раздел **МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА**

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.3.1

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С РЕГУЛЯРНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ВДОЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

© Н. Ф. Абузярова*, К. И. Хасанова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (927) 326 16 13.
**Email: abnatf@gmail.com*

В работе рассматриваются четная целая функция с вещественными нулями, имеющими достаточно правильное распределение. А именно, такая, для которой считающая функция последовательности ее нулей отличается от функции 2|t| на величину O(ln |t|). Для логарифма модуля соответствующей целой функции получены двусторонние оценки, которые характеризуют ее рост вдоль вещественной прямой. При этом используется интегральное представление для логарифма модуля целой функции через считающие функции ее нулей, установленное ранее в одной лемме С. Ю. Фаворова.

***Ключевые слова**: целая функция, распределение нулевого множества, проблема интерполяции, функция типа синуса.*

Введение

Целые функции, имеющие регулярное поведение вдоль вещественной оси, представляют интерес в связи с задачей интерполяции и разложения в ряды (см. [1–7] и др.)

Целая функция экспоненциального типа называется функцией типа синуса, если для нее существуют постоянные c и C, такие, что выполняется двусторонняя оценка $0 < c \le |F(z)|e^{-\pi|Imz|} \le C < \infty$ (см., например, [1–3]).

Известно, что если f – четная функция типа синуса, а $\Lambda = \{\pm\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ее нули, то (см. [8])

$$\lambda_n = n + O(\ln n), n \to \infty \qquad (1)$$

Однако, обратное не верно: из условия (1) не следует, что соответствующая функция – функция типа синуса. Это не гарантируется даже условием ([9–10]):

$$\lambda_n = n + O(1), n \to \infty$$

В настоящей работе мы изучаем поведение вдоль вещественной оси функции f с нулями $\Lambda = \{\pm\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющими соотношению *(1).*

Будет показано, что из (1) следует оценка $\ln|f(x)| = O(\ln^2|x|)$, когда $|x| \to \infty$ по множеству всех вещественных значений *x,* удаленных от Λ на конечное расстояние.

При этом используется лемма из статьи [11] и методы оценки, разработанные в статьях [12–4].

Лемма 1 (С. Ю. Фаворов [11]). *Пусть последовательность $\{a_k\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ удовлетворяет условиям:*

1. *существует предел* $\lim\limits_{R\to\infty} \sum_{0<|a_k|<R} {a_k}^{-1}$,
2. $n(0,t) = O(t)$, *при* $t \to \infty$,
3. *n(0,t+1)-n(0,t)=o(t), при t⟶∞.*

Тогда формула

$$g(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_k|<R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

корректно определяет целую функцию конечного экспоненциального типа, и для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|g(z)| = \int_0^\infty [n(0,t) - n(z,t)]\frac{1}{t}dt.$$

Здесь символом $n(z,t)$ обозначено число точек последовательности $\{a_k\}$ в круге |w-z|≤t.

Основной результат

Пусть $\Lambda = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3, \dots\}$ – четная последовательность, $0 < d_0 < \lambda_1 << \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$

$n_\Lambda(x,t)$ – число точек $\pm\lambda_k$ на отрезке $[x-t; x+t]$,

$n^+(x,t)$ – число точек $\pm\lambda_k$ в промежутке $(x; x+t]$,

$n^-(x,t)$ – число точек $\pm\lambda_k$ на отрезке $[x-t; x]$, для любых $x \epsilon \mathbb{R}, t \ge 0$

Предположим, что $n^+(0,t) = t + O(\ln t)$, $t \to \infty$

Нетрудно убедиться в том, что тогда последовательность Λ удовлетворяет условиям леммы Фаворова. Поэтому

$$f(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)\left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

– целая функция экспоненциального типа, и для всех z ∈ ℂ

$$\ln|f(z)| = \int_0^\infty [n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)]\frac{1}{t}dt. \qquad (2)$$

Теорема. *Если выполнены условия, описанные выше и* $\lambda_{k+1} - \lambda_k \ge d_0$ *при некотором положительном* d_0, *то* $|ln|f(x)|| = O(\ln^2|x|)$, *когда* $|x| \to \infty$ *по множеству*

$$\left\{x \in \mathbb{R}: dist(\Lambda, x) \ge \frac{d_0}{2}\right\}.$$

Доказательство

Так как $\lambda_1 > d_0, \lambda_{k+1} - \lambda_k > d_0$, то $n_\Lambda(0,t) = 0$ при $t < d_0$ и $n_\Lambda(x,t) = 0$ при $t < d_0$ на множестве $\left\{x \in \mathbb{R}: dist(\Lambda, x) \geq \frac{d_0}{2}\right\}$.

Достаточно провести оценки для положительных *x*. С учетом этого разобьем интеграл *(2)* на три интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt = \int_{\frac{d_0}{2}}^\infty \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt = \int_{\frac{d_0}{2}}^{Mx} \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt + \int_{Mx}^{x^2} \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt + \int_{x^2}^\infty \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $M >\max\{2, d_0\}$ – положительная постоянная.

Заметим, что

$$n_\Lambda(x,t) = n(0, x+t) - n(0, x-t) = x + t + O(\ln(x+t)) - (x-t) - O(\ln(x-t)) = 2t + O(\ln x).$$

Оценим интеграл I_1.

$$I_1 = \int_{\frac{d_0}{2}}^{Mx} \frac{n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t)}{t} dt = \int_{\frac{d_0}{2}}^{Mx} \frac{2t + O(\ln t) - 2t + O(\ln x)}{t} dt = O\left(\ln^2 t \Big|_{d_0}^{Mx}\right) + O(\ln x) \ln t \Big|_{d_0}^{Mx} = O(\ln^2 x).$$

Для оценки интегралов I_2, I_3 воспользуемся тем, что, в силу четности последовательности нулей функции *f*,

$$n_\Lambda(0,t) - n_\Lambda(x,t) = -n^+(t,x) + n^-(t,x).$$

Можем написать

$$I_2 = \int_{Mx}^{x^2} \frac{-n^+(t,x) + n^-(t,x)}{t} dt = - \int_{Mx}^{x^2} \frac{n^+(t,x)}{t} dt + \int_{(M-1)x}^{x^2-x} \frac{n^+(t,x)}{t+x} dt = \int_{Mx}^{x^2-x} n^+(t,x) \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t}\right) dt - \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{n^+(t,x)}{t} dt + \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{n^+(t,x)}{t+x} dt =$$

$$= -x \int_{Mx}^{x^2-x} \frac{x + O(\ln t)}{t(t+x)} dt - \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{x + O(\ln t)}{t} dt + \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{x + O(\ln t)}{t+x} dt = I_{21} + I_{22} + I_{23}.$$

Для первого слагаемого имеем

$$I_{21} = -x^2 \int_{Mx}^{x^2-x} \frac{1}{t(t+x)} dt - x \int_{Mx}^{x^2-x} \frac{O(\ln t)}{t(t+x)} dt.$$

При этом

$$-x^2 \int_{Mx}^{x^2-x} \frac{1}{t(t+x)} dt = O(1) - x \ln\left(1 + \frac{1}{M}\right),$$

$$-x \int_{Mx}^{x^2-x} \frac{O(\ln t)}{t(t+x)} dt = -xO(\ln x^2)\left(\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{M}{M+1}\right)\right) = O(\ln x^2).$$

Оценим I_{22}:

$$I_{22} = - \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{x + O(\ln t)}{t} dt = - \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{x}{t} dt - O\left(\int_{x^2-x}^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt\right) = x \ln \frac{x^2 - x}{x^2} - O\left(\frac{\ln^2 x^2}{2} - \frac{\ln^2(x^2 - x)}{2}\right) = O(1), |x| \to \infty.$$

Далее, для последнего слагаемого выводим оценку:

$$I_{23} = \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{x + O(\ln t)}{t+x} dt = \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{x}{t+x} dt + \int_{(M-1)x}^{Mx} \frac{O(\ln t)}{t+x} dt = x \ln\left(1 + \frac{1}{M}\right) + O(\ln x)$$

Для второго интеграла в *(2)* окончательно получаем

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} = O(1) - x \ln\left(1 + \frac{1}{M}\right) + O(\ln x \quad) + O(1) + x \ln\left(1 + \frac{1}{M}\right) + O(\ln x) = O(\ln x).$$

$$I_3 = - \int_{x^2}^\infty \frac{n^+(t,x)}{t} dt + \int_{x^2-x}^\infty \frac{n^+(t,x)}{t+x} dt = \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{n^+(t,x)}{t+x} dt - \int_{x^2}^\infty n^+(t,x) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = \int_{x^2-x}^{x^2} \frac{x + O(\ln t)}{t+x} dt - \int_{x^2}^\infty \frac{xn^+(t,x)}{t(t+x)} dt =$$

$$= O(1) - x\int\limits_{x^2}^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt - \int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{xO(\ln t)}{t(t+x)}dt =$$

$$= O(1) - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + O\left(\int\limits_{x^2}^{\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{t^2}dt\right) = O(1),$$

$$|x| \to \infty$$

Из оценок интегралов I_1, I_2, I_3, с учетом представления (2), выводим требуемое соотношение для $|ln|f(x)||$.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Целые функции (курс лекций) // М.: МГУ, 1971. 124 с.
2. Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа // Сб. «Математическая физика и функциональный анализ», ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136–146.
3. Левин Б. Я., Любарский Ю.И. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа и ее приложения к разложениям в ряды по экспонентам // Функциональный анализ и его приложения.1975. Т. 8. №2. С. 85–86.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций // М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
5. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент // М.: Наука, 1983. 176 с.
6. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент // М.: Наука, 1976. 536 с.
7. Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент // М.: Наука, 1981.
8. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов исвязанные с нею разложения в ряды экспонент // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1975. Т. 39. №3. С. 657–702.
9. Левин Б. Я., Островский И. В. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // Известия АН СССР. Сер. Математика. 1979. Т. 43. №1. С. 87–110.
10. Хейфиц А.И. Характеристика нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени // Теор. функций, функцион. анализ и их прилож. 1969. Вып. 9. С. 3–13.
11. Фаворов С. Ю. Множества нулей целых функций экспоненциального типа с дополнительными условиями на вещественной прямой // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. №1. С. 138–145.
12. Абузярова Н. Ф. Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре Шварца // Доклады РАН. 2019. Т. 484. №1. С. 7–11.
13. Абузярова Н. Ф., Шустов В.С. Об условиях обратимости по Эренпрайсу // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23. №3. С. 590–598.
14. Абузярова Н. Ф. О сдвигах целочисленной последовательности, порождающие функции, обратимые по Эренпрайсу // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. Т. 480. С. 5–25.

Поступила в редакцию 19.07.2020 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.3.1

ENTIRE FUNCTIONS WITH REGULAR BEHAVIOR ALONG THE REAL LINE

© N. F. Abuzyarova*, K. I. Khasanova

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (927) 326 16 13.
**Email: abnatf@gmail.com*

In this paper, the authors consider an even entire function with real zeros having quite regular distribution. Namely, it is assumed that the difference between the counting function of its zeros and the function 2|t| is the quantity estimated by O(ln |t|). This condition is a necessary one for the entire function to be sine-type function. However, it is not sufficient one. Nevertheless, one can deduce a certain regularity of the behavior for the corresponding entire function along the real line. The entire functions having regular behavior along the real line are important tool in solving the interpolation problems and their duals. For the logarithm of the modulus of the entire function, the authors obtain two-sided estimates characterizing its growth along the real line. For this purpose, the lemma of S. Yu. Favorov was applied. This lemma provides the representation of the logarithm of the modulus of the entire function as an integral of counting functions of its zeros. By estimating the different parts of this integral, the authors got the required inequalities for the logarithm of the modulus of the entire function. The method based on the using of the Favorov's lemma can be developed and applied for more complicate and detailed studying of the behavior of the entire functions.

Keywords: entire function, distribution of the zero set, interpolation problem, sine-type function, counting function of the sequence of zeros.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Levin B. Ya. Tselye funktsii (kurs lektsii) [Entire functions (lectures)]. Moscow: MGU, 1971.
2. Levin B. Ya. Sb. «Matematicheskaya fizika i funktsional'nyi analiz», FTINT AN USSR. 1969. No. 1. Pp. 136–146.
3. Levin B. Ya., Lyubarskii Yu.I. Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya.1975. Vol. 8. No. 2. Pp. 85–86.
4. Levin B. Ya. Raspredelenie kornei tselykh funktsii [Distribution of roots of entire functions]. Moscow: Gostekhizdat, 1956.
5. Leont'ev A.F. Tselye funktsii. Ryady eksponent [Entire function. Exponential series]. Moscow: Nauka, 1983.
6. Leont'ev A. F. Ryady eksponent. Moscow: Nauka, 1976.
7. Leont'ev A. F. Obobschenie ryadov eksponent [Generalizations of exponential series]. Moscow: Nauka, 1981.
8. Levin B. Ya., Lyubarskii Yu. I. Izvestiya AN SSSR. Ser. Matematika. 1975. Vol. 39. No. 3. Pp. 657–702.
9. Levin B. Ya., Ostrovskii I. V. Izvestiya AN SSSR. Ser. Matematika. 1979. Vol. 43. No. 1. Pp. 87–110.
10. Kheifits A.I. Teor. funktsii, funktsion. analiz i ikh prilozh. 1969. No. 9. Pp. 3–13.
11. Favorov S. Yu. Algebra i analiz. 2008. Vol. 20. No. 1. Pp. 138–145.
12. Abuzyarova N. F. Doklady RAN. 2019. Vol. 484. No. 1. Pp. 7–11.
13. Abuzyarova N. F., Shustov V.S. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2018. Vol. 23. No. 3. Pp. 590–598.
14. Abuzyarova N. F. Zapiski nauchnykh seminarov POMI. 2019. Vol. 480. Pp. 5–25.

Received 19.07.2020.