УДК 532.529

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

© М. Н. Галимзянов*, У. О. Агишева

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

Тел.: +7 (347) 235 52 55.
**Email: monk@anrb.ru*

Рассмотрено одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и при пульсациях пузырьков. Полагалось, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости постоянна, в отличие от температуры газа в пузырьке. Давление в пузырьке бралось однородным, что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе. Для поведения газа в пузырьках был принят политропический закон. На основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками выписано волновое уравнение для пузырьковой жидкости в переменных Лагранжа. Для случая сильновязких жидкостей получено решение вида «ступенька».

Ключевые слова: *одномерное стационарное течение, пузырьковая жидкость, газовые пузырьки, паровые пузырьки, переменные Лагранжа, слабые ударные волны, вязкость.*

Введение

Нелинейные волновые процессы в двухфазной среде (пузырьковой жидкости) не теряют актуальности как объект исследования в силу широкого распространения в различных областях физики, техники, химической и нефтегазовой промышленности. Впервые ударная волна в жидкости с пузырьками газа была рассмотрена в [1]. В этой работе были обнаружены ударные волны в пузырьковой жидкости и получена формула на скорость ударного фронта. В [2] данное явление исследовалось с учетом влияния сжимаемости жидкости на скорость фронта; полученная в [1] формула была модифицирована для случая адиабатического сжатия при наличии диффузии газа в жидкость в [3]. В пионерских работах [4–8] изучалась структура ударной волны с учетом дисперсии. В [4] были сделаны эксперименты и проведены расчеты по модели Иорданского [9]. В [10] было сделано предположение о существовании осцилляционной структуры ударной волны в пузырьковой жидкости. В дальнейшем появился целый ряд работ, в которых исследовались нелинейные волновые процессы [11–15].

Полная модель, описывающая динамику волн в пузырьковой смеси, довольно громоздка. Часто при решении используют более простые модели [9]. При некоторых допущениях систему уравнений можно свести к одному нелинейному уравнению. Среди них стоит отметить уравнений Буссинеска и уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса [16–17], двухволновое уравнение [18], уравнения Буссинеска и Клейна-Гордона [19]. Перечисленные нелинейные уравнения на сегодняшний день довольно подробно изучены. Отметим работу [20], в которой использовалось обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза, его стационарные решения были численно были исследованы в [21–22]. В работе [23] проведено сравнение трех различных численных моделей учета нелинейности при распространении волн в пузырьковой жидкости. Показано, что нелинейность газовых включений имеет определяющее значение, в длинноволновом приближении полулинейная гамильтонова модель является самодостаточной замкнутой моделью Кортевега–де Вриза, которая точно решается аналитическим методом обратной задачи рассеяния. Построены точные решения полученных уравнений. В [24] предлагается метод построения точных решений обобщенных уравнений Гарднера, Кавахары и Бенджамина – Бона – Махони.

В работе [25] исследовалась структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом сжимаемости жидкой фазы, двухскоростных и двухтемпературных эффектов. Установлено, что температурная диссипация имеет преобладающее влияние на динамику волны в среде. Анализ, проведенный в работе [26], является продолжением работы [25] с учетом нестационарного межфазного теплообмена. Авторы статьи уточнили результаты [25] и показали, что принятые в [25] упрощения применимы и для расчета нестационарных волн. В [27–29] подробно описаны аналитические, численные и экспериментальные исследования динамики акустических волн в жидкости с пузырьками.

В последние десятилетия скачок развития вычислительной техники расширил возможности в исследовании существенно нелинейных задач. Но численные методы требуют верификации результатов, и аналитически построенные решения классических систем уравнений подходят для этой цели.

Авторами настоящей статьи ранее был проведен ряд исследований по распространению одномерных акустических и двумерных волн в пузырьковых и пенных структурах [30–35]. В [30–31] изучались особенности эволюции двумерных волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа, были установлены критерии усиления и ослабления сигнала. В [32] в двумерной постановке для случая цилиндрической симметрии численно исследован процесс формирования и распространения ударных волн в пузырьковых и пенных структурах, проведено сравнение с экспериментом. В [33] изучено распространение слабых возмущений в водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо нерастворимого в воде газа присутствуют пары воды. Проанализировано влияние начальных параметров двухфазной смеси «вода – пузырьки» на эволюцию гармонических волн. В [34–35] рассмотрены особенности отражения и преломления гармонических волн на границе раздела «чистой» жидкости и жидкости с пузырьками с парогазовой смесью при «прямом» и «косом» их падении. Показано, что при падении волны со стороны пузырьковой жидкости на границу, может реализоваться условия полного внутреннего отражения.

Цель данной работы – вывод волнового уравнения в лагранжевых переменных, описывающего движение волны в пузырьковой жидкости без учета диссипативных процессов. Результаты аналитического построения расширят знания в области механики многофазных систем и могут быть использованы для тестирования численных моделей.

Основные уравнения одномерного стационарного движения

Рассмотрим одномерное стационарное течение жидкости с газовыми пузырьками при следующих предположениях: смесь монодисперсная, т.е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса; вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков.

Кроме того, предполагается, что массообмен между фазами отсутствует, а температура жидкости T_ℓ, в отличие от температуры газа в пузырьке, постоянна. Последнее $(T_\ell = T_0 = const)$ всегда выполняется при не очень высоких давлениях из-за преобладающего массового содержания жидкости (что позволяет считать ее термостатом) и существенно упрощает задачу, т.к. отпадает необходимость рассмотрения уравнения энергии жидкости.

Расчеты [36] показывают, что даже при очень сильном сжатии пузырька ($p_\ell / p_0 \sim 10$), когда в центре пузырька реализуются высокие значения температуры (газа), температура поверхности пузырька повышается незначительно ($T_a \approx 1.1 T_0$). Давление в пузырьке достигает при этом значений, значительно превосходящих парциальное давление насыщенных паров, соответствующее таким значениям температуры поверхности пузырька. Это обстоятельство свидетельствует в пользу допущения о несущественности межфазного массообмена.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды запишем дифференциальные уравнения сохранения массы каждой фазы, числа пузырьков и импульса всей смеси в одномерном стационарном движении

$$\frac{d(\rho_i \upsilon)}{x} = 0, \quad \frac{d(n\upsilon)}{dx} = 0,$$
$$\rho\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} + \frac{dp_\ell}{dx} = 0, \qquad (1)$$
$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_\ell + \alpha_g = 1,$$
$$\alpha_g = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \quad \rho = \rho_\ell + \rho_g,$$

где индекс $i = \ell$ и g относится соответственно к параметрам жидкости и газа.

Уравнения состояния фаз примем в виде

$$p_g = \rho_g^0 B T_g, \quad u_g = c_{vg} T_g, \quad \rho_\ell^0 = const.$$

Для удобства использования уравнения теплопроводности внутри пузырька, запишем его в переменных Лагранжа:

$$\rho_g^0 c_{pg} \upsilon \frac{dT_g}{dx} = \frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_g \frac{\rho_g^0 r^4}{\rho_{g0}^0 \xi^2} \cdot \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right) + \upsilon \frac{dp_g}{dt} \qquad (2)$$

,

где r – сферическая эйлерова координата, $0 \le r \le a(x)$; ξ – лагранжева координата, $0 \le \xi \le a_0$. Для малых объемных содержаний газа ($\alpha_g < 0.1$) и для не очень сильных волн $p_e / p_0 \le 10$, как показано в [36], граничное условие на поверхности пузырька можно представить в виде $T_g = T_0 = \mathrm{const}$, так как обычно жидкость обладает значительно большей теплопроводностью и значительно меньшей температуропроводностью, чем газ.

Из микроуравнения неразрывности для газа внутри пузырьков в лагранжевых координатах имеем

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\rho_{g0}^0 \xi^2}{\rho_g^0 r^2}.$$

Давление в пузырьке предполагается однородным (гомобаричность [37]), что обеспечивается, если радиальная скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе.

Уравнение для давления, являющееся интегралом уравнения (2) при сделанных допущениях и граничных условиях, имеет вид

$$\upsilon \frac{dp_g}{dx} = -3\gamma p_g \frac{w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q,$$
$$w = \upsilon \frac{da}{dx}, \quad q = -\lambda_0 \left(\frac{\rho_g^0}{\rho_{g0}^0} \frac{\partial T_g}{\partial \xi} \right)_{a_0},$$

где q – поток тепла из пузырька в жидкость, w– радиальная скорость стенок пузырька.

Давление фаз и размер пузырьков должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного сферического пузырька в безграничной несжимаемой жидкости. Для рассматриваемого случая оно имеет вид:

$$a\upsilon\frac{dw}{dx}+\frac{3}{2}w^2+4\nu_\ell\frac{w}{a}=\left(p_g-p_\ell-\frac{2\sigma}{a}\right)\Big/\rho_\ell^0\cdot \qquad (3)$$

Уравнения *(1)* полностью интегрируются. Интегралы запишем в виде

$$\rho_\ell\upsilon=\rho_{\ell 0}\upsilon_0,\ \rho_g\upsilon=\rho_{g0}\upsilon_0,$$
$$n\upsilon=n_0\upsilon_0,\ \rho\upsilon^2+p_\ell=\rho_0\upsilon_0^2+p_0\cdot \qquad (4)$$

Здесь и в дальнейшем индекс (0) внизу относится к равновесному состоянию перед волной, а параметры, соответствующие равновесному состоянию за волной будут снабжены индексом (*e*).

Отметим, что при умеренных давлениях $p_\ell\sim 10^{-1}\div 10$ МПа отношение истинных плотностей фаз $\rho_g^0/\rho_\ell^0<<1$ (при $p_\ell\sim 10^{-1}$ МПа имеем $\rho_g^0/\rho_\ell^0\sim 10^{-3}$). В этом случае массовым содержанием газа можно пренебречь по сравнению с ρ_ℓ (т.е. можно положить $\rho\approx\rho_\ell$). Тогда систему первых интегралов *(4)* с учетом кинематических зависимостей *(1)* можно привести к виду

$$\upsilon-\upsilon_0=\alpha_{g0}\upsilon_0\left(\left(\frac{a}{a_0}\right)^3-1\right),$$
$$p_\ell=p_{\ell 0}+\rho_\ell^0\alpha_{\ell 0}\alpha_{g0}\upsilon_0^2\left(1-\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\right). \qquad (5)$$

Волновое уравнение для пузырьковой жидкости в переменных Лагранжа

Для одномерного течения несжимаемой жидкости с газовыми пузырьками уравнения неразрывности, сохранения числа пузырьков и импульса в лагранжевых переменных запишутся

$$\left(1-\alpha_g\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}=1-\alpha_{g0},\ n\frac{\partial x}{\partial x_0}=n_0,$$
$$\rho_\ell^0\left(1-\alpha_g\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^{-1},\ \left(\upsilon=\frac{\partial x}{\partial t}\right).$$

Здесь x и x_0 – соответственно эйлерова и лагранжева координаты.

Уравнение Рэлея-Ламба в лагранжевых переменных может быть записано в виде:

$$p=p_g-\rho_\ell^0\left(a\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2+\frac{4\nu_\ell}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right). \qquad (6)$$

Будем полагать, что поведение газа в пузырьках политропическое с показателем γ, тогда

$$p_g=p_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}. \qquad (7)$$

Запишем также кинематическое соотношение, связывающее объемное содержание газа и число пузырьков

$$\alpha_g=\frac{4}{3}\pi a^3 n\cdot$$

Из приведенной выше системы уравнений нетрудно получить

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial x_0}=\frac{1-\alpha_{g0}}{\left(1-\alpha_g\right)^2}\frac{\partial\alpha_g}{\partial t},\ \frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{1-\alpha_{g0}}{\rho_\ell^0\left(1-\alpha_g\right)^2}\frac{\partial p}{\partial x_0},$$
$$\alpha_g=\alpha_{g0}\frac{1-\alpha_{g0}}{1-\alpha_g}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3,\ n=\frac{1-\alpha_{g0}}{1-\alpha_g}n_0, \qquad (8)$$
$$\frac{\partial x}{\partial x_0}=\frac{1-\alpha_{g0}}{1-\alpha_g}.$$

Поскольку для пузырьковой жидкости обычно $\alpha_g,\ \alpha_{g0}<<1$, то, пренебрегая α_g и α_{g0} по сравнению с единицей, выражение (8) можно записать в виде:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial x_0}=\frac{\partial\alpha_g}{\partial t},\ \frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_\ell^0}\frac{\partial p}{\partial x_0},$$
$$\alpha_g=\alpha_{g0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3,\ \frac{\partial x}{\partial x_0}=1,\ \frac{\partial x}{\partial t}=\upsilon\cdot$$

Исключая отсюда скорость и объемное содержание газовой фазы, и учитывая при этом *(6)* и *(7)*, получим

$$\alpha_{g0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3=-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\left(\frac{p_0}{\rho_\ell^0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}-a\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2-\frac{4\nu_\ell}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right) \qquad (9)$$

Отметим, что при получении волнового уравнения *(9)* никаких ограничений на амплитуду волны не было.

Можно искать решение *(9)* в виде бегущей волны, распространяющейся со скоростью *C*. Тогда параметры пузырьковой смеси будут зависеть от времени и координат через бегущую координату $\xi=x_0-Ct$. Полагая, что в исходном состоянии среда не возмущена ($a=a_0$, $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\xi=0$ при $\xi\to+\infty$), из уравнения (9) нетрудно получить

$$\alpha_{g0}C^2\left(\left(\frac{a}{a_0}\right)^3-1\right)=\frac{p_0}{\rho_\ell^0}\left(1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}\right)+C^2\left(a\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right)-4C\frac{\nu_\ell}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\xi} \qquad (10)$$

Для этого уравнения исходное невозмущенное состояние ($a=a_0$, $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\xi=0$) соответствует особой точке. Будем искать другую особую точку $a=a_e$ ($\mathrm{d}a/\mathrm{d}\xi=0$), также соответствующую состоянию равновесия. Из уравнения *(10)* для этого состояния будем иметь

$$\gamma C^2\left(\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^3-1\right)=C^2\left(1-\left(\frac{a_0}{a_e}\right)^{3\gamma}\right), \qquad (11)$$

$$\left(C_0=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_\ell^0\alpha_{g0}}}\right).$$

На основе выражений *(6)* и *(7)* можем записать уравнение, связывающее давление и радиус

$$p_e=p_0\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^{3\gamma}. \qquad (12)$$

Исключая a_e из *(11)* и *(12)*, получим уравнение, связывающее скорость волны с давлением за волной

$$\frac{C^2}{C_0^2}=\frac{(p_e/p_0)-1}{\gamma\left(1-(p_e/p_0)^{1/\gamma}\right)}. \qquad (13)$$

Отсюда видно, что скорость ударной волны ($p_e>p_0$) выше равновесной скорости звука при политропическом поведении газовой фазы ($C>C_0$). В случае слабых ударных волн ($p_e-p_0<<p_0$) из *(13)* следует

$$\frac{C}{C_0}=1+\frac{\gamma+1}{4}\frac{p_e-p_0}{p_0}.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения вблизи начального ($a=a_0$) и конечного равновесных состояний. Полагая $|\Delta a|<<a_0$ ($\Delta a=a-a_0$), произведем линеаризацию уравнения *(10)*. Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\Delta A}{d\xi^2}-4\nu_0\frac{d\Delta A}{d\xi}+\frac{3\alpha_{g0}}{a_0^2}\left(\frac{C_0^2}{C^2}-1\right)\Delta A=0,$$
$$\Delta A=\frac{\Delta a}{a_0},\ \nu_0=\frac{\nu_\ell}{a_0^2C}. \qquad (14)$$

Решение *(14)* ищем в виде:

$$\Delta A=\Delta A^{(0)}e^{k\xi}. \qquad (15)$$

Тогда для характеристического уравнения получим

$$k^2-4\nu_0k+\frac{3\alpha_{g0}}{a_0^2}\left(\frac{C_0^2}{C^2}-1\right)=0.$$

Отсюда, для корней этого уравнения получим

$$k=2\nu\pm\sqrt{4\nu^2+\frac{3\alpha_{g0}}{a_0^2}\left(1-\frac{C_0^2}{C^2}\right)}.$$

Это уравнение при $C>C_0$ имеет единственный отрицательный корень

$$k=-2\nu+\sqrt{4\nu^2+\frac{3\alpha_{g0}}{a_0^2}\left(1-\frac{C_0^2}{C^2}\right)}.$$

Этим обстоятельством обеспечивается и единственность решения *(10)* в виде ударной волны ($p_e>p_0$).

Вблизи равновесного состояния $a=a_e$ линеаризованное уравнение *(10)* можно представить в виде:

$$\frac{d^2\Delta A}{d\xi^2}-4\nu_e\frac{d\Delta A}{d\xi}+\frac{3\alpha_{ge}}{a_e^2}\left(\frac{C_e^2}{C^2}-1\right)\Delta A=0,$$

$$\left(\Delta A=\frac{a-a_e}{a_e},\ \nu_e=\frac{\nu_\ell}{a_e^2C},\ \alpha_{ge}=\alpha_{g0}\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^3,\right.$$
$$\left.C_e=\sqrt{\frac{\gamma p_e}{\rho_\ell^0\alpha_{ge}}}\right).$$

Здесь отметим, что C_e соответствует равновесной скорости звука для состояния за волной. Используя *(13)* нетрудно получить, что

$$\frac{C^2}{C_e^2}=\frac{(1-p_0/p_e)}{\gamma\left((p_0/p_e)^{1/\gamma}-1\right)}.$$

Отсюда следует, что для ударной волны ($p_e>p_0$) скорость волны относительно состояния за волной является дозвуковой ($C<C_e$). Для решения вида *(15)* получим следующее характеристическое уравнение

$$k^2-4\nu_ek+\frac{3\alpha_{ge}}{a_e^2}\left(\frac{C_e^2}{C^2}-1\right)=0. \qquad (16)$$

Отсюда, для корней *(16)* можем записать

$$k=2\nu_e\pm\sqrt{2\nu_e^2+\frac{3\alpha_{ge}}{a_e^2}\left(1-\frac{C_e^2}{C^2}\right)}. \qquad (17)$$

Как следует из *(17)*, решение вблизи состояния $a=a_e$ может быть чисто монотонным, когда

$$\frac{C_e^2}{C^2}>1+\frac{2\nu_e^2a_e^2}{3\alpha_{ge}}.$$

Если это условие не выполняется, решение является осцилляционным.

Если в уравнении *(10)* пренебречь влиянием вязкости ($\nu_\ell=0$), то оно допускает решение в виде уединенной волны (солитона)

$$\int_{a_3}^{a}\frac{da'}{\sqrt{f(a')}}=\pm\xi,$$

$$f(a)=\frac{2\alpha_{g0}}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2}-\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2}\right)^2+\right. \qquad (18)$$
$$\left.+\frac{C_0^2}{C^2}\left(\left(\gamma-\left(\frac{a}{a_0}\right)^3-\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}\right)\Big/(\gamma-1)-1\right)\right).$$

Здесь a_s – значение радиуса пузырьков, соответствующее максимальному сжатию, которое со скоростью волны связано следующим выражением

$$\frac{C^2}{C_0^2}=\frac{2\left(1-\left(\gamma(a_0/a_s)^3-(a_s/a_0)^{3\gamma}\right)\right)\Big/(\gamma-1)}{\left((a_0/a_s)^{3/2}-(a_s/a_0)^{3/2}\right)^2} \qquad (19)$$

При этом для пикового значения давления $(a=a_s)$ на основе (6) можем получить

$$p_s=p_0\left(1+\frac{\gamma C^2}{C_0^2}\left(1-\left(\frac{a_s}{a_0}\right)^3\right)\right) \qquad (20)$$

В случае слабых солитонов ($a_0 - a_s << a_0$) из *(19)* и *(20)* будем иметь

$$\frac{C}{C_0} = 1 + (\gamma + 1)\frac{a_0 - a_s}{a_0} \text{ и}$$
$$\frac{p_s - p_0}{p_0} = 3\gamma \frac{a_0 - a_s}{a_0}. \qquad (21)$$

Решение *(18)* с учетом *(21)* может быть представлено в виде

$$a = a_0 - (a_0 - a_s)\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{3\alpha_{g0}(\gamma+1)(a_0 - a_s)}{4a_0}}\,\frac{\xi}{a_0}\right)$$

Исключая a_s, из *(21)* получим зависимость скорости слабых солитонов от их амплитуды

$$\frac{C}{C_0} = 1 + \frac{(\gamma+1)}{6\gamma}\frac{p_s - p_0}{p_0}.$$

В случае сильновязкой жидкости ($4\nu_\ell / a_0 C >> 1$), пренебрегая в правой части уравнения *(10)* вторым слагаемым, ответственным за эффекты радиальной инерции, можем получить решение в виде «ступеньки»

$$\int_{a_*}^{a} \frac{da'}{a' f(a')} = \frac{\alpha_{g0} C}{4\nu_\ell}\xi \to f(a) = 1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + \frac{C_0^2}{\gamma C^2}\left(1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma}\right). \qquad (22)$$

Здесь a_* ($a_e < a_* < a_0$) – значение радиуса в начале координат $(\xi = 0)$.

В случае слабых ударных волн ($a_0 - a_e << a_0$) решение *(22)* имеет следующую асимптотику в элементарных функциях:

$$a = \frac{a_0 + a_e}{2} + \frac{a_0 - a_e}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{9(\gamma+1)(a_0 - a_e)\alpha_{g0} C_0 \xi}{16\nu_\ell a_0}\right)$$

Полагая

$$\frac{a_0 - a}{a_0} = \frac{p - p_0}{3\gamma p_0},$$

в случае слабых ударных волн, решение *(22)* можно представить в виде

$$p = \frac{p_0 + p_e}{2} + \frac{p_e - p_0}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{3(\gamma+1)(p_e - p_0)\alpha_{g0} C_0 \xi}{16\gamma\nu_\ell p_0}\right). \qquad (23)$$

Выводы

В работе на основе одномерных стационарных уравнений течения жидкости с газовыми пузырьками выписано волновое уравнение для пузырьковой жидкости в переменных Лагранжа. Для случая сильновязких жидкостей получено решение вида «ступенька».

Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 гг. (№0246-2019-0052).

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell I. J., Pitcher A. S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1958. V. 243. P. 534–545.
2. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Наук. 1959. №1. С. 46–49.
3. Паркин Б. Р., Гилмор Ф. Р.. Броуд Х. Л. Ударные волны в воде с пузырьками воздуха // В кн. Подводные и подземные взрывы. М.: Наука. 1974. С. 152–258.
4. Кедринский В. К. Особенности динамики сферического газового пузырька в жидкости // ПМТФ. 1967. №3. С. 27–29.
5. Benjamin T. B. Internal waves of finite amplitude and permanent form // J. Fluid Mech. 1966. V. 25. P. 241–270.
6. Wijngaarden L. On the equation of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. Iss. 3. P. 465–474.
7. Wijngaarden L. On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures // Appl. Sci. Res. 1970. Iss. 5. P. 336–381.
8. Crespo A. Sound and shock waves in liquid containing bubbles // Phys. Fluids. 1969. V. 12. Iss. 11. C. 2274–2282.
9. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
10. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости // Механика. 1968. Т. 109. №3. С. 67–84.
11. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа // Доклады АН СССР. 1974. Т. 214. №4. С. 779–782.
12. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. №6. С. 30–41.
13. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. №6. С. 1299–1302.
14. Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б. Ударная волна в жидкости с пузырьками // Акуст. журн. 1977. Т. 23. №4. С. 636–639.
15. Гасенко В. Г. Структура стационарных ударных волн в газожидкостной среде с тепловой релаксацией // Сб. научн. тр. Теплофизические исследования. Новосибирск. ИТФ. 1977. С. 42–46.
16. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. №5. С. 71–76.
17. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Волны конечной амплитуды в двухфазных системах // В сб. Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск. 1975. С. 5–53.
18. Гасенко В. Г. Волновая динамика газожидкостных смесей в приближении двухскоростного нелинейного волнового уравнения // Сб. научн. тр. Физическая гидродинамика и теплообмен. Новосибирск. ИТФ. 1978. С. 22−29.
19. Малых Н. В., Огородников И. А. О применении уравнения Клейна-Гордона для описания структуры импульсов сжатия в жидкости с пузырьками газа // В кн.: Динамика сплошной среды. 1977. Вып. 29. Механика взрывных процессов. Новосибирск: Труды института гидродинамики.
20. Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision free plasma // J. Phys. Sos. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
21. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Sos. Japan. 1972. V. 33. P. 260–264.
22. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 585–593.
23. Ким Д. Ч. Физическая природа акустических солитонов в жидкости с распределенными пузырьками газа // ДАН. 2008. Т. 418. №5. С. 619–623.
24. Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа при учете вязкости и теплообмена // МЖГ. 2010. №1. С. 108–127.
25. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. №6. С. 30–37.
26. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена // ПМТФ. 1977. №3. С. 67–74.
27. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1–2. М.: Наука. 1987. 360 с., 464 с.

28. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука. 1984. 301 с.
29. Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
30. Галимзянов М. Н. Распространение волн давления в пузырьковых зонах конечных размеров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 4. С. 27–35.
31. Галимзянов М. Н. Распространение волн сжатия в пузырьковых зонах конечных размеров // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. №.2. С. 57–66.
32. Агишева У. О. Воздействие ударных волн на пузырьковые и пенные структуры в двумерных осесимметричных объемах // Вестник БашГУ. 2013. Т. 18. №3. С. 640–645.
33. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. №4. С. 912–921.
34. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. №2. С. 256–262.
35. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. №3. (в печати)
36. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
37. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35. №3. С. 451–465.

Поступила в редакцию 04.04.2019 г.

WAVE EQUATION FOR BUBBLE LIQUID IN LAGRANGIAN VARIABLES

© M. N. Galimzyanov*, U. O. Agisheva

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center of RAS
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 235 52 55.
**Email: monk@anrb.ru*

One-dimensional steady flow of liquid with gas bubbles is considered under the following assumptions: monodisperse mixture; viscosity and thermal conductivity are matter only in the process of interfacial interaction and during bubble pulsations. It was assumed that there is no mass transfer between the phases, and the liquid temperature is constant, unlike the gas temperature in a bubble. The pressure in the bubble was taken uniform, which is true if the radial velocity of the bubble walls is significantly less than the speed of sound in the gas. A polytropic law was taken for the description of gas properties in bubbles. On the basis of one-dimensional stationary equations of fluid flow with gas bubbles, the wave equation for a bubbly fluid in Lagrangian variables was written. For the case of highly viscous liquids a "step" type solution was obtained.

Keywords: one-dimensional stationary flow, bubbly liquid, gas bubbles, vapor bubbles, Lagrangian variables, weak shock waves, viscosity.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Campbell I. J., Pitcher A. S. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1958. Vol. 243. Pp. 534–545.
2. Lyakhov G. M. Izv. AN SSSR. Ser. Tekhn. Nauk. 1959. No. 1. Pp. 46–49.
3. Parkin B. R., Gilmor F. R.. Broud Kh. L. V kn. Podvodnye i podzemnye vzryvy. Moscow: Nauka. 1974. Pp. 152–258.
4. Kedrinskii V. K. PMTF. 1967. No. 3. Pp. 27–29.
5. Benjamin T. B. J. Fluid Mech. 1966. Vol. 25. Pp. 241–270.
6. Wijngaarden L. J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. Iss. 3. Pp. 465–474.
7. Wijngaarden L. Appl. Sci. Res. 1970. Iss. 5. Pp. 336–381.
8. Crespo A. Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. Iss. 11. Pp. 2274–2282.
9. Iordanskii S. V. PMTF. 1960. No. 3. Pp. 102–110.
10. Batchelor G. K. Mekhanika. 1968. Vol. 109. No. 3. Pp. 67–84.
11. Nigmatulin R. I., Khabeev N. S., Shagapov V. Sh. Doklady AN SSSR. 1974. Vol. 214. No. 4. Pp. 779–782.
12. Nigmatulin R. I., Shagapov V. Sh. Izv. AN SSSR. MZhG. 1974. No. 6. Pp. 30–41.
13. Gubaidullin A. A., Ivandaev A. I., Nigmatulin R. I. Doklady AN SSSR. 1976. Vol. 226. No. 6. Pp. 1299–1302.
14. Boguslavskii Yu. Ya., Grigor'ev S. B. Akust. zhurn. 1977. Vol. 23. No. 4. Pp. 636–639.
15. Gasenko V. G. Sb. nauchn. tr. Teplofizicheskie issledovaniya. Novosibirsk. ITF. 1977. Pp. 42–46.
16. Nakoryakov V. E., Sobolev V. V., Shreiber I. R. Izv. AN SSSR. MZhG. 1972. No. 5. Pp. 71–76.
17. Nakoryakov V. E., Sobolev V. V., Shreiber I. R. V sb. Volnovye protsessy v dvukhfaznykh sistemakh. Novosibirsk. 1975. Pp. 5–53.
18. Gasenko V. G. Sb. nauchn. tr. Fizicheskaya gidrodinamika i teploobmen. Novosibirsk. ITF. 1978. Pp. 22−29.
19. Malykh N. V., Ogorodnikov I. A. V kn.: Dinamika sploshnoi sredy. 1977. No. 29. Mekhanika vzryvnykh protsessov. Novosibirsk: Trudy instituta gidrodinamiki.
20. Kakutani T., Ono H. J. Phys. Sos. Japan. 1969. Vol. 26. Pp. 1305–1318.
21. Kawahara T. J. Phys. Sos. Japan. 1972. Vol. 33. Pp. 260–264.
22. Gorshkov K. A., Ostrovskii L. A., Papko V. V. ZhETF. 1976. Vol. 71. Pp. 585–593.
23. Kim D. Ch. DAN. 2008. Vol. 418. No. 5. Pp. 619–623.
24. Kudryashov N. A. MZhG. 2010. No. 1. Pp. 108–127.
25. Nigmatulin R. I., Shagapov V. Sh. Izv. AN SSSR. MZhG. 1974. No. 6. Pp. 30–37.
26. Aidagulov R. R., Khabeev N. S., Shagapov V. Sh. PMTF. 1977. No. 3. Pp. 67–74.
27. Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred. Vol. 1–2 [Dynamics of multiphase media. Vol. 1–2]. Moscow: Nauka, 1987.
28. Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. Teplomassoobmen i volny v gazozhidkostnykh sistemakh [Heat and mass transfer and waves in gas-liquid systems]. Novosibirsk: Nauka. 1984.
29. Kedrinskii V. K. Gidrodinamika vzryva: eksperiment i modeli [Explosion hydrodynamics: experiment and models]. Novosibirsk: izd-vo SO RAN, 2000.
30. Galimzyanov M. N. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2010. Vol. 10. No. 4. Pp. 27–35.
31. Galimzyanov M. N. Vest. Udmurt. un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 2010. No. .2. Pp. 57–66.
32. Agisheva U. O. Vestnik BashGU. 2013. Vol. 18. No. 3. Pp. 640–645.
33. Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Vdovenko I. I., Khabeev N. S. Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. 2018. Vol. 91. No. 4. Pp. 912–921.
34. Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Vdovenko I. I. Teplofizika vysokikh temperatur. 2019. Vol. 57. No. 2. Pp. 256–262.
35. Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Vdovenko I. I. Teplofizika vysokikh temperatur. 2019. Vol. 57. No. 3. (v pechati)
36. Nigmatulin R. I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Basics of mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka. 1978.
37. Nigmatulin R. I. PMM. 1971. Vol. 35. No. 3. Pp. 451–465.

Received 04.04.2019.