

УДК 532.516.5

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ЭКСЦЕНТРИЧНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

© П. В. Кауров

Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна
Россия, 198095 г. Санкт-Петербург, ул. И. Черных, 4.

Тел.: +7 (812) 786 52 69.

Email: pusto@mail.ru

Рассматривается задача о ламинарном течении вязкой жидкости в плоском зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами. Движение жидкости в зазоре создается за счет вращения внутреннего цилиндра вокруг центра неподвижного внешнего цилиндра. Решение уравнений Стокса относительно функции тока получено с применением биполярных координат при переменных значениях граничных условий задачи. Приведены примеры рассчитанной функции тока для различных относительных размеров и положений внутреннего цилиндра. Установлено, что линии тока жидкости близки к окружностям и что при увеличении относительного эксцентриситета возникает обратный ток жидкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, функция тока, биполярные координаты, эксцентричные цилиндры.

Введение

При рассмотрении вопросов течения несжимаемой вязкой жидкости в плоских зазорах, как известно, используются уравнения Стокса [1–2], которые, совместно с уравнением неразрывности, в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} Re \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ Re \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где безразмерные величины связаны с размерными следующими зависимостями (штрихом сверху обозначены размерные величины): Re – число Рейнольдса, $Re = UL'/\nu$; U' – скорость подвижной границы зазора, L' – длина зазора, ν – кинематический коэффициент вязкости, p – безразмерное гидродинамическое давление, $p = p'/(\rho U'^2)$, ρ' – плотность жидкости, x – относительная продольная координата, $x = x'/L'$; u – безразмерная продольная скорость жидкости, $u = u'/U'$; y – относительная поперечная координата, $y = y'/L'$; v – безразмерная поперечная скорость жидкости, $v = v'/U'$.

В [2–4] для течения жидкости в зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами получено решение системы уравнений Стокса (1) с применением биполярных координат для случая вращения внутреннего цилиндра вокруг своей оси. Случай вращения внешнего цилиндра и комбинация этих случаев рассмотрены в [4–5]. Решение уравнений Стокса при поступательном движении внутреннего цилиндра приведено в [2; 6–7].

В настоящей работе рассматривается случай течения жидкости в зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами, когда внутренний цилиндр вращается вокруг центра неподвижного внешнего цилиндра.

Основные геометрические и кинематические соотношения

На рис. 1 показан внутренний цилиндр, имеющий радиус R'_1 , вращающийся с угловой скоростью ω' вокруг центра O_2 неподвижного внешнего цилиндра, имеющего радиус R'_2 , причем центр O_1 внутреннего цилиндра смещен относительно центра O_2 на величину e' .

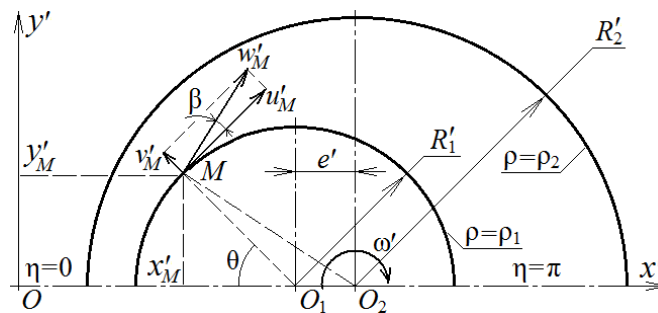


Рис. 1. Геометрия и кинематика задачи.

Внешний цилиндр неподвижен, поэтому на его внутренней поверхности скорость жидкости равна нулю. Для абсолютной скорости w' произвольной точки M на внешней поверхности внутреннего цилиндра запишем следующие соотношения:

$$w'_M \perp O_2M, \\ w'_M = \omega' O_2M, \\ w_M = \frac{w'_M}{\omega' R'_1} = \frac{O_2M}{R'_1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2},$$

где ε – безразмерный параметр задачи, $\varepsilon = e'/R'_1$.

Разложим скорость w_M на нормальную v_M и касательную u_M составляющие:

$$v_M = \frac{v'_M}{\omega' R'_1} = w_M \sin \beta = \frac{O_2M}{R'_1} \sin \beta = \varepsilon \sin \theta, \\ u_M = \frac{u'_M}{\omega' R'_1} = w_M \cos \beta = \frac{O_2M}{R'_1} \cos \beta = 1 + \varepsilon \cos \theta.$$

Биполярные координаты

Система из двух эксцентричных цилиндров (рис. 1), располагается в прямоугольной системе координат $(x'; y')$ таким образом, что центр O_1 внутреннего цилиндра смещен от начала координат O на расстояние, равное: $OO_1 = \cosh \rho_1$. Безразмерные биполярные координаты $(\eta; \rho)$ связаны с прямоугольными координатами $(x'; y')$ зависимостями:

$$\frac{\sinh \rho_1 \sinh \rho}{\cosh \rho + \cos \eta} = \frac{x'}{R'_1}, \\ \frac{\sinh \rho_1 \sin \eta}{\cosh \rho + \cos \eta} = \frac{y'}{R'_1},$$

где координата η меняется от 0 до π , а координата ρ меняется от значения ρ_2 для внешнего цилиндра до значения ρ_1 для внутреннего, определяемых из выражений:

$$\cosh \rho_2 = \frac{\varepsilon + 2\alpha + \varepsilon\alpha^2}{2\varepsilon\alpha + 2}, \\ \sinh \rho_1 = (1 + \varepsilon\alpha) \sinh \rho_2.$$

где α – безразмерный параметр задачи, $\alpha = (R'_2 - R'_1)/e'$.

Для точки M на поверхности внутреннего цилиндра имеем:

$$\sin \theta = \frac{y'_M}{R'_1} = \frac{\sinh \rho_1 \sin \eta}{\cosh \rho_1 + \cos \eta}, \\ \cos \theta = \frac{OO_1 - x'_M}{R'_1} = \frac{1 + \cosh \rho_1 \cos \eta}{\cosh \rho_1 + \cos \eta},$$

тогда выражения для нормальной и касательной составляющих скорости точки M примут вид:

$$v_M = \varepsilon \frac{\sinh \rho_1 \sin \eta}{\cosh \rho_1 + \cos \eta}, \\ u_M = 1 + \varepsilon \frac{1 + \cosh \rho_1 \cos \eta}{\cosh \rho_1 + \cos \eta}.$$

При $\eta = 0$ имеем: $v_M = 0$, $u_M = w_M = w_{max} = 1 + \varepsilon$, тогда скорости точек на поверхности внутреннего цилиндра в биполярных координатах будут равны:

$$v(\eta, \rho_1) = \frac{v_M}{w_{max}} = \frac{-\varepsilon \sinh \rho_1 \sin \eta}{(1 + \varepsilon)(\cosh \rho_1 + \cos \eta)}, \\ u(\eta, \rho_1) = \frac{u_M}{w_{max}} = 1 + \frac{\varepsilon(1 - \cosh \rho_1)(1 - \cos \eta)}{(1 + \varepsilon)(\cosh \rho_1 + \cos \eta)}.$$

Для возможности проведения дальнейших преобразований представим правые части выражений для продольной $u(\eta, \rho_1)$ и поперечной $v(\eta, \rho_1)$ скоростей периодическими функциями, для чего разложим их в ряд Фурье следующим образом:

$$u(\eta, \rho_1) = 1 + A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos k\eta, \\ A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(\eta, \rho_1) d\eta - 1, \\ A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(\eta, \rho_1) \cos k\eta d\eta, \\ v(\eta, \rho_1) = \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin k\eta, \\ B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(\eta, \rho_1) \sin k\eta d\eta.$$

Решение уравнений Стокса в биполярных координатах

Если в системе уравнения Стокса (1) положить для данной задачи следующие соотношения: $U' = (1 + \varepsilon)\omega R'_1$, $L' = \pi R'_1$ и ввести в рассмотрение безразмерную функцию тока $\varphi = \varphi'/[\omega R'_1(1 + \varepsilon)\pi R'_1]$, такую, что: $u' = \partial\varphi'/\partial y'$, $v' = -\partial\varphi'/\partial x'$, то система уравнений (1) преобразуется [1–4; 9] в уравнение:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^2 \partial \rho^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \rho^4} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \Phi(\eta, \rho) = 0,$$

где $\Phi(\eta, \rho)$ – безразмерная функция тока в биполярных координатах, равная [8]:

$$\Phi(\eta, \rho) = \varphi \frac{\cosh \rho + \cos \eta}{\sinh \rho_1} = \\ = \Phi_0(\rho) + \Phi_1(\rho) \cos \eta + \sum_{k=2}^{k=n} \Phi_k(\rho) \cos k\eta,$$

$$(\rho) = C_{0,1} \sinh \rho + C_{0,2} \cosh \rho + \\ + C_{0,3} \rho \sinh \rho + C_{0,4} \rho \cosh \rho,$$

$$\Phi_1(\rho) = C_{1,1} + C_{1,2} \rho + C_{1,3} \sinh 2\rho + C_{1,4} \cosh 2\rho,$$

$$\Phi_k(\rho) = \sum_{k=1}^{k=n} [C_{k,1} \cosh(k+1)\rho + C_{k,2} \cosh(k-1)\rho + \\ + C_{k,3} \sinh(k+1)\rho + C_{k,4} \sinh(k-1)\rho],$$

где $C_{i,j}$ – постоянные интегрирования, подлежащие определению.

Выражения для безразмерных продольной u и поперечной v скоростей жидкости в биполярных координатах имеют вид [2–3]:

$$u(\eta, \rho) = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\Phi \sinh \rho}{\cosh \rho + \cos \eta}, \\ v(\eta, \rho) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\Phi \sin \eta}{\cosh \rho + \cos \eta},$$

тогда граничные условия на внутренней поверхности внешнего цилиндра запишем в виде: $\Phi(\eta, \rho_2) = 0$, $u(\eta, \rho_2) = 0$, $v(\eta, \rho_2) = 0$, т.е. при $\rho = \rho_2$ для $k = 0 \dots n$: $\Phi_k = 0$ и $\partial\Phi_k/\partial\rho = 0$.

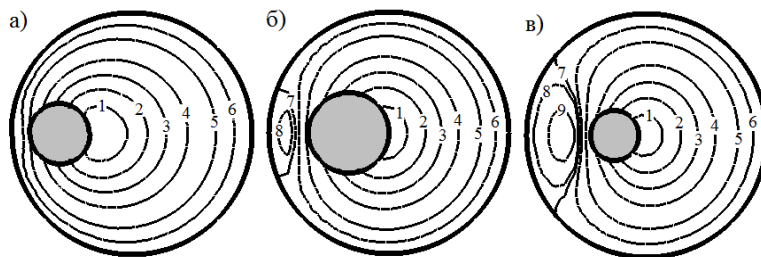


Рис. 2. Линии относительного тока жидкости φ/φ_{max} в зависимости от значений безразмерных параметров задачи: а) $\alpha=1.25$ и $\varepsilon=2.4$; б) $\alpha=2$ и $\varepsilon=1$; в) $\alpha=3$ и $\varepsilon=1.33$ при: 1 – $\varphi/\varphi_{max}=0.9$; 2 – $\varphi/\varphi_{max}=0.7$; 3 – $\varphi/\varphi_{max}=0.5$; 4 – $\varphi/\varphi_{max}=0.3$; 5 – $\varphi/\varphi_{max}=0.1$; 6 – $\varphi/\varphi_{max}=0.025$; 7 – $\varphi/\varphi_{max}=0$; 8 – $\varphi/\varphi_{max}=-0.01$; 9 – $\varphi/\varphi_{max}=-0.05$.

На поверхности внутреннего цилиндра имеем:

$$\Phi(\eta, \rho_1) = -Q(\eta) [\cosh \rho + \cos \eta] / \sinh \rho_1,$$

$$u(\eta, \rho_1) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right|_{\rho_1} + Q(\eta) = 1 + A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos k\eta,$$

$$v(\eta, \rho_1) = \left. \frac{-\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_{\rho_1} + Q(\eta) \frac{\sin \eta}{\sinh \rho_1} = \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin k\eta,$$

где $Q(\eta)$ – безразмерный расход жидкости

$$Q(\eta) = \frac{Q'(\eta)}{\omega' R'_1 (1 + \varepsilon) \pi R'_1} = Q_0 + \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \cos k\eta.$$

При раскрытии сумм в выражениях для граничных условий, используя формулы: $\cos k\eta \cos \eta = 0.5[\cos(k-1)\eta + \cos(k+1)\eta]$, $\sin \eta \cos k\eta = 0.5[\sin(k+1)\eta - \sin(k-1)\eta]$, и приравнявая коэффициенты перед косинусами и синусами с одинаковыми аргументами, получим системы линейных алгебраических уравнений, из которой находятся значения постоянных интегрирования C_{ij} и коэффициентов Q_0 и Q_k .

На внешней поверхности внутреннего цилиндра безразмерная функция тока φ принимает максимальное положительное значение:

$$\varphi_{max} = \Phi(\pi, \rho_1) \frac{\sinh \rho_1}{\cosh \rho_1 - 1}.$$

На рис. 2 показаны зависимости функции тока в виде линий равного уровня φ/φ_{max} при различных значениях безразмерных параметров задачи α и ε .

По данным рис. 2 видно, что линии тока жидкости близки к окружностям и что при увеличении относительного эксцентриситета возникает обратный ток жидкости.

Выводы

Таким образом, получено решение уравнений Стокса с применением биполярных координат для течения жидкости в плоском зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами для случая, когда внутренний цилиндр вращается вокруг центра неподвижного внешнего цилиндра и приведены зависимости функции тока для различных относительных размеров и положений внутреннего цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Гидродинамическая теория смазки. М.: ГТТИ, 1934. 576 с.
2. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. М.: Машиз, 1959. 403 с.
3. Жуковский Н. Е., Чаплыгин С. А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Тр. Отделения физ. наук общества любителей естествознания. 1906. Т. 1. №13. С. 24–33.
4. Ballal B. Y., Rivlin R. S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1976. Vol. 62. №3. Pp. 237–294.
5. Петров А. Г. О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 741–758.
6. Казакова А. О., Петров А. Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. №3. С. 16–25.
7. Казакова А. О. Численное моделирование поступательно-го движения цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Научно-технический вестник Поволжья. 2018. №4. С. 105–108.
8. Петров А. Г., Казакова А. О. Расчет течения вязкой жидкости между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. №59(6). С. 1063–1082.
9. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 232 с.

Поступила в редакцию 27.08.2020 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2

SOLUTION OF STOKES EQUATIONS FOR FLUID FLOW IN A GAP BETWEEN TWO EXCENTRIC CYLINDERS

© P. V. Kaurov

*Saint Petersburg State University of Industrial Technology and Design
4 Ivan Chernykh Street, 198095 Saint Petersburg, Russia.*

Phone: +7 (812) 786 52 69.

Email: pucmo@mail.ru

The problem of the laminar flow of a viscous fluid in a flat gap between two eccentric cylinders is considered. The movement of fluid in the gap is created by rotating the inner cylinder around the center of the stationary outer cylinder. The solution of the Stokes equations with respect to the stream function was obtained using bipolar coordinates at variable values of the boundary conditions of the problem. Expressions are obtained for the normal and tangential components of the velocity of arbitrary points on the outer surface of the inner cylinder depending on the dimensionless parameters of the problem. To make it possible to carry out transformations in bipolar coordinates, expressions for longitudinal velocity and transverse velocity are represented by periodic functions by expanding them into series. The change in the values of the dimensionless stream function on the outer surface of the inner cylinder is determined depending on the dimensionless parameters of the problem. Examples of the calculated stream function for various dimensionless sizes and positions of the inner cylinder are given. It is determined that the lines of relative current when the fluid moves in a flat gap between two eccentric cylinders are close to circles. It is also determined that with an increase in the dimensionless parameter of the problem, the process of reverse flow of the liquid begins. The value of the maximum value of the dimensionless stream function is calculated for various dimensionless sizes and positions of the inner cylinder.

Keywords: viscous fluid, stream function, bipolar coordinates, eccentric cylinders.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Leibenzon L. S. *Gidrodinamicheskaya teoriya smazki* [Hydrodynamic theory of lubrication]. Moscow: GTTI, 1934.
2. Korovchinskii M. V. *Teoreticheskie osnovy raboty podshipnikov skol'zheniya* [Theoretical basis for operation of plain bearings]. Moscow: Mashgiz, 1959.
3. Zhukovskii N. E., Chaplygin S. A. *Tr. Otdeleniya fiz. nauk obshchestva lyubitelei estestvoznaniya*. 1906. Vol. 1. No. 13. Pp. 24–33.
4. Ballal B. Y., Rivlin R. S. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1976. Vol. 62. No. 3. Pp. 237–294.
5. Petrov A. G. *PMM*. 2008. Vol. 72. No. 5. Pp. 741–758.
6. Kazakova A. O., Petrov A. G. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 2016. No. 3. Pp. 16–25.
7. Kazakova A. O. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya*. 2018. No. 4. Pp. 105–108.
8. Petrov A. G., Kazakova A. O. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2019. No. 59(6). Pp. 1063–1082.
9. Uflyand Ya. S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti* [Bipolar coordinates in elasticity theory]. M.-L.: GITTL, 1950.

Received 27.08.2020.