УДК 517.9

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.1.2

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© Р. Н. Гайсина^{1*}, А. В. Жибер^{1,2}¹Бакирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

²Институт математики с Вычислительным центром УФИЦ РАН

Россия, Республика Башкортостан, 450008 г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Тел.: +7 (917) 492 93 14.

*Email: regina_naufilevna@mail.ru

В работе рассматривается система уравнений:

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u, v, u_x, v_x), \quad v_t = -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x).$$

Получены условия на правые части системы таких уравнений, которые обладают законом сохранения нулевого порядка. Описаны системы уравнений, имеющих закон сохранения первого порядка. Также приведены условия, при которых исходная система уравнений обладает законами сохранения нулевого и первого порядков.

Ключевые слова: вариационная производная, закон сохранения, оператор полного дифференцирования.

Введение

В работе рассматриваются системы уравнений:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, t, u, v, u_x, v_x), \\ v_t = -v_{xx} + \varphi(x, t, u, v, u_x, v_x) \end{cases} \quad (1)$$

обладающие законом сохранения нулевого порядка:

$$D_t A(x, t, u, v) = D_x B(x, t, u, v, u_1, v_1), \quad (2)$$

и законом сохранения первого порядка

$$D_t C(x, t, u, v, u_1, v_1) = D_x K(x, t, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2). \quad (3)$$

Здесь D_t и D_x – операторы полного дифференцирования по переменной t и x соответственно, а $u_1 = u_x$, $v_1 = v_x$, $u_2 = u_{xx}$, $v_2 = v_{xx}, \dots$.

Частные случаи системы дифференциальных уравнений (1) специальных классов исследовались в статьях [1–4], в которых были получены условия, которым должны удовлетворять правые части этих систем уравнений, обладающих богатым набором законов сохранения.

В первом параграфе получены условия на правые части системы уравнений (1), т.е. на функции $f(x, t, u, v, u_x, v_x)$ и $\varphi(x, t, u, v, u_x, v_x)$, при выполнении которых система уравнений (1) обладает законом сохранения нулевого порядка.

Во втором и третьем параграфах описаны системы уравнений (1), имеющие закон сохранения первого порядка (3), и системы обладающие законами сохранения (2) и (3).

§ 1. Закон сохранения нулевого порядка

В этом параграфе рассматривается задача об описании систем уравнений вида (1), обладающих законом сохранения нулевого порядка (2).

Описание таких систем уравнений основано на понятие вариационной производной.

Вариационная производная функции $W = W(x, t, u, u_1, u_2, \dots, u_m)$ определяется по формуле:

$$\frac{\delta W}{\delta u} = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^k \left(\frac{\partial W}{\partial u_k} \right). \quad (4)$$

Пусть справедливо соотношение:

$$\hat{A}(x, t, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2) = D_x B(x, t, u, v, u_x, v_x). \quad (5)$$

Тогда $\frac{\delta \hat{A}}{\delta u} = 0$ и $\frac{\delta \hat{A}}{\delta v} = 0$. (6)

Запишем соотношения (6) в виде:

$$\begin{cases} \hat{A}_u - D(\hat{A}_{u_1}) + D^2(\hat{A}_{u_2}) = 0, \\ \hat{A}_v - D(\hat{A}_{v_1}) + D^2(\hat{A}_{v_2}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено соотношение:

$$A_u f + A_v \varphi = A_{uu} u_1^2 - A_{vv} v_1^2 + (A_{ux} + h_u) u_1 + (h_v - A_{vx}) v_1 - A_t + h_x. \quad (8)$$

Тогда система уравнений (1) имеет закон сохранения нулевого порядка (2) и записывается в виде:

$$D_t A = D_x (A_u u_1 - A_v v_1 + h), \quad (9)$$

где

$$B(x, t, u, v, u_1, v_1) = A_u u_1 - A_v v_1 + h,$$

а A и h – произвольные функции, зависящие от переменных x, t, u, v .

Доказательство. Согласно соотношениям (5) и (2) функция $\hat{A}$ записывается в виде:

$$\hat{A} = A_t + A_u (u_2 + f) + A_v (-v_2 + \varphi). \quad (10)$$

Подставив (10) в (7) получим:

$$A_{tu} + A_{uu} (u_2 + f) + A_{uf} + A_{vu} (-v_2 + \varphi) + A_v \varphi_u - D(A_u f_{u_1} + A_v \varphi_{u_1}) + D^2 A_u = 0, \quad (11)$$

$$A_{tv} + A_{uv} (u_2 + f) + A_{uf} + A_{vv} (-v_2 + \varphi) + A_v \varphi_v - D(A_u f_{v_1} + A_v \varphi_{v_1}) - D^2 A_v = 0. \quad (12)$$

Приравнявая коэффициенты при независимых переменных u_2 и v_2 в равенствах (11) и (12), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A_{uu} - A_u f_{u_1 u_1} - A_v \varphi_{u_1 u_1} = 0, \\ A_u f_{u_1 v_1} + A_v \varphi_{u_1 v_1} = 0, \\ 2A_{vv} + A_u f_{v_1 v_1} + A_v \varphi_{v_1 v_1} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Перепишем систему (13) в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} [A_u f + A_v \varphi] = 2A_{uu}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial v_1} [A_u f + A_v \varphi] = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} [A_u f + A_v \varphi] = -2A_{vv} \end{cases} \quad (14)$$

Из системы (14) получим соотношение:

$$A_u f + A_v \varphi = A_{uu} u_1^2 - A_{vv} v_1^2 + p(x, t, u, v) u_1 + q(x, t, u, v) v_1 + r(x, t, u, v). \quad (15)$$

Согласно равенству (15) функция $\hat{A}$ запишется в виде:

$$\hat{A} = A_t + A_u u_2 - A_v v_2 + A_{uu} u_1^2 - A_{vv} v_1^2 + p(x, t, u, v) u_1 + q(x, t, u, v) v_1 + r(x, t, u, v). \quad (16)$$

Далее учитывая (16), перепишем соотношения (11) и (12):

$$A_{tu} + A_{uu} u_2 - A_{vu} v_2 + A_{uuu} u_1^2 - A_{vvu} v_1^2 + p_u u_1 + q_u v_1 + r_u - D(2A_{uu} u_1 + p) + D^2 A_u = 0, \quad (17)$$

$$A_{tv} + A_{vu} u_2 - A_{vv} v_2 + A_{uvv} u_1^2 - A_{vvv} v_1^2 + p_v u_1 + q_v v_1 + r_v - D(-2A_{vv} v_1 + q) - D^2 A_v = 0. \quad (18)$$

Приравнявая коэффициенты при независимых переменных u_1 и v_1 нетрудно показать, что уравнения (17) и (18) сводятся к следующей системе:

$$\begin{cases} A_{tu} + r_u - p_x + A_{uxx} = 0, \\ q_u - p_v + 2A_{uvx} = 0, \\ A_{tv} + r_v - q_x - A_{vxx} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Построим решение системы (19), для этого введем обозначения:

$$A_t + r = F, p - A_{xu} = Q, q + A_{vx} = R. \quad (20)$$

Тогда система (19) запишется в виде:

$$F_u = Q_x, R_u = Q_v, F_v = R_x. \quad (21)$$

Из первого равенства (21) получаем, что существует функция $H = H(x, t, u, v)$ такая, что:

$$F = H_x, Q = H_u. \quad (22)$$

Тогда второе и третье равенства (21) запишутся в виде:

$$R_u = H_{uv}, R_x = H_{xv}. \quad (23)$$

Теперь из (23) получаем:

$$R = H_v + \mu(t, v) = [H + \chi(t, v)]'_v, \text{ где } \mu = \chi_v. \quad (24)$$

Положим $H + \chi(t, v) = h(x, t, u, v)$, тогда равенства (21) и (24) примут вид:

$$F = h_x, Q = h_u, R = h_v. \quad (25)$$

Теперь из (20) и (25) получаем решение системы (19):

$$r = -A_t + h_x, p = A_{xu} + h_u, q = -A_{vx} + h_v. \quad (26)$$

И наконец, покажем, что при выполнении условий (15) и (26) система (1) имеет закон сохранения нулевого порядка (2). Действительно, распишем закон сохранения (2):

$$\begin{aligned} D_t A &= A_t + A_u(u_2 + f) + A_v(-v_2 + \varphi) = A_t + A_u u_2 - A_v v_2 + A_u f + A_v \varphi = A_t + A_u u_2 - A_v v_2 + A_{uu} u_1^2 - \\ &A_{vv} v_1^2 + p u_1 + q v_1 + r = A_t + A_u u_2 - A_v v_2 + A_{uu} u_1^2 - A_{vv} v_1^2 + (A_{ux} + h_u) u_1 + (h_v - A_{vx}) v_1 - A_t + h_x = \\ &A_u u_2 - A_v v_2 + A_{uu} u_1^2 - A_{vv} v_1^2 + A_{ux} u_1 - A_{vx} v_1 + h_u u_1 + h_v v_1 + h_x = D_x(A_u u_1 - A_v v_1 + h). \end{aligned}$$

То есть:

$$D_t A = D_x(A_u u_1 - A_v v_1 + h), \text{ где } A_u u_1 - A_v v_1 + h = B. \quad (27)$$

Итак, доказано, что система уравнений (1) имеет закон сохранения нулевого порядка (2), где функции $f(x, t, u, v, u_x, v_x)$ и $\varphi(x, t, u, v, u_x, v_x)$ удовлетворяют соотношению (8) согласно (15) и (26), а сам закон сохранения нулевого порядка записывается в виде (27).

Теорема доказана.

§2. Закон сохранения первого порядка

В этом параграфе рассматривается задача об описании систем уравнений вида (1), обладающих законом сохранения первого порядка:

$$D_t C(x, t, u, v, u_1, v_1) = D_x K(x, t, u, v, u_1, v_1, u_2, v_2). \quad (28)$$

Для описания таких систем уравнений закон сохранения первого порядка (28) перепишем в виде:

$$C_t + C_u(u_2 + f) + C_v(-v_2 + \varphi) + C_{u_1}(u_3 + Df) + C_{v_1}(-v_3 + D\varphi) = DK,$$

или

$$\begin{aligned} C_t + C_u(u_2 + f) + C_v(-v_2 + \varphi) + D[C_{u_1}(u_2 + f)] - (u_2 + f)DC_{u_1} + \\ + D[C_{v_1}(-v_2 + \varphi)] - (-v_2 + \varphi)DC_{v_1} = DK, \end{aligned}$$

или

$$C_t + C_u(u_2 + f) + C_v(-v_2 + \varphi) - (u_2 + f)DC_{u_1} - (-v_2 + \varphi)DC_{v_1} = D\tilde{K}. \quad (29)$$

Здесь

$$\tilde{K} = K - C_{u_1}(u_2 + f) - C_{v_1}(-v_2 + \varphi). \quad (30)$$

Отметим, что $\tilde{K} = \tilde{K}(x, t, u, v, u_1, v_1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $C_{u_1 v_1} \neq 0$, тогда система уравнений (1) имеет закон сохранения первого порядка (28) ((29), (30)), если функция $\tilde{K}$ удовлетворяет уравнению:

$$P\tilde{K}_{v_1} + Q\tilde{K}_{u_1} + C_{u_1 v_1} L(\tilde{K}) = C_t \cdot C_{u_1 v_1}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} P &= C_u - (C_{u_1 x} + C_{u_1 u} u_1 + C_{u_1 v} v_1), \\ Q &= C_v - (C_{v_1 x} + C_{v_1 u} u_1 + C_{v_1 v} v_1), \end{aligned} \quad (32)$$

а оператор $L = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + v_1 \frac{\partial}{\partial v}$.

При этом функции $f(x, t, u, v, u_1, v_1)$ и $\varphi(x, t, u, v, u_1, v_1)$ определяются по формулам:

$$C_{u_1 v_1} \varphi = P - \tilde{K}_{u_1}, C_{u_1 v_1} f = -\tilde{K}_{v_1} - Q. \quad (33)$$

Доказательство. Рассмотрим закон сохранения первого порядка (29), (30).

Приравнявая коэффициенты при независимых переменных u_2^2 и v_2^2 , получим равенства:

$$C_{u_1 u_1} = 0, C_{v_1 v_1} = 0. \quad (34)$$

Перепишем соотношение (29), учитывая равенства (34):

$$\begin{aligned} C_t + [C_u - (C_{u_1 x} + C_{u_1 u} u_1 + C_{u_1 v} v_1)] f + [C_v - (C_{v_1 x} + C_{v_1 u} u_1 + C_{v_1 v} v_1)] \varphi + \\ + u_2 [C_u - (C_{u_1 x} + C_{u_1 u} u_1 + C_{u_1 v} v_1) - C_{u_1 v_1} \varphi] + \\ + v_2 [-C_v + (C_{v_1 x} + C_{v_1 u} u_1 + C_{v_1 v} v_1) - C_{u_1 v_1} f] = D\tilde{K}. \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно равенствам (32) соотношение (35) запишется в виде:

$$C_t + Pf + Q\varphi + u_2 [P - C_{u_1 v_1} \varphi] + v_2 [-Q - C_{u_1 v_1} f] = D\tilde{K}. \quad (36)$$

В соотношении (36) приравнявая коэффициенты при независимых переменных u_2 и v_2 , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P - C_{u_1 v_1} \varphi = \tilde{K}_{u_1}, \\ -Q - C_{u_1 v_1} f = \tilde{K}_{v_1}, \\ C_t + Pf + Q\varphi = \tilde{K}_x + \tilde{K}_{u_1} u_1 + \tilde{K}_{v_1} v_1 = L(\tilde{K}). \end{cases} \quad (37)$$

Итак, если выполняются равенства (37), тогда имеется закон сохранения первого порядка.

Согласно первым двум соотношениям системы (37) при $C_{u_1 v_1} \neq 0$, третье соотношение этой системы запишется в виде:

$$P\tilde{K}_{v_1} + Q\tilde{K}_{u_1} + C_{u_1 v_1} L(\tilde{K}) = C_t \cdot C_{u_1 v_1}. \quad (38)$$

Таким образом, если функция $\tilde{K} = \tilde{K}(x, t, u, v, u_1, v_1)$ – решение уравнения (38) и функции $f(x, t, u, v, u_1, v_1)$ и $\varphi(x, t, u, v, u_1, v_1)$ определяются из первых двух соотношений системы уравнений (37), тогда исходная система уравнений (1) имеет закон сохранения первого порядка.

Теорема доказана.

Пусть $C_{u_1 v_1} = 0$. Тогда, учитывая формулы (34) получаем, что:

$$C = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma, \quad (39)$$

где α, β, γ – функции переменных x, t, u, v .

Далее согласно формулам (32) и (39) имеем:

$$P = (\beta_u - \alpha_v) v_1 + \gamma_u - \alpha_x, Q = (\alpha_v - \beta_u) u_1 + \gamma_v - \beta_x. \quad (40)$$

Первые два уравнения системы (37) примут вид:

$$\tilde{K}_{u_1} = P, \tilde{K}_{v_1} = Q. \quad (41)$$

Так как согласно (40) $P_{v_1} = -Q_{u_1}$, то из (41) получаем, что:

$$\tilde{K} = (\beta_u - \alpha_v) v_1 u_1 + (\gamma_u - \alpha_x) u_1 + (\beta_x - \gamma_v) v_1 + r, \quad (42)$$

где $r = r(x, t, u, v)$.

Таким образом, исходная система уравнений (1) имеет закон сохранения первого порядка, если правые части f и φ удовлетворяют третьему соотношению системы (37), где функция $\tilde{K}$ определяется по формуле (42).

§ 3. Системы уравнений с законами сохранения нулевого и первого порядков

В этом параграфе рассматривается система уравнений (1), которая обладает двумя законами сохранения нулевого и первого порядков.

В первом параграфе показано, что система уравнений (1) имеет закон сохранения нулевого порядка, если выполнено соотношение (8). Рассмотрим случай, когда $C_{u_1 v_1} \neq 0$.

Перепишем соотношение (8) учитывая (37) и полагая $A = a$:

$$a_u (-\tilde{K}_{v_1} - Q) + a_v (P - \tilde{K}_{u_1}) = C_{u_1 v_1} [a_{uu} u_1^2 - a_{vv} v_1^2 + (a_{xu} + h_u) u_1 + (h_v - a_{vx}) v_1 - a_t + h_x]. \quad (43)$$

Также во втором параграфе получено, что система уравнений (1) имеет закон сохранения первого порядка, если функция $\tilde{K} = \tilde{K}(x, t, u, v, u_1, v_1)$ определяется из уравнения (38).

Таким образом, для того, чтобы имелось два закона сохранения, функция $\tilde{K}(x, t, u, v, u_1, v_1)$ должна удовлетворять системе уравнений (38) и (43).

Далее функция $C = C(x, t, u, v, u_1, v_1)$ согласно равенствам (34), имеет вид:

$$C = \alpha(x, t, u, v)u_1v_1 + \beta(x, t, u, v)u_1 + \gamma(x, t, u, v)v_1 + \delta(x, t, u, v). \quad (44)$$

Тогда равенства (32), согласно (44), запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P &= -\alpha_v v_1^2 + (\gamma_u - \alpha_x - \beta_v)v_1 + \delta_u - \beta_x, \\ Q &= -\alpha_u u_1^2 + (\beta_v - \alpha_x - \gamma_u)u_1 + \delta_v - \gamma_x. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь соотношение (43), с учетом (44) и (45), примет вид:

$$\begin{aligned} a_u \tilde{K}_{v_1} + a_v \tilde{K}_{u_1} &= (a_u \alpha_u - \alpha a_{uu})u_1^2 + (-a_v \alpha_v + \alpha a_{vv})v_1^2 + u_1[-a_u(\beta_v - \alpha_x - \gamma_u) + \alpha(a_{xu} + h_u)] + \\ &+ v_1[a_v(\gamma_u - \alpha_x - \beta_v) - \alpha(h_v - a_{vx})] + [-a_v(\delta_v - \gamma_x) + a_v(\delta_u - \beta_x) - \alpha(-a_t + h_x)]. \end{aligned} \quad (46)$$

Для решения уравнения (46), от переменных x, t, u, v, u_1, v_1 перейдем к переменным x, t, u, v, u_1, z , где

$$z = a_u u_1 - a_v v_1. \quad (47)$$

Тогда

$$\tilde{K}(x, t, u, v, u_1, v_1) = K(x, t, u, v, u_1, z). \quad (48)$$

Далее равенство (46) перепишем, учитывая (47) и (48):

$$\begin{aligned} a_u [K_z(-a_v)] + a_v [K_{u_1} + K_z a_u] &= a_v K_{u_1} = (a_u \alpha_u - \alpha a_{uu})u_1^2 + (-a_v \alpha_v + \alpha a_{vv}) \left[\frac{a_u^2}{a_v^2} u_1^2 - 2 \frac{a_u}{a_v^2} u_1 z + \frac{1}{a_v^2} z^2 \right] + \\ &+ u_1 [-a_u(\beta_v - \alpha_x - \gamma_u) - \alpha(a_{xu} + h_u)] + \left(\frac{a_u}{a_v} u_1 - \frac{1}{a_v} z \right) [a_v(\gamma_u - \alpha_x - \beta_v) - \alpha(h_v - a_{vx})] + [-a_u(\delta_v - \gamma_x) + \\ &+ a_v(\delta_u - \beta_x) - \alpha(-a_t + h_x)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом, соотношение (48) запишется в виде:

$$K_{u_1} = pu_1^2 + qu_1z + ru_1 + sz^2 + dz + \chi, \quad (50)$$

где p, q, r, s, d, χ – функции переменных x, t, u, v , которые имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= [a_u \alpha_u - \alpha a_{uu}] \frac{1}{a_v} + (-a_v \alpha_v + \alpha a_{vv}) \frac{a_u^2}{a_v^2}, \\ q &= (-a_v \alpha_v + \alpha a_{vv}) (-2) \frac{a_u}{a_v^2} \cdot \frac{1}{a_v}, \\ r &= \left\{ -a_u(\beta_v - \alpha_x - \gamma_u) - \alpha(a_{xu} + h_u) + \frac{a_u}{a_v} [a_v(\gamma_u - \alpha_x - \beta_v) - \alpha(h_v - a_{vx})] \right\} \frac{1}{a_v}, \\ s &= (-a_v \alpha_v + \alpha a_{vv}) \frac{1}{a_v^3}, \\ d &= -\frac{1}{a_v} [a_v(\gamma_u - \alpha_x - \beta_v) - \alpha(h_v - a_{vx})] \frac{1}{a_v}, \\ \chi &= [-a_u(\delta_v - \gamma_x) + a_v(\delta_u - \beta_x) - \alpha(-a_t + h_x)] \frac{1}{a_v}. \end{aligned}$$

Далее из формулы (50) следует, что:

$$K = \frac{p}{3} u_1^3 + \frac{q}{2} u_1^2 z + \frac{r}{2} u_1^2 + sz^2 u_1 + dz u_1 + \chi u_1 + E(x, t, u, v, z). \quad (51)$$

Уравнение (38) перепишем, учитывая (44), (47) и (48):

$$-a_v P K_z + Q [K_{u_1} + K_z a_u] + \alpha L(K) = \alpha C_t. \quad (52)$$

Таким образом, условие наличия законов сохранения нулевого и первого порядков, согласно формулам (51), (52), сводится к системе уравнений для определения искомых функций $E, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

При выполнении условия $C_{u_1 v_1} = 0$, исходная система уравнений (1) имеет законы сохранения нулевого и первого порядков, если правые части f и φ заданы уравнениями (8) и (37), где функция $\tilde{K}$ вычисляется по формуле (42).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. // ТМФ. 1985. Т. 62, №2. С. 163–185.
2. Михайлов А. В., Шабат А. Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. // ТМФ. 1986. Т. 66, №1. С. 47–65.
3. Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // УМН. 1987. Т. 42. №4. С. 3–53.
4. Шабат А. Б., Ямилов Р. И. О полном списке интегрируемых систем уравнений вида: $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x), -iv_t = v_{xx} + (u, v, u_x, v_x)$ // Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1985. С. 28.
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
6. Захаров В. Е. ЖЭТФ. 1973. Т. 65, №1. С. 219–225.
7. Боровик А. Е. Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28, №10. С. 629–632.
8. Михайлов А. В. Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, №7. С. 443–448.
9. Свинолулов С. И., Соколов В. В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 86–87.
10. Ямилов Р. И. О классификации дискретных эволюционных уравнений // УМФ. 1983. Т. 38. Вып. 6. С. 155–156.
11. Ямилов Р. И. Дискретные уравнения вида $\frac{du_n}{dt} = F(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) (n \in \mathbb{Z})$ с бесконечным набором законов сохранения // Кандидатская диссертация, Уфа. 1984.
12. Дринфельд В. Г., Свинолулов С. И., Соколов В. В. Классификация эволюционных уравнений пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения // ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1985. №10. С. 8–10.
13. Кондратьев В. А., Коньков А. А. О свойствах решений одного класса нелинейных уравнений второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, №9. С. 81–94.
14. Жибер А. В., Шабат А. Б. Уравнения Клейна – Гордона с нетривиальной группой // ДАН СССР. 1979. Т. 247, №5. С. 1104–1107.
15. Свинолулов С. И. Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями // УМН. 1985. Т. 40. Вып. 5. С. 263–264.
16. Свинолулов С. И. Эволюционные уравнения, обладающие симметриями. Кандидатская диссертация // Уфа. 1985.
17. Кулиш П. П. Факторизация классической и квантовой S – матрицы и закон сохранения // ТМФ. 1976. Т. 26, №2. С. 198–205.
18. Жибер А. В., Шабат А. Б. Системы уравнений $u_x = p(u, v), v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями // ДАН СССР. 1984. Т. 277. №1. С. 29–33.
19. Интегрируемые системы // Сб. ст. под ред. А. Б. Шабата. Уфа: изд-во БФ АН СССР. 1982.
20. Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б. Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 4. С. 79–80.
21. Голубев В. В. Лекции по математической теории дифференциальных уравнений. 1950.
22. Жибер А. В., Шабат А. Б. ДАН СССР. 1979. Т. 247. №5. С. 1103–1105.
23. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных, Тр. МИАН, 2001. Т. 234. С. 108–263.
24. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука. 1988. С. 336.
25. Жаринов А. В. Законы сохранения эволюционных систем // ТМФ. 1986. Т. 68. №2. С. 163–171.
26. Манаков С. В. О точном решении системы нелинейных уравнений Шредингера // Препринт ИЯФ 26–73. 1973. С. 22.

Поступила в редакцию 15.06.2019 г.

ON CONSERVATION LAWS FOR A CLASS OF EVOLUTIONARY SYSTEMS OF EQUATIONS

© R. N. Gaisina^{1*}, A. V. Zhiber^{1,2}

¹*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

²*Ufa Federal Research Center of RAS,
Institute of Mathematics with Computing Center
112 Chernyshevsky Street, 450008 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

Phone: +7 (917) 492 93 14.

**Email: regina_naufilevna@mail.ru*

The article is devoted to the study of evolutionary systems of equations. The conditions for the right-hand sides of a system of such equations possessing the law of conservation of zero order are obtained. The systems of equations with the first order conservation law are described. The description of such equations is based on the concept of a variation derivative. The conditions are also given under which the original system of equations has the laws of conservation of zero and first orders. Historically, it was the presence of a high order conservation law that drew attention to the now classical Cordeweg-de-Vries equation, the nonlinear Schrödinger equation, the sine-Gordon equation, which was later integrated using the backscatter method. A system of equations of this type often arises in various problems of theoretical physics, and therefore integrable cases were intensively searched for during the last decade. Progress began with the replacement of conservation laws by symmetries of higher order. The first complete list of nonlinear equations (Klein – Gordon models) with higher symmetries was obtained in the work of A. B. Shabat and A. V. Zhiber. Higher symmetries and conservation laws are important intrinsic properties of the equation – they are extremely useful both for constructing exact solutions and for a qualitative understanding of the behavior of the solution as a whole. With proper clarification, the authors of the article consider the presence of higher symmetries and conservation laws as the definition of integrability. Thanks to the symmetry approach, it was possible to formulate simple and general necessary conditions for integrability (that is, conditions for the existence of higher symmetries and conservation laws). The integrability conditions proved to be effective in solving classification tasks, it turned out that the first few conditions are sufficient to determine the right-hand side of equations completely with higher symmetries and conservation laws. In other words, the integrability conditions are not only necessary, but also sufficient, that is, they represent a criterion of integrability. Special cases of this system of differential equations of special classes were studied in the articles by A. V. Mikhailov and A. B. Shabbat. In the articles, the conditions were obtained that must be satisfied by the right-hand sides of these systems of equations, which have a rich set of conservation laws. It should be noted that the nonlinear Schrödinger equation describes the phenomenon of self-focusing and is a particular case of the evolutionary system of the considered equations.

Keywords: variation derivative, conservation law, operator of full differentiation.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Mikhailov. A. V., Shabat A. B. TMF. 1985. Vol. 62, No. 2. Pp. 163–185.
2. Mikhailov. A. V., Shabat A. B. TMF. 1986. Vol. 66, No. 1. Pp. 47–65.
3. Mikhailov A. V., Shabat A. B., Yamilov R. I. UMN. 1987. Vol. 42. No. 4. Pp. 3–53.
4. Shabat A. B., Yamilov R. I. Preprint. Ufa: BFAN SSSR. 1985. Pp. 28.
5. Zakharov V. E., Shabat A. B. ZhETF. 1971. Vol. 61. Pp. 118–134.
6. Zakharov V. E. ZhETF. 1973. Vol. 65, No. 1. Pp. 219–225.

7. Borovik A. E. Pis'ma v ZhETF. 1978. Vol. 28, No. 10. Pp. 629–632.
8. Mikhailov A. V. Pis'ma v ZhETF. 1979. Vol. 30, No. 7. Pp. 443–448.
9. Svinolupov S. I., Sokolov V. V. Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya. 1982. Vol. 16. No. 4. Pp. 86–87.
10. Yamilov R. I. UMF. 1983. Vol. 38. No. 6. Pp. 155–156.
11. Yamilov R. I. Kandidat-skaya dissertatsiya, Ufa. 1984.
12. Drinfel'd V. G., Svinolupov S. I., Sokolov V. V. DAN USSR. Ser. A. Fiz.-mat. i tekhn. nauki. 1985. No. 10. Pp. 8–10.
13. Kondrat'ev V. A., Kon'kov A. A. Mat. sb. 1994. Vol. 185, No. 9. Pp. 81–94.
14. Zhiber A. V., Shabat A. B. DAN SSSR. 1979. Vol. 247, No. 5. Pp. 1104–1107.
15. Svinolupov S. I. UMN. 1985. Vol. 40. No. 5. Pp. 263–264.
16. Svinolupov S. I. Ufa. 1985.
17. Kulish P. P. TMF. 1976. Vol. 26, No. 2. Pp. 198–205.
18. Zhiber A. V., Shabat A. B. DAN SSSR. 1984. Vol. 277. No. 1. Pp. 29–33.
19. Integriruyemye sistemy [Integrable systems]. Sb. st. pod red. A. B. Shabata. Ufa: izd-vo BF AN SSSR. 1982.
20. Ibragimov N. Kh., Shabat A. B. Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya. 1980. Vol. 14. No. 4. Pp. 79–80.
21. Golubev V. V. Lektsii po matematicheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii [Lectures on the mathematical theory of differential equations]. 1950.
22. Zhiber A. V., Shabat A. B. DAN SSSR. 1979. Vol. 247. No. 5. Pp. 1103–1105.
23. Mitidieri E., Pokhozhaev S. I. Apriornye otsenki i ot-sut-stvie reshenii nelineinykh uravnenii i neravenstv v chastnykh proizvodnykh, Tr. MIAN, 2001. Vol. 234. Pp. 108–263.
24. Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka. 1988. Pp. 336.
25. Zharinov A. V. TMF. 1986. Vol. 68. No. 2. Pp. 163–171.
26. Manakov S. V. Preprint IYaF 26–73. 1973. Pp. 22.

Received 15.06.2019.