УДК 534-16

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.2.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

© А. Д. Полищук

Ижевский государственный технический университет
Россия, Удмуртская республика 426069 г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.

Тел.: +7 (3412) 77 60 55.

*Email: apolischuk@mail.ru

Автор использует формы колебаний собственных мод для анализа частотного спектра и поиска новых явлений в колебаниях винтовых цилиндрических пружин.

Ключевые слова: колебания пружин, собственные частоты, формы колебаний.

Введение

В пружинах и пружинных механизмах существуют различные, не до конца исследованные динамические явления, например местные виды потери устойчивости, концевой эффект, т.н. «разрыв резонанса» [1–2]. Динамические свойства механических объектов в значительной степени зависят от набора собственных частот и форм колебаний.

Частотный спектр колебаний винтовых цилиндрических пружин имеет сложный характер. Колебания являются пространственными и взаимосвязанными – каждая мода имеет в своем составе перемещения по всем шести координатам. Задача является несамосопряженной, частоты с ростом номера гармоники сначала растут, потом убывают, потом снова растут, *рис. 1*. В частотном спектре присутствуют т.н. «нераспространяющиеся» моды – двойные собственные частоты с нулевой групповой скоростью, соответствующие точкам локального экстремума характеристического уравнения. Численные методы, доминирующие в наше время в решении сложных краевых задач, позволяют вычислить частоты собственных колебаний, но не дают понимания структуры частотного спектра.

Анализом частотного спектра пружин занимались многие авторы: J. E. Mottershead [3], V. Yildirim [4–6], J. Lee и D. J. Thomson [7], J. Lee [8], L. E. Becker и др. [9], A. Yu и C. Yang [10], A. Л. Григорьев и А. И. Деряженко [11], K. Michalczyk [12] и другие.

Статья посвящена использованию форм колебаний для исследования частотного спектра. Формы колебаний для цилиндрических пружин строили многие авторы: J. E. Mottershead [3], J. Lee и D. J. Thomson [7], J. Lee [8], K. Michalczyk [12], однако они строили формы колебаний в абсолютных координатах. Автором формы колебаний построены вдоль винтовой линии пружины в естественных координатах [1], также, как и у A. Yu и C. Yang [4]. В таком виде формы колебаний, по мнению автора статьи, значительно удобнее в качестве инструмента исследования. Формы колебаний используются

для анализа и классификации частотного спектра винтовых цилиндрических пружин, а также для поиска новых явлений.

Форма колебаний каждой моды имеет все шесть пространственных компонент. Для пружин нет чисто продольных или чисто поперечных колебаний, тем не менее, в технической литературе по пружинам обычно используется терминология эквивалентного бруса: продольные, поперечные, крутильные колебания. В данном случае продольные и поперечные колебания рассматриваются относительно оси пружины.

Методы получения результатов

Взаимосвязанные пространственные колебания винтовых цилиндрических пружин анализируются на основе уравнений Кирхгофа-Клебша (модель Бернулли-Эйлера), в обозначениях П. Е. Товстича [13]. Рассматриваются малые колебания относительно больших предварительных деформаций, учитываются предварительное поджатие и закрутка пружины.

Рис. 1. Система координат, обозначения линейных и угловых перемещений и внутренних силовых факторов для элемента витка пружины.

Система координат естественная, связана с винтовой линией пружины, *рис. 1*. Координаты: χ – нормаль, ξ – бинормаль, ρ – тангенциальная координата. Перемещения: U, V, W – линейные перемещения элемента пружины, соответственно, по нормали, по бинормали и в тангенциальном направлении, $\vartheta, \varphi, \gamma$ –

соответствующие угловые перемещения элемента пружины. Внутренние силовые факторы: Q_ρ, Q_χ, Q_ξ – соответственно, нормальная и перерезывающие силы, M_ρ, M_χ, M_ξ – соответственно, крутящий и изгибающие моменты. Расчеты ведутся в безразмерных частотах ω/p_0 , по отношению к основной частоте продольных колебаний по модели эквивалентного бруса.

Основные параметры пружины, используемые в расчетах:

- i – число рабочих витков пружины;
- α – угол подъема винтовой линии пружины (α_0 – начальный, до поджатия, угол подъема винтовой линии пружины);
- m – относительное поджатие. $m = \frac{H-H_0}{H_0}$, где H_0 – начальная, до поджатия, высота пружины;
- m_2 – предварительная закрутка пружины, в данной работе не использовались материалы с предварительно закрученными пружинами.

После ряда упрощений и разделения переменных, получаем матричные уравнения, аналогично [1–2; 14]:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial s} + (A) \cdot Y_i = 0.$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0.$$

где

$$Y_1 = Q_\xi; Y_2 = M_\chi; Y_3 = M_\rho; Y_4 = \theta;$$

$$Y_5 = \gamma; Y_6 = V; Y_7 = Q_\chi; Y_8 = Q_\rho;$$

$$Y_9 = M_\xi; Y_{10} = \varphi; Y_{11} = U; Y_{12} = W,$$

Матрица A состоит из кривизн (см. приложение) и кручений элемента тонкого бруса, жесткостей, инерционных членов и частоты. Матрица не-симметричная, что обусловлено несамосопряженностью задачи. Реализовано два варианта граничных условий: жесткая заделка с обычными для жесткой заделки граничными условиями и своеобразное шарнирное опирание.

$$M_\chi(0) = \gamma(0) = V(0) =$$

$$= M_\chi(s_0) = \gamma(s_0) = V(s_0),$$

$$Q_\chi(0) = \varphi(0) = W(0) =$$

$$= Q_\chi(s_0) = \varphi(s_0) = W(s_0).$$

Общий вид матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 Q_{\rho_0} & 0 & 0 & 0 & a\omega^2 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 \\ -r_0 & 0 & -c_3 Q_{\xi_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 & c_2 Q_{\rho_0} & 0 & a\omega^2 & 0 \\ 0 & c_1 Q_{\xi_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\omega^2 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & q_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_0 & 0 \end{bmatrix}$$

При шарнирном опирании получаем частотное биквадратное уравнение, его называем «порождающим решением» [1–2; 14]. Частотный спектр «порождающего решения» представлен на рис. 2. Порождающее решение одновременно является дискретным дисперсионным соотношением, поскольку n – номер гармоники, который жестко связан с волновым числом.

Рис. 2. Частотный спектр для «порождающего» решения $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2 = 0$.

При условии жесткой заделки частотный спектр рассчитывается отдельно для симметричных и антисимметричных колебаний. Искомая собственная частота обращает в верное тождество характеристическое и граничное уравнения. Соответственно, получаем набор частот. Для жесткой заделки построены формы колебаний.

Результаты и их обсуждение

Частотные спектры «порождающего решения» и при жесткой заделке можно сопоставить между собой. Мода с номером гармоники $n = 1$ на нижней ветви частотного спектра «порождающего» решения – основная мода пространственных продольных колебаний (рис. 2). Эта частота практически не зависит от предварительного поджатия. В частотном спектре жесткой заделки можно легко выделить данную моду, формы колебаний этой моды представлены на рис. 3.

Рис. 3. Формы колебаний основной моды пространственных продольных колебаний $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2=0, \omega/p_0 = 0.996$.

Мода с $n = 2$ на нижней ветви частотного спектра «порождающего решения – первая гармоника пространственных продольных колебаний. Мода с номером гармоники $n = 1$ на верхней ветви частотного спектра «порождающего» решения – основная мода пространственных крутильных колебаний. Формы колебаний этой моды представлены на рис. 4.

Рис. 4. Формы колебаний основной моды пространственных крутильных колебаний $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2=0, \omega/p_0 = 1.134$.

В частотном спектре жесткой заделки обнаружены «особые» частоты – парные частоты, (они же – нераспространяющиеся моды), соответствующие локальным экстремумам характеристического уравнения, в точках W11 и W21 в витке пружины укладывается полуволна, в точках W12 и W22 в витке пружины укладывается целая волна. На рис. 5 показаны «особые» частоты и их место расположения на характеристическом уравнении.

Рис. 5. «Особые» частоты и их расположение на характеристическом уравнении.

Особая частота W12 окружена парой основных мод пространственных поперечных колебаний, их частоты для длинных пружин с ростом поджатия первыми обращаются в ноль, что соответствует эйлеровской потере устойчивости. Огибающие форм колебаний этих мод по координатам W и U представляют собой полуволны, рис. 6–7. Далее от «особой» частоты W12 и выше по характеристическому уравнению на нижней ветке характеристического уравнения расположены пара первых гармоник пространственных поперечных колебаний (оглабающая по координатам W и U – волна). На рис. 8 представлены формы первой гармоники пространственных антисимметричных поперечных колебаний.

Рис. 6. Формы колебаний основной моды антисимметричных пространственных поперечных колебаний $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2=0, \omega/p_0 = 0.5338$.

Рис. 7. Формы колебаний основной моды симметричных пространственных поперечных колебаний $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2=0, \omega/p_0 = 0.5336$.

Рис. 8. Формы колебаний первой гармоники антисимметричных пространственных поперечных колебаний $i = 20, m = 0, \alpha = 6$ градусов, $m_2=0, \omega/p_0 = 1.33$.

Рис. 9. Формы колебаний основной моды симметричных пространственных «поперечных колебаний около W11» $i = 20$, $m = 0$, $\alpha = 6$ градусов, $m_2=0$, $\omega/p_0 = 13.10$.

Рис. 10. Формы колебаний основной моды антисимметричных пространственных «поперечных колебаний около W21» $i = 20$, $m = 0$, $\alpha = 6$ градусов, $m_2=0$, $\omega/p_0 = 16.08$.

Рис. 11. Формы колебаний первой гармоники симметричных пространственных «поперечных колебаний около W11» $i = 20$, $m = 0$, $\alpha = 6$ градусов, $m_2=0$, $\omega/p_0 = 12.96$.

Автор использует формы колебаний для анализа и классификации частотного спектра винтовых цилиндрических пружин. Частотный спектр винтовых цилиндрических пружин является сложным, например, для коротких пружин низшей частотой является основная частота пространственных продольных колебаний, а для длинных – пространственных поперечных колебаний. На основе изучения форм колебаний можно достаточно уверенно различать виды колебаний винтовых цилиндрических пружин.

Исследуя формы колебаний, автор обнаружил, что «особые» частоты, соответствующие локальным максимумам характеристического уравнения окружены парами мод, формы которых похожи на формы колебаний основных мод пространственных поперечных колебаний, рис. 9–10. Огибающие форм колебаний представляют собой полуволны, число узлов в формах колебаний примерно в два раза меньше, чем в формах колебаний основных классических пространственных поперечных мод. Автор назвал их «основными частотами поперечных колебаний около W11» и W21, соответственно. Дальше от «особых» частот W11 и W21 и ниже по характеристическому уравнению размещаются их первые гармоники по форме, огибающие – волны, рис. 11.

В винтовых цилиндрических пружинах возможно близкое совпадение собственных частот из различных участков частотного спектра [1–2]. Возможно, например, близкое совпадение частот основных мод пространственных продольных и пространственных поперечных колебаний. При исследовании форм колебаний обнаружена взаимная модуляция форм колебаний при близком совпадении частот. Взаимно модулируют антисимметричные формы с антисимметричными и симметричные с симметричными. Например, при близком совпадении частот основных пространственных продольных с пространственными поперечными модами в формах продольной моды появляются элементы форм поперечной моды, и наоборот. Взаимная модуляция форм доказывает неортогональность форм колебаний.

Выводы

Показано использование форм колебаний собственных мод для анализа частотного спектра и поиска новых явлений в колебаниях винтовых цилиндрических пружин. Обнаружено и продемонстрировано наличие пар мод с формами колебаний, похожими на формы основных частот пространственных поперечных колебаний, окружающих локальные максимумы характеристического уравнения, также обнаружена взаимная модуляция форм колебаний при близком совпадении собственных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук А. Д. Взаимосвязанные пространственные свободные колебания винтовых цилиндрических пружин: автореф. дис... канд. техн. наук. Ижевск, 2002. 17 с.
2. Полищук Д. Ф., Полищук А. Д. Интеграционная механика. Физико-математический полигон для численных методов решения взаимосвязанных нелинейных задач. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 86 с.
3. Mottershead J. E. Finite elements for dynamical analysis of helical rods // International Journal of Mechanical Sciences. 1980. Vol. 22. P. 267–283.
4. Yildirim V. An efficient numerical method for predicting the natural frequencies of cylindrical helical springs // International Journal of Mechanical Sciences. 1998, Vol. 41. P. 919–939.

5. Yildirim V. On the linearized disturbance dynamic equations for buckling and free vibration of cylindrical helical coil springs under combined compression and torsion // *Meccanica*, 2012. Vol. 47. P.1015–1033.
6. Yildirim V. Axial Static Load Dependence Free Vibration Analysis of Helical Springs Based on the Theory of Spatially Curved Bars // *Latin American J. of Solids and structures*, 2016. Vol. 13. P. 2852–2875.
7. Lee J. and Thompson D. J. Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical springs // *Journal of sound and vibrations*. 2001. Vol. 239. P. 237–320.
8. Lee J. Free vibration analysis of cylindrical helical springs by the pseudospectral method // *Journal of sound and vibrations*. 2007. Vol. 302. P. 185–196.
9. Becker L. E., Chassie G. G., Cleghorn W. L. (2002). On the natural frequencies of helical compression springs. *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 44. P. 825–841.
10. Yu A., Yang C. Formulation and evaluation of analytical study for cylindrical helical springs // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2010. Vol. 23. №1, P. 85–94.
11. Григорьев А. Л., Дериенко А. И. Алгебраический метод последовательной локализации и расчета свободных частот колебаний винтового цилиндрического стержня // *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2014. №39, С. 45–70.
12. Michalczyk K. Analysis of lateral vibrations of the axially loaded helical spring // *J of Theoretical and applied mechanics*, 2015. №53(3), P 745–755.
13. Товстик П. Е. Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // *Вестник ЛГУ, Математика, механика, астрономия*, 1962. Вып. №7. С. 119–134.
14. Полищук Д. Ф. Обобщенная теория цилиндрических пружин. Ижевск: изд-во Удм. ун-та, 1992. 216 с.

Поступила в редакцию 05.02.2020 г.

APPLICATION OF MODE SHAPES WITHIN FREQUENCY SPECTRUM OF CYLINDRICAL HELICAL SPRINGS

© A. D. Polishchuk

*Kalashnikov Izhevsk State Technical University
7 Studencheskaya Street, 426069 Izhevsk, Udmurt Republic, Russia.*

Phone: +7 (3412) 77 60 55.

Email: apolischuk@mail.ru

The frequency spectrum of vibrations for helical cylindrical springs is of a complex character. In the considered case, the vibrations are spatial and inter-related, that is, each mode comprises displacements along all six coordinates. The problem is not self-adjointed, frequencies are at first increased with the harmonic number, then they are decreased and increased again. Numerical methods, which are prevailing nowadays in solving the complicated boundary problems, enable analyzing the natural frequencies, but they do not give the conception of the frequency spectrum structure. The author applies natural mode shapes to analyze and classify the frequency spectrum and to search for new phenomena in vibrations of helical cylindrical springs. Mode shapes are developed in the natural system of coordinates. Mode shapes for various modes of vibrations for helical cylindrical springs are presented. The main types of oscillation modes for helical cylindrical springs are classified on the basis of the analysis of mode shapes. The shapes of basic frequencies for spatial longitudinal, torsional, and transverse vibrations and also their fundamental components are considered. Arrangement of these frequencies in the frequency spectrum of the generating solution is shown. The presence of pairs of modes with mode shapes similar to shapes of basic frequencies of spatial transverse vibrations surrounding the local maximums of the characteristic equations is revealed and demonstrated. Mutual modulation of mode shapes at close agreement of natural frequencies is revealed.

Keywords: spring vibrations, natural frequencies, mode shapes.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Polishchuk A. D. *Vzaimosvyazannye prostranstvennye svobodnye kolebaniya vintovykh tsilindricheskikh pruzhin: avtoref. dis... . kand. tekhn. nauk.* Izhevsk, 2002.
2. Polishchuk D. F., Polishchuk A. D. *Integratsionnaya mekhanika. Fiziko-matematicheskii poligon dlya chislennykh metodov resheniya vzaimosvyazannykh nelineinykh zadach [Integration Mechanics. Physico-mathematical training ground for numerical methods for solving interrelated nonlinear problems].* Moskva-Izhevsk.: Institut komp'yuternykh issledovaniy; NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2005.
3. Mottershead J. E. *International Journal of Mechanical Sciences.* 1980. Vol. 22. Pp. 267–283.
4. Yildirim V. *International Journal of Mechanical Sciences.* 1998, Vol. 41. Pp. 919–939.
5. Yildirim V. *Meccanica*, 2012. Vol. 47. P.1015–1033.
6. Yildirim V. *Latin American J. of Solids and structures*, 2016. Vol. 13. Pp. 2852–2875.
7. Lee J. and Thompson D. J. *Journal of sound and vibrations.* 2001. Vol. 239. Pp. 237–320.
8. Lee J. *Journal of sound and vibrations.* 2007. Vol. 302. Pp. 185–196.
9. Becker L. E., Chassie G. G., Cleghorn W. L. (2002). On the natural frequencies of helical compression springs. *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 44. Pp. 825–841.
10. Yu A., Yang C. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2010. Vol. 23. No. 1, Pp. 85–94.
11. Grigor'ev A. L., Derienko A. I. *Visnik NTU «KhPI».* 2014. No. 39, Pp. 45–70.
12. Michalczyk K. *J of Theoretical and applied mechanics*, 2015. No. 53(3), P 745–755.
13. Tovstik P. E. *Vestnik LGU, Matematika, mekhanika, astronomiya*, 1962. Vyp. No. 7. Pp. 119–134.
14. Polishchuk D. F. *Obobshchennaya teoriya tsilindricheskikh pruzhin [Generalized theory of cylindrical springs].* Izhevsk: izd-vo Udm. un-ta, 1992.

Received 05.02.2020.