s u_s + \rho_t u_t}{\bar{\rho}} = \frac{1+e^{Dx}}{(1+e^{Dx}H)} \quad (13)$$

$$\bar{U} = \frac{\rho_s U_s + \rho_t U_t}{\bar{\rho}} = \quad (14)$$

$$= \left[\frac{1}{\kappa(\kappa-1)M^2} + \frac{e^{Dx}}{2\kappa} \left(\frac{(\kappa+1)}{(\kappa-1)} - \frac{1}{H} \right) \right] / (1+e^{Dx}H)$$

$$H = [M^2(\kappa+1)]/[2+M^2((\kappa-1))].$$

Результаты

По представленным зависимостям (12)–(14) были проведены вычисления указанных средних величин для различных значений числа Маха. На рис. 1 и 2 изображены зависимости этих средних значений от величины Dx для чисел Маха равных $M = 2$ и $M = 10$ при значении показателя адиабаты $\kappa = 5/3$.

Из рисунков видно, что характер изменения указанных параметров соответствует динамике изменения в ударном слое в газе, а именно средние по смеси значения плотности и кинетической энергии хаотического движения частиц возрастают в ударном слое, а скорости убывают.

Рис 1. Распределения плотности – ρ_s , ρ_t , $\bar{\rho}$, скорости – $\bar{V}$, и внутренней энергии – $\bar{U}$ смеси по ширине ударной волны – Dx при $M=2$.

Рис 2. Распределения плотности – ρ_s , ρ_t , $\bar{\rho}$, скорости – $\bar{V}$, и внутренней энергии – $\bar{U}$ смеси по ширине ударной волны – Dx при $M=10$

С ростом числа Маха кривые изменения этих величин в ударном слое вдоль направления движения становятся более крутыми, и, наоборот, с уменьшением числа Маха эти кривые становятся более пологими. Графики при $M=10$ близки соответствующим графикам для случая $M = \infty$, полученным в работе [1] при $K=5/3$. На этих рисунках представлены также изменения плотности газов из s и t – молекул по ширине

ударной волны в направлении основного потока, характер которых адекватно описывает переход s – молекул в сорт t – молекул после их столкновений между собой.

Представленные на рисунках средние значения плотности, скорости и внутренней энергии смеси газов из s и t – молекул принимаются как соответствующие значения реального газа внутри ударной волны.

В этой модели впервые задача о структуре ударной волны решается на основе континуального подхода. А именно, течение газа в внутри ударной волны, где длина свободного пробега молекул соизмерима с характерным масштабом задачи (шириной ударной волны), представлено как течение смеси двух газов, которые рассматриваются как взаимопроницающие континуумы.

Задача о структуре ударной волны в газах является тестовой для отработки методов кинетической теории газов и в связи с этим относительно хорошо изучена, поэтому интересно сравнить полученные результаты с результатами, имеющимися в литературе. К сожалению, прямого сравнения с экспериментальными данными провести не удастся, т.к. потенциалы взаимодействия молекул газа отличаются от модели твердых сфер и это отличие особенно сильно сказывается при больших числах Маха, поэтому обратимся к теоретическим результатам, обзор которых можно найти в работах [6].

Большое количество решений получено на основе использования бимодальной аппроксимации функции распределения, предложенной Г. М. Мотт-Смитом в [7]:

$$f(x, v) = v f_1(v) + (1 - v) f_2(v),$$

где f_1 и f_2 – функции распределения до и после скачка; $v(x)$ – «перемешивающая» функция. При такой, аппроксимации, остается произвол в выборе уравнения для определения $v(x)$. Г. М. Мотт-Смит в работе [7] использовал различные моменты уравнения Больцмана. Р. Нарасимха и С. М. Дешпанде в [8] предложили два способа, основанные на минимизации невязки интегро-дифференциального уравнения Больцмана. В работе [9] предложено решение кинетического уравнения Больцмана для простых газов и газовых смесей.

Заметим, что предложенная в [1] и [5] модели, по существу, также сводятся к бимодальной функции распределения, а перемешивающая функция $v(x)$ определяется принятым правилом перехода частиц при столкновениях из одного сорта в другой. Полученная формула:

$$v = \frac{1}{1 + \exp Dx},$$

совпадает с решением Г. М. Мотт-Смита и отличается лишь значением D , определяемым по формуле (11) и характеризующим ширину скачка. Именно ширина скачка является основным критерием, по которому сравнивают различные методы. Обычно в литературе приводится отношение длины свободного пробега перед скачком к ширине скачка. Так как масштаб длины: $L_* = \frac{d\rho_s^0}{6\rho_{sx}}$, а длина свободного пробега до скачка: $l^- = d\rho_s^0 / (6\sqrt{2}\rho_{sx})$, то, определяя ширину скачка как $\delta = (\rho_{\max} - \rho_{\min}) / \left| \frac{d\rho}{dx} \right|_{\max}$,

получим

$$\frac{l^-}{\delta} = \frac{D}{4\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Здесь через d и ρ_s^0 обозначены соответственно диаметр и плотность вещества молекул.

На рис. 3 представлены данные из работы [6] о зависимости отношения (15) от числа Маха, полученные различными методами для газа твердых сфер: 1 – по уравнениям Навье-Стокса; 2 – по [8], 3 – по [7], u^3 ; 4 – по [10]; 5 – по [7], u^2 ; 6 – по [11]; 7 – по [12]; 8 – по [13]; 9 – по [14]; 10 – по [15].

Рис. 3. Распределение безразмерной длины свободного пробега частиц перед скачком l^-/δ от числа Маха.

Кривая SN проведена по расчетам настоящей работы, т.е. на основе аналитического решения вышеуказанных уравнений для случая $K=5/3$.

Данный *рис. 3* иллюстрирует значительный разброс результатов разных авторов при больших значениях M , что не позволяет считать окончательно решенной проблему определения структуры ударной волны и затрудняет оценку достоверности полученных результатов. Казалось бы, что наиболее достоверные результаты, должны дать непосредственное решение уравнения Больцмана, или прямое статистическое моделирование в работе [10], однако, решения уравнения Больцмана в [11] и [12] заметно различаются. В работах [6] отмечается недостаточная точность расчетов [11] и сомнительность для больших чисел M гипотезы расщепления, на которой основан метод в [10]. В этих условиях результаты, полученные по рассмотренной приближенной модели, могут быть признаны удовлетворительными, поскольку их отличие от существующих результатов (полученных более сложными методами) имеет тот же порядок, что и рассогласование между ними. Видно, что при числах Маха меньше трех результаты, полученные по данной модели, практически мало отличаются от приведенных результатов других авторов. Некоторое же завышение этих результатов при более больших числах Маха можно объяснить тем, что потенциалы взаимодействия реальных молекул газа отличаются от модели твердых сфер, принятых в модели, и это отличие особенно сильно сказывается при больших числах Маха.

Континуальный подход, описанный в данной работе, имеет более практическое значение из-за простоты реализации модели. Хотя и современные исследования на основе прямого статистического моделирования и уравнений Больцмана остаются актуальными на сегодняшний день. К последним можно отнести, к примеру, прямое моделирование типа Монте-Карло (DSMC), изложенное в [16], где представлено моделирование потока разреженного газа в сложных геометриях при условиях потока, который варьируется от гидродинамического переходного до молекулярного режима. А также расчеты потока разреженного газа на основе нелинейного уравнения Больцмана в работе [17], с использованием газокинетических унифицированных алгоритмов высокого порядка в широких пределах чисел Маха (1.2–20) и числа Кнудсена (0.0001–5). Однако эти модели очень сложны для практической реализации, по сравнению с подходом, изложенным в настоящей работе.

Заключение

Таким образом, можно считать приведенную в [5] и показанную в данной работе уточненную двухкомпонентную модель потока из смеси двух газов, а также исходную четырехкомпонентную модель газовой смеси в [4], применимой даже в тех

случаях, когда путь свободного пробега молекул газа сравним с газодинамическим масштабом. Более того, не исключено, что представления, положенные в основу построения этих моделей, будут полезны в аэродинамике разреженных газов при рассмотрении переходных режимов от сплошной среды к свободномолекулярному обтеканию.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05134098).

Список использованных обозначений

- s, t – компоненты частицы (молекулы газа)
- i – индекс, указывающий на соответствующий компонент частицы газа
- m, d – масса и диаметр частицы
- p, ρ – давление, плотность частиц (молекул газа)
- u, u_s – скорость компонент частиц
- μ, λ – вязкость и теплопроводность компонент частиц
- β – вероятность при столкновении частиц
- U – кинетическая энергия хаотического движения молекул,
- C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме
- I – масса молекул одного множества
- D – параметр, характеризующий ширину ударной волны
- M – число Маха
- $\bar{\rho}, \bar{V}, \bar{U}$ – средние значения плотности, скорости и энергии по смеси
- c – средний модуль скорости хаотического движения молекул
- κ – показатель адиабаты
- l – длина свободного пробега молекул
- δ – ширина скачка уплотнения
- f_1 и f_2 – функции распределения до и после скачка
- $v(x)$ – «перемешивающая» функция

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев С. К., Кочерыженков Г. В. Структура ударных волн в газах и газовзвесьях // Сб. «Динамические процессы в газах и твердых телах». Л., 1990. С. 28–36.
2. Джайчибеков Н. Ж., Матвеев С. К. Применение трехкомпонентной модели к расчету обтекания тел газовой смесью и разреженным газом // ПМТФ. СО АН СССР. Новосибирск, 1991. №1. С. 39–42.
3. Матвеев С. К., Джайчибеков Н. Ж. Расчет обтекания сферы разреженным газом при произвольном числе Кнудсена // Вестник Санкт-Петербургского университета. СПб., 1992. Сер.1. Вып. 2. (№8). С. 77–81.
4. Матвеев С. К. Математическое описание обтекания тел потоком газовой смеси с учетом влияния отраженных частиц // Сб. «Движение сжимаемых жидкостей и неоднородных сред». Л., 1982. Вып. 7. С. 189–201.
5. Matveev S. K., Jaichibekov N. Zh. Mathematical model of the gas flow in the shock front // Eurasian Mathematical Journal. 2013. V. 4, №3. P. 132–136.
6. Филиппов Б. В., Христинич В. Б. Кинетические модели структуры ударных волн: Препринт // СО АН СССР. №15–83. Новосибирск. 1983. 25 с.
7. Мотт-Смит Г. М. Решение уравнения Больцмана для ударной волны // Механика. 1953. №1. С. 72–75.
8. Narasimha R., Deshpande S. M. Mini numerical solution of the Boltzmann for shock structure // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt 3. P. 555–570.
9. Anikin Yu. A., Dodulad O. I., Kloss Yu. Yu., Tcheremissine F.G. Method of calculating the collision integral and solution of the Boltzmann kinetic equation for simple gases, gas mixtures and gases with rotational degrees of freedom // International Journal of Computer Mathematics. 2014. P. 1–15.

10. Zierig S., Ek F., Kock P. Two-fluid model for the structure of neutral shock waves // Phys. Fluids. 1961. V. 4. N 8. P. 975–987.
11. Glansdorff P. Solution of the Boltzmann equation for strong shock waves by the two – fluid model // Phys. Fluids. 1962. V. 5. N 4. P. 371–379.
12. Bird G. A. Aspects of the structure of strong shock waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 1172.
13. Hicks B. I., Yen S. M., Reilly B. I. The internal structure of shock wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. Pt 1. P. 85–111.
14. Христинич В. Б. Модификация решения Тимма и Мотт-Смита для описания структуры газодинамического скачка уплотнения в одноатомном газе // Газодинамика и теплообмен. Л., 1982. Вып. 7. С. 47–61.
15. Христинич В. Б. Консервативные разностные и вычислительные схемы для численного решения кинетического уравнения Больцмана в стационарном одномерном случае // Физическая механика. Л., 1978. Вып. 3. С. 44–54.
16. Scherer G. On the numerical modelling of the transitional flow in rarefied gases // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1999. 103(1). P. 165–173.
17. Li Zhi-Hui., Peng Ao-Ping., Zhang Han-Xin. Rarefied gas flow simulations using high-order gas-kinetic unified algorithms for Boltzmann model equations // Elsevier Ltd. 2015. Progress in aerospace sciences. V. 74. P. 81–113.

Поступила в редакцию 04.12.2018 г.

A TWO-COMPONENT MODEL FOR SOLVING THE PROBLEM OF THE STRUCTURE OF SHOCK WAVES IN GASES

© S. K. Matveev¹, N. J. Jaichibekov², B. S. Shalabayeva^{2*}

¹*Saint Petersburg University
17–9 Universitetskaya Embankment, 199034 Saint Petersburg, Russia.*

²*L.N. Gumilyov Eurasian National University
2 Satpaev Street, 010008 Astana, Kazakhstan.*

**Email: bakyt2809@gmail.com*

When calculating the flow around a body by a two-phase medium, in the case when the dispersed phase is solid particles that are not absorbed by the streamlined surface, it is necessary to take into account particles reflected from this surface. For the first time, a full account of particles reflected from the surface and their chaotic motion after collisions was made by S. K. Matveev in the four-component model of a body-wound flow around a body. This paper considers a simplified two-component mathematical model of the flow of solid particles around a body, where solid particles are considered as an analogue of gas molecules. An approximate solution of the problem of the structure of a shock wave in a gas is given. In this model, molecules are divided into 2 sets each of which is considered as a continuum; the collisions of molecules from one set generate stresses and heat flows in this set and the collisions of molecules of different sets lead to the transition of molecules from one set to another. In this case, a certain refinement is introduced into the indicated model, which takes into account the probability of transition of particles from one set to another, which makes it possible to use the model for finite Mach numbers. The advantage of this model is its simplicity, it is easy to determine the mass, momentum, and energy transferred by the particles during such a transition, and no characteristics of the interaction of particles, except the collision frequency, are required. The application of this model to the calculation of the structure of a shock wave and a rarefied gas flow around the sphere showed satisfactory accuracy.

Keywords: rarefied gas, transition probability of particles, collision frequency, shock wave, Mach number.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Matveev S. K. Sb. «Dinamicheskie protsessy v gazakh i tverdykh telakh». Leningrad, 1990. Pp. 28–36.
2. Dzhaichibekov N. Zh., Matveev S. K. PMTF. SO AN SSSR. Novosibirsk, 1991. No. 1. Pp. 39–42.
3. Matveev S. K., Dzhaichibekov N. Zh. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Saint Petersburg, 1992. Ser.1. No. 2. (No. 8). Pp. 77–81.
4. Matveev S. K. Sb. «Dvizhenie szhimaemykh zhidkostei i neodnorodnykh sred». Leningrad, 1982. No. 7. Pp. 189–201.
5. Matveev S. K., Jaichibekov N. Zh. Eurasian Mathematical Journal. 2013. Vol. 4, No. 3. Pp. 132–136.
6. Filippov B. V., Khristinich V. B. SO AN SSSR. No. 15–83. Novosibirsk. 1983.
7. Mott-Smit G. M. Mekhanika. 1953. No. 1. Pp. 72–75.
8. Narasimha R., Deshpande S. M. J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36. Pp. 3. Pp. 555–570.
9. Anikin Yu. A., Dodulad O. I., Kloss Yu. Yu., Tcheremissine F.G. International Journal of Computer Mathematics. 2014. Pp. 1–15.
10. Zierig S., Ek F., Kock P. Phys. Fluids. 1961. Vol. 4. N 8. Pp. 975–987.
11. Glansdorff P. Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 4. Pp. 371–379.
12. Bird G. A. Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. Pp. 1172.
13. Hicks B. I., Yen S. M., Reilly B. I. J. Fluid Mech. 1972. Vol. 53. Pp. 1. Pp. 85–111.
14. Khristinich V. B. Gazodinamika i teploobmen. Leningrad, 1982. No. 7. Pp. 47–61.
15. Khristinich V. B. Fizicheskaya mekhanika. Leningrad, 1978. No. 3. Pp. 44–54.
16. Scherer G. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1999. 103(1). Pp. 165–173.
17. Li Zhi-Hui., Peng Ao-Ping., Zhang Han-Xin. Rarefied gas flow simulations using high-order gas-kinetic unified algorithms for Boltzmann model equations. Elsevier Ltd. 2015. Progress in aerospace sciences. Vol. 74. Pp. 81–113.

Received 04.12.2018.