

УДК 532.5

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.4.1

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ИНДИКАТОРНОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЕ

© А. М. Ильясов^{1*}, В. Н. Киреев²

¹Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, Республика Башкортостан, 450000 г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12.

²Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

*Email: amilyasov67@gmail.com

Построены простые математические модели стационарного ламинарного и квазистационарного турбулентного режимов течения индикаторной (трассерной) жидкости в магистральной вертикальной трещине. Получены точные решения соответствующих систем уравнений для полей скорости и давления при ламинарно-турбулентном течении в трещине. Решения для полей скорости и давления в ламинарном потоке выражаются через элементарные функции. Для турбулентного потока соответствующие поля выражаются в квадратурах в параметрическом виде, где параметром является отношение ускорения потока к его скорости. Время выхода трассера в обоих режимах течения пропорционально разности арктангенсов.

Ключевые слова: водоизоляция трещин, индикаторный метод, ламинарное и турбулентное течение, точные решения.

Введение

Наличие в продуктивном пласте магистральных трещин, образовавшихся в результате применения технологии гидроразрыва пласта или слияния естественных трещин, существенно влияет на распределение фильтрационных потоков закачиваемой в пласт воды и как следствие увеличивается обводненность продукции добывающих скважин.

При разработке нефтяных месторождений для исследования фильтрационных потоков между скважинами широко применяется индикаторный (трассерный) метод, основанный на использовании меченых частиц [1–6]. С помощью индикаторных исследований между нагнетательными и добывающими скважинами может быть обнаружена гидродинамическая связь. Также можно оценить объем магистральных трещин, который является критически важным параметром при разработке дизайна мероприятий по водоизоляции магистральных трещин [7], измеряя время течения индикаторной жидкости от нагнетающей до добывающей скважины.

Использование численных моделей стало стандартным методом интерпретации трассерных исследований [8–12]. В работе [13] численно моделировалось нестационарное течение индикаторной жидкости в вертикальной магистральной трещине с использованием алгоритма SIMPLE [14].

В данной работе в одномерной стационарной постановке аналитически решена задача о течении индикаторной жидкости в магистральной трещине при наличии ламинарно-турбулентного перехода.

Приведены результаты расчетов по полученным точным решениям.

Математическая модель

Рассмотрим прямоугольный участок однородного пласта с нагнетательной и добывающей скважинами, забои которых соединены вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины, высота которой равна толщине пласта (рис. 1). Контурное давление, давление на забое нагнетательной скважины и давление на забое добывающей скважины считаются постоянными.

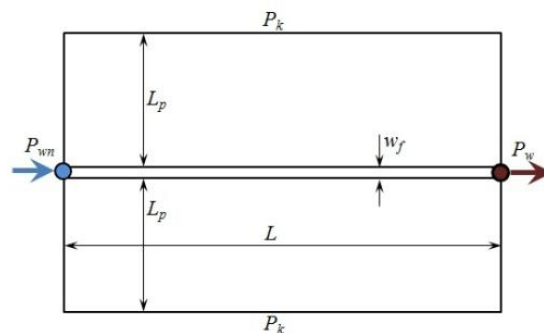


Рис. 1. Расчетная область.

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в трещине гидроразрыва описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности и уравнения движения:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\frac{2u_L}{w_f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{(1-m)C_w v^2}{w_f}, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости; v и p – средние по поперечному сечению трещины скорость течения и давление; w_f – ширина трещины; m – просветность стенок трещины; x – пространственная координата.

Заметим, что уравнения (1) и (2) записаны в предположении, что ширина и высота трещины много меньше ее длины, а ширина трещины много меньше ее высоты.

Скорость утечки жидкости через стенки трещины в правой части уравнения (1) определяется из закона Дарси:

$$u_L = \frac{k}{\mu} \frac{(p - p_k)}{L_p} \quad (3)$$

где μ – вязкость жидкости; k – проницаемость пласта; p_k – контурное давление; L_p – расстояние между трещиной и границами пласта.

В зависимости от режима течения в трещине коэффициент трения C_w в правой части уравнения (2) вычисляется по формулам [15]:

$$C_w = \begin{cases} \frac{24}{Re}, & \text{при } Re < Re_* \\ \frac{0.08701}{Re^{0.25}}, & \text{при } Re \geq Re_* \end{cases} \quad (4)$$

где $Re_* = 2000$ – критическое число Рейнольдса,

$$Re = \frac{2\rho v w_f}{\mu} \text{ – число Рейнольдса потока.}$$

Сравним в уравнении (2) второе слагаемое в левой части с первым слагаемым в правой части. Очевидно, что конвективным слагаемым можно пренебречь, если выполняется неравенство

$$v^2 \ll \frac{p_*}{\rho} = \frac{(p_{wn} - p_w)}{\rho} \quad (5)$$

где p_* – характерное давление в трещине.

Обычно время T течения трассера по трещине между скважинами составляет от двух часов до месяца. Полагая характерные параметры $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $p_{wn} - p_w = 10^3 \text{ Па}$, $L = 100 \text{ м}$, $T = 7200 \text{ с}$ получим характерную скорость течения индикаторной жидкости:

$$v = \frac{L}{T} = \frac{100}{7200} \approx 0.014 \text{ м/с}$$

Для больших времен течения трассера эта скорость будет еще меньше. Подставляя характерные параметры в формулу (5), получим оценку

$$2 \cdot 10^{-4} \approx 10^4$$

т.е., инерционным слагаемым в уравнении (2) можно пренебречь.

Таким образом, систему уравнений (1)–(2) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2k(p - p_k)}{w_f \mu L_p} \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho C_w v^2}{w_f} \quad (7)$$

Граничные условия для системы уравнений (6)–(7) имеют вид:

$$p(0) = p_{wn}, \quad p(L) = p_w \quad (8)$$

где L – длина трещины.

Предположим, что в некоторой точке $x = x_*$ осуществляется ламинарно-турбулентный переход, т.е. ламинарный поток в трещине реализуется в области $0 \leq x \leq x_*$, а турбулентное течение – в области $x_* \leq x \leq L$.

Аналитическое решение для ламинарной области потока

Скорость течения в ламинарной области потока описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - D_1^2 v = 0, \quad D_1 = \frac{2}{w_f} \sqrt{\frac{6k}{w_f L_p}} \quad (9)$$

которое получено подстановкой давления из уравнения (6) и первого из замыкающих соотношений (4) в уравнение (7).

Аналитическое решение уравнения (9) с граничными условиями

$$v'(0) = \frac{2k(p_k - p_{wn})}{w_f \mu L_p}, \quad v(x_* - 0) = v_* \quad (10)$$

выражается формулой:

$$v(x) = C_1 e^{D_1 x} + C_2 e^{-D_1 x}, \quad 0 \leq x \leq x_* \quad (11)$$

Где

$$C_2 = \frac{D_1 v_* - z_1 e^{D_1 x_*}}{2D_1 \operatorname{ch}(D_1 x_*)}, \quad C_1 = C_2 + \frac{z_1}{D_1}, \quad D_2 = \mu \sqrt{\frac{6L_p}{kw_f}}, \quad v_* = \frac{\mu Re_*}{2\rho w_f} \quad (12)$$

Заметим, что при записи выражений (12) было использовано обозначение $z_1 \equiv v'(0)$.

Распределение давления в ламинарной области имеет вид:

$$p(x) = p_k - D_2 (C_1 e^{D_1 x} - C_2 e^{-D_1 x}) \quad (13)$$

Время течения трассера в ламинарном режиме может быть вычислено по формуле:

$$T_1 = \frac{1}{D_1 \sqrt{C_1 C_2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} e^{D_1 x_*} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \right) \right] \quad (14)$$

Аналитическое решение для турбулентной области потока

Скорость течения в турбулентной области потока описывается нелинейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - B_1 v^{7/4} = 0, \quad B_1 = \frac{0,17402(1-m)\rho^{3/4}k}{2^{1/4}w_f^{9/4}\mu^{3/4}L_p} \quad (15)$$

Граничные условия для уравнения (15) имеют вид:

$$v(x_* + 0) = v_*, \quad v'(L) = \frac{2k(p_k - p_w)}{w_f \mu L_p} \quad (16)$$

Введем новую функцию $z(v) = dv/dx$. Как следует из определения ускорения, для одномерных установившихся течений этот параметр представляет собой отношение ускорения потока к скорости потока $z = a/v$. Тогда общее решение уравнения (15) имеет вид:

$$v(z) = \left(\frac{11}{8B_1} z^2 + C \right)^{4/11}, \quad z \in [z_*, z_2] \quad (17)$$

где $z_* = dv/dx|_{x=x_*}$, C – произвольная постоянная.

Из уравнения (6) легко видеть, что в турбулентной области давление в трещине зависит от переменной z линейным образом:

$$p(z) = p_k - \frac{w_f \mu L_p}{2k} z, \quad z \in [z_*, z_2] \quad (18)$$

Зависимость между пространственной координатой x и переменной z записывается в виде:

$$x(z) - x_* = \frac{1}{B_1} \int_{z_*}^z \left(\frac{11}{8B_1} \eta^2 + C \right)^{-7/11} d\eta, \quad z \in [z_*, z_2] \quad (19)$$

Время течения трассера в турбулентном режиме течения определяется по формуле:

$$T_2 = \sqrt{\frac{8}{11CB_1}} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{11}{8CB_1}} z_2 \right) - \arctg \left(\sqrt{\frac{11}{8CB_1}} z_* \right) \right] \quad (20)$$

«Сшивка» решений

Теперь выполним «сшивку» полученных решений в критическом сечении. Дополнительно к условию равенства скорости потока критической скорости в этом сечении должно выполняться динамическое граничное условие равенства давлений. То есть, должны выполняться условия

$$v(x_* + 0) = v_*, \quad p(x_* - 0) = p(x_* + 0) \quad (21)$$

Решения (11), (13), (17)–(19), а также граничные условия (16) и (21) приводят к следующим выражениям для параметра z_* , константы C в критиче-

ском сечении и трансцендентному уравнению для определения координаты x_* критического сечения:

$$L - x_* = \frac{1}{B_1} \int_{z_*}^z \left(\frac{11}{8B_1} \eta^2 + C \right)^{-7/11} d\eta \quad (22)$$

где

$$z_* = D_1(C_1 e^{D_1 x_*} - C_2 e^{-D_1 x_*}), \quad C = v_*^{11/4} - \frac{11}{8B_1} z_*^2$$

Интеграл в формуле (22) находится численно, поскольку он представляет собой неинтегрируемый случай дифференциального бинома.

Таким образом, решение задачи о ламинарно-турбулентном установившемся течении индикаторной жидкости в трещине гидроразрыва с проницаемыми границами определяется формулами (11)–(14), (17), (18), (20) и (22). Время течения трассерной жидкости в трещине равно $T = T_1 + T_2$.

Полученные решения можно использовать для оценки объема магистральной трещины (эффективной ширины трещины) по времени течения трассера от нагнетающей до добывающей скважины в результате серии прямых расчетов и построения зависимостей $T = T(w_f)$ при остальных фиксированных параметрах модели.

Результаты численного моделирования

На рис. 2 показана скорость течения индикаторной жидкости по длине трещины. Горизонтальная линия на рисунке соответствует критической скорости ламинарно-турбулентного перехода $v_* = 1,05$ м/с, вычисленной исходя из критического числа Рейнольдса $Re_* = 2000$. Режим закачки на нагнетательной скважине выбран таким образом, чтобы реализовался ламинарный режим течения. При движении жидкости по трещине ее скорость сначала уменьшается за счет протекания жидкости из трещины в пласт. Давление по длине трещины уменьшается и когда пластовое давление превышает давление в трещине начинается приток жидкости из пласта и скорость начинает увеличиваться. На некотором расстоянии от нагнетательной скважины скорость жидкости достигает критической скорости v_* и происходит переход к турбулентному режиму течения. Если после критической точки продолжить использование ламинарной модели, то на добывающей скважине будет получено завышенное почти на 15% значение скорости по сравнению с расчетом по ламинарно-турбулентной модели.

Для практических применений наиболее важной характеристикой является время выхода трассера (рис. 3). Видно, что для трещин малой ширины (до ширин порядка 0.7–0.8 мм) ламинарная и ламинарно-турбулентная модели дают близкие значения времени выхода трассера. В этом случае ламинарно-турбулентный переход в трещине происходит в непосредственной близости от добывающей скважины,

и практически по всей длине трещины будет наблюдаться ламинарный режим течения.

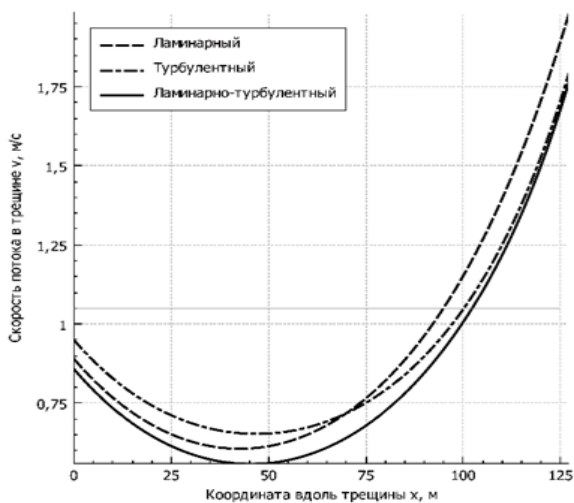


Рис. 2. Изменение скорости течения индикаторной жидкости по длине трещины при использовании различных моделей.

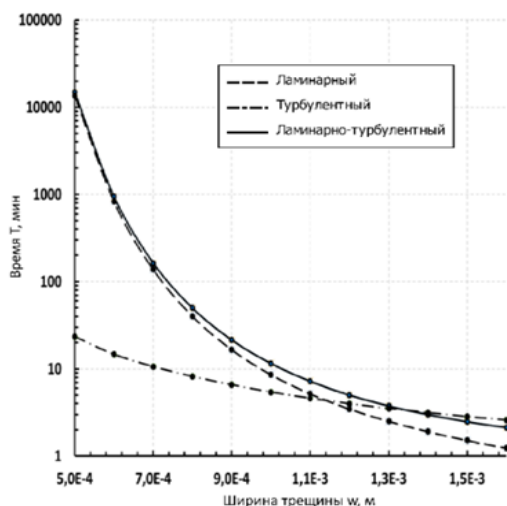


Рис. 3. Зависимость расчетного времени выхода трассера от ширины трещины при использовании различных моделей.

В случае, если ширина трещины больше 1 мм разница между расчетными временами выхода трассера по различным моделям существенно возрастает. В частности, для трещины шириной 1.6 мм расчет по ламинарной модели дает время выхода трассера почти в два раза меньше, чем по ламинарно-турбулентной модели.

Влияние проницаемости пласта на скорость течения индикаторной жидкости показано на рис. 4. Если трещина проходит в низкопроницаемом пласте ($k = 0.1$ Д), то течение в ней остается ламинарным по всей длине. При больших проницаемостях пласта ($k = 0.5$ и 1 Д) ламинарное течение в трещине переходит в турбулентное за счет дополнительного притока жидкости в трещину из пласта (сплошная и штрихпунктирная кривые).

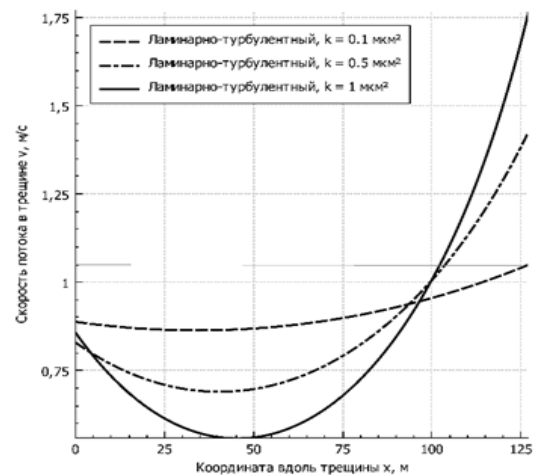


Рис. 4. Изменение скорости течения индикаторной жидкости по длине трещины при различных проницаемостях пласта.

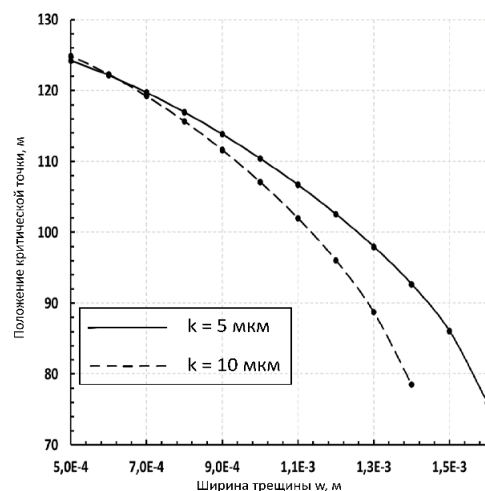


Рис. 5. Координата критической точки в зависимости от ширины трещины при различных проницаемостях пласта.

Положение критической точки, в которой режим течения изменяется с ламинарного на турбулентный, в зависимости от ширины трещины при различных проницаемостях пласта показано на рис. 5. Из рисунка видно, что чем больше проницаемость пласта, тем ближе к нагнетательной скважине располагается критическая точка. Причем при ширине трещины меньше 0.7 мм координата критической точки практически не зависит от проницаемости пласта.

Выводы

Разработана математическая модель стационарного течения индикаторной жидкости в магистральной трещине с учетом ламинарно-турбулентного перехода. Получены точные решения для ламинарной и турбулентной областей потока при постоянном пластовом давлении, а также постоянных давлениях на нагнетательной и добывающей скважине. Поля давления и скорости течения в ламинарном потоке представляются в элементарных

функциях. Аналогичные поля в турбулентном потоке представляются в параметрическом виде, где параметром является отношение ускорения к скорости жидкости. Время прихода индикаторной жидкости на добывающую скважину, как в ламинарном, так и в турбулентном потоке пропорционально разности арктангенсов. Координата критического сечения находится аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хозяинов М. С., Чернокожев Д. А. Результаты изучения фильтрационной неоднородности пласта ЮВ₁ методом индикаторных (трассерных) исследований // Научно-технический вестник Каротажник. 2011. №2. С. 212.
2. Вишнякова А. В., Ивонтьева К. Н., Кабо В. Я. Результаты трассерных исследований межскважинного пространства // Нефтепромысловое дело. 2009. №11. С. 31–37.
3. Соколовский Э. В., Соловьев Г. Б., Тренчиков Ю. И. Индикаторные методы изучения нефтегазоносных пластов. М.: Недра, 1986. 157 с.
4. Shook G. M. A Simple Fast Method of Estimating Fractured Reservoir Geometry from Tracer Tests // Transactions Geothermal Resources Council. 2003. №26. P. 407–411.
5. Хозяинов М. С., Соколовский Э. В., Чернокожев Д. А. Индикаторные фильтрационные исследования нефтяных месторождений. Saarbrücken, Germany: Palmarium Academic Publishing, 2014. 180 с.
6. Томин П. Ю. О применении трассеров для выявления особенностей среды в межскважинном пространстве. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2010. Препринт №86. 12 с.
7. Захаров В. П., Исмагилов Т. А., Антонов А. М., Федоров А. И., Чекушин В. Ф. Водонепроницаемость трещин со стороны нагнетательных скважин в карбонатных коллекторах // Нефтяное хозяйство. 2010. №12. С. 102–105.
8. Хозяинов М. С., Чернокожев Д. А. Компьютерное моделирование фильтрации меченой жидкости с целью уточнения геологической модели эксплуатируемого нефтяного пласта // Каротажник. 2004. №116–117. С. 293–294.
9. Чернокожев Д. А. Интерпретация результатов компьютерного моделирования фильтрации воды, нефти и оторочки меченой жидкости для зонально-неоднородного и слоисто-неоднородного нефтяного пласта-коллектора // Геоинформатика. 2004. №1. С. 15–22.
10. Guan L., Du Y., Johnson S. G., Choudhary M. Advances of Interwell Tracer Modelling in Petroleum Industry // Journal of Canadian Petroleum Technology. 2005. Vol. 44. Issue 5. P. 12–15.
11. de Zwart A. H., van Batenburg D. W., Stoll M., Boerrigter P. M., Harthy S. Numerical Interpretation of Single Well Chemical Tracer Tests for ASP injection // SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference, 25–28 September, Manama, Bahrain. 2011. Paper No. SPE-141557-MS.
12. Bu P. X., AlSofi A. M., Liu J., Benedek L., Han M. Simulation of Single Well Tracer Tests for Surfactant-Polymer Flooding // SPE Saudi Arabia Section Technical Symposium and Exhibition, 21–24 April, Al-Khobar, Saudi Arabia. 2014. Paper No. SPE-172229-MS.
13. Ильясов А. М., Булгакова Г. Т. Моделирование течения вязкой жидкости в магистральной вертикальной трещине с проницаемыми стенками // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. №7. С. 60–85.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
15. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.

После доработки – 28.12.2020 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.4.1

EXACT SOLUTIONS OF A MODEL OF TRACER FLUID FLOW IN A VERTICAL FRACTURE

© A. M. Ilyasov^{1*}, V. N. Kireev²

¹Ufa State Aviation Technical University
12 Karl Marx Street, 450008 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

²Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

*Email: amilyasov67@gmail.com

In order to intensify oil production, the injection pressure of the injected fluid increases. As a result, main auto-hydraulic fractures are formed on injection wells, which are “washed” over time by subsequent flows of injected water. These fractures can develop, join with hydraulic fractures or directly with production wells. Several fractures can propagate from the injection well. This leads to a rapid flooding of the produced product. In this regard, the problem arises of waterproofing main fractures from the side of injection wells. For water isolation of main fracture, an important task is to assess the volume of main fractures in terms of the time of arrival of the indicator fluid to the production well. In this paper, simple one-dimensional mathematical models of the laminar and turbulent flows of tracer fluid in the main fracture were developed that make it possible to estimate the volume of the fracture taking into account the influence of the permeability of its walls and the gradient of water injection pressure. For both flow regimes in a fracture, analytical solutions of the corresponding systems of equations are obtained. Pressure and flow velocity fields in laminar flow are represented in elementary functions. Similar fields in a turbulent flow are presented in a parametric form, where the parameter is the fluid acceleration. The time of arrival of the indicator fluid to the production well, both in laminar and in turbulent flows, is proportional to the difference in arctangents. The solutions obtained can be used to estimate the volumes of main fractures.

Keywords: waterproofing of fractures, indicator method, laminar flow, turbulent flow, exact solutions.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Khozyainov M. S., Chernokozhev D. A. Nauchno-tekhnicheskii vestnik Karotazhnik. 2011. No. 2. Pp. 212.
2. Vishnyakova A. V., Ivont'eva K. N., Kabo V. Ya. Neftepromyslovoye delo. 2009. No. 11. Pp. 31–37.
3. Sokolovskii E. V., Solov'ev G. B., Trenchikov Yu. I. Indikatornye metody izucheniya neftegazonosnykh plastov [Indicator methods of studying oil and gas fields]. Moscow: Nedra, 1986.
4. Shook G. M. Transactions Geothermal Resources Council. 2003. No. 26. Pp. 407–411.
5. Khozyainov M. S., Sokolovskii E. V., Chernokozhev D. A. Indikatornye fil'tratsionnye issledovaniya neftyanykh mestorozhdenii [Indicator filtration studies of oil fields]. Saarbrücken, Germany: Palmarium Academic Publishing, 2014.
6. Tomin P. Yu. O primeneni trasserov dlya vyyavleniya osobennosti srede v mezhskvazhinnom prostranstve [On the use of tracers for identifying the features of the environment in the interwell space]. Moscow: IPM im. M. V. Keldysha, 2010. Preprint No. 86.
7. Zakharov V. P., Ismagilov T. A., Antonov A. M., Fedorov A. I., Chekushin V. F. Neftyanoe khozyaistvo. 2010. No. 12. Pp. 102–105.
8. Khozyainov M. S., Chernokozhev D. A. Karotazhnik. 2004. No. 116–117. Pp. 293–294.
9. Chernokozhev D. A. Geoinformatika. 2004. No. 1. Pp. 15–22.
10. Guan L., Du Y., Johnson S. G., Choudhary M. Journal of Canadian Petroleum Technology. 2005. Vol. 44. Issue 5. Pp. 12–15.
11. de Zwart A. H., van Batenburg D. W., Stoll M., Boerrigter P. M., Harthy S. SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference, 25–28 September, Manama, Bahrain. 2011. Paper No. SPE-141557-MS.
12. Bu P. X., AlSofi A. M., Liu J., Benedek L., Han M. SPE Saudi Arabia Section Technical Symposium and Exhibition, 21–24 April, Al-Khobar, Saudi Arabia. 2014. Paper No. SPE-172229-MS.
13. Ilyasov A. M., Bulgakova G. T. Matematicheskoe modelirovanie. 2016. Vol. 28. No. 7. Pp. 60–85.
14. Patankar S. Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat, 1984.
15. Idel'chik I. E. Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam [Handbook on hydraulic resistance values]. Moscow: Mashinostroenie, 1992.

Received 10.09.2020.

Revised 28.12.2020.