УДК 517.4.43+517.4.94
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.4.2

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

© Р. Т. Садриева, Н. А. Сидельникова*

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди 32.

Тел:+ 7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

В данной работе рассматривается асимптотическое поведение фундаментальной матрицы системы дифференциальных уравнений второго порядка при больших значениях переменной x в вырожденном случае.

***Ключевые слова**: системы дифференциальных уравнений, асимптотика, фундаментальная матрица системы, вырожденный случай.*

Введение

Мы в данной работе изучаем дифференциальную систему из двух уравнений на интервале $J = [a, b]$ (конечном или бесконечном):

$$L\,(D,k) \equiv D^2 y(x) - k^2 A(x) y = 0, \tag{1}$$

здесь $D = d\,/\,dx$, k – большой параметр и $A(x)$ – матрица второго порядка.

Если для элементов матрицы $A(x)$ имеет место равенство:

$$a_{11}(x)a_{22}(x) = a_{12}(x)a_{21}(x),$$

то имеем, что собственные значения матрицы $A(x)$ записываются в следующем виде:

$$\lambda_-(x) = 0,\ \lambda_+(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x).$$

Сведение системы двух дифференциальных уравнений в случае нулевого собственного числа к системе первого порядка

Преобразуем систему *(1)* к системе первого порядка. Для этого рассмотрим вектор-столбец $Y(x,k)$ и матрицу $B(x)$:

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ a_{11}(x) & 0 & a_{12}(x) & 0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ a_{21}(x) & 0 & a_{22}(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y(x,k) = \begin{pmatrix} y_1(x,k) \\ k^{-1} D y_1(x,k) \\ y_2(x,k) \\ k^{-1} D y_2(x,k) \end{pmatrix}.$$

Следовательно система *(1)* равносильна дифференциальному уравнению:

$$DY = kB(x)\,Y. \tag{2}$$

Не сложно удостоверится, что собственные значения матрицы $B(x)$ определяются функциями следующего вида:

$$\mu_{1,2}\,(x) = \pm\sqrt{\lambda_-(x)} = 0,\ \mu_{3,4}(x) = \pm\sqrt{\lambda_+(x)} = \pm\sqrt{a_{11}(x) + a_{22}(x)}.$$

Значит, матрица $B(x)$ имеет три собственных значения, одно из которых кратное и его кратность его равна двум.

Введем обозначение – $\Lambda(x)$:

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x)\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ \lambda_1(x)\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ \lambda_2(x)\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ -\lambda_2(x) \end{pmatrix}.$$

Где $\lambda_1(x) = 0$, $\lambda_2(x) = \sqrt{a_{11}(x) + a_{22}(x)}$.

Тогда система *(2.2)* приводится к блочно-диагональному виду с помощью преобразования

$$Y(x\,,k) = T(x)\,Z(x,\,k), \tag{3}$$

здесь матрица $T(x)$ определяется из матричного уравнения:

$$T^{-1}(x)\,B(x)\,T(x) = \Lambda(x)$$

и имеет следующий вид:

$$T(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda_2(x) & -\lambda_2(x) \\ -\frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)} & -\frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)} & \frac{a_{22}(x)}{a_{12}(x)} & \frac{a_{22}(x)}{a_{12}(x)} \\ 0 & -\frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)} & \frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)}\lambda_2(x) & -\frac{a_{11}(x)}{a_{12}(x)}\lambda_2(x) \end{pmatrix}.$$

Далее получим следующую систему:

$$DZ(x,k) = (k\,\Lambda(x) - T^{-1}(x)\,DT(x))\,Z(x,k). \tag{4}$$

Обозначая матрицу $\Phi(x) = T^{-1}(x)\,DT(x)$, вычислим ее элементы по формулам:

$$\Phi_{11}(x)=\frac{a'_{11}(x)a_{12}(x)-a_{11}(x)a'_{12}(x)}{a_{12}(x)(a_{11}(x)+a_{22}(x))},\ \Phi_{12}(x)=0,$$

$$\Phi_{13}(x)=-\frac{a'_{22}(x)a_{12}(x)-a_{22}(x)a'_{12}(x)+\lambda_2(x)(a'_{12}(x)a_{22}(x)-a_{12}(x)a'_{22}(x))}{a_{12}(x)(a_{11}(x)+a_{22}(x))},$$

$$\Phi_{14}(x)=\frac{a'_{12}(x)a_{22}(x)-a_{12}(x)a'_{22}(x)+\lambda_2(x)(a'_{12}(x)a_{22}(x)-a_{12}(x)a'_{22}(x))}{a_{12}(x)(a_{11}(x)+a_{22}(x))},$$

$$\Phi_{21}(x)=0;\ \Phi_{22}(x)=\Phi_{11}(x),\ \Phi_{23}(x)=\lambda_2(x)\frac{a'_{12}(x)a_{22}(x)-a_{12}(x)a'_{22}(x)}{a_{12}(x)(a_{11}(x)+a_{22}(x))},$$

$$\Phi_{24}(x)=-\Phi_{23}(x),\ \Phi_{31}(x)=\frac{1}{2}\Phi_{11}(x),\ \Phi_{32}(x)=-\frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)},$$

$$\Phi_{33}(x)=\frac{\lambda'_2(x)}{2\lambda_2(x)}+\frac{a'_{22}(x)a_{12}(x)-a_{22}(x)a'_{12}(x)}{a_{12}(x)(a_{11}(x)+a_{22}(x))},\ \Phi_{34}(x)=-\frac{\lambda'_2(x)}{2\lambda_2(x)};\ \Phi_{41}(x)=\Phi_{31}(x);$$

$$\Phi_{42}(x)=\frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1-\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)},\ \Phi_{43}(x)=\Phi_{34}(x);\ \Phi_{44}(x)=\Phi_{33}(x).$$

Затем перепишем систему *(2.4)* в данной форме:

$$DZ(x,k) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(x,k) & 0_2 \\ 0_2 & \Lambda_2(x,k) \end{pmatrix} Z(x,k) - \begin{pmatrix} 0_2 & \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) & \Phi_4(x) \end{pmatrix} Z(x,k),$$

где

$$\Lambda_1(x,k)=\begin{pmatrix} -(T^{-1}(x)DT(x))_{11} & 1 \\ 0 & -(T^{-1}(x)DT(x))_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2(x,k)=\begin{pmatrix} k\lambda_2(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{33} & 0 \\ 0 & -k\lambda_2(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{33} \end{pmatrix}.$$

Теперь осуществим преобразование $Z(x,k)$, заданное формулой

$$Z(x,k) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2+k^{-1}G(x) \end{pmatrix} V(x,k), \tag{5}$$

здесь I_2 – единичная матрица второго порядка, а 0_2 – нулевая матрица второго порядка.

Матрица $G(x)$ задана приведенным ниже способом:

$$g_{ii}(x) = 0,\ g_{ij}(x) = \frac{(\Phi_4(x))_{ij}}{\mu_{i+2}(x)-\mu_{j+2}(x)},\quad 1\le i,j\le 2;$$

В данном случае получаем:

$$G(x)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda'_2(x)}{4\lambda_2^2(x)} \\ \frac{\lambda'_2(x)}{4\lambda_2^2(x)} & 0 \end{pmatrix}.$$

После применения этой замены имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$DV(x,k)=\begin{pmatrix} \Lambda_1(x,k) & 0_2 \\ 0_2 & \Lambda_2(x,k) \end{pmatrix} V(x,k) -$$

$$-\begin{pmatrix} 0_2 & \Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x)) \\ (I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x) & k^{-1}(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}(DG(x)+\Phi_4(x)G(x)) \end{pmatrix} V(x,k).$$

Запишем данную систему в виде: $DV(x,k)=\begin{pmatrix} \Lambda_1(x,k) & 0_2 \\ -(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x) & \Lambda_2(x,k) \end{pmatrix} V(x,k) -$

$$-\begin{pmatrix} 0_2 & \Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x)) \\ 0_2 & k^{-1}(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}(DG(x)+\Phi_4(x)G(x)) \end{pmatrix} V(x,k).$$

И, наконец,

$$DV(x,k)=M(x,k)V(x,k)-F(x,k)V(x,k).$$

Теперь сделаем еще одну замену

$$V(x,k) = H(x,k)\,P(x,k),$$

здесь матрица $H(x, k)$ приводит матрицу $M(x, k)$ к блочно-диагональному виду и определяется из матричного уравнения:

$$H^{-1}(x,k)M(x,k)H(x,k)=\begin{pmatrix}\Lambda_1(x,k) & 0_2\\ 0_2 & \Lambda_2(x,k)\end{pmatrix},$$

$$M(x,k)H(x,k)=H(x,k)\begin{pmatrix}\Lambda_1(x,k) & 0_2\\ 0_2 & \Lambda_2(x,k)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1(x,k) & 0_2\\ -(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x) & \Lambda_2(x,k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1(x,k) & H_2(x,k)\\ H_3(x,k) & H_4(x,k)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}H_1(x,k) & H_2(x,k)\\ H_3(x,k) & H_4(x,k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1(x,k) & 0_2\\ 0_2 & \Lambda_2(x,k)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы можем выписать матричные уравнения для нахождения матриц $H_1(x,k)$, $H_2(x,k)$, $H_3(x,k)$ и $H_4(x,k)$ соответственно:

$$\begin{cases}\Lambda_1(x,k)H_1(x,k)=H_1(x,k)\Lambda_1(x,k);\\ -(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x)H_1(x,k)+\Lambda_2(x,k)H_3(x,k)=H_3(x,k)\Lambda_1(x,k);\\ \Lambda_1(x,k)H_2(x,k)=H_2(x,k)\Lambda_2(x,k);\\ -(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x)H_2(x,k)+\Lambda_2(x,k)H_4(x,k)=H_4(x,k)\Lambda_2(x,k).\end{cases}$$

Значит, матрица $H(x,k)$ принимает следующий вид:

$$H(x,k)=\begin{pmatrix}I_2 & 0_2\\ \hat H(x,k) & I_2\end{pmatrix},$$

а элементы матрицы $\hat H(x,k)$ находятся из матричного уравнения:

$$\hat H(x,k)\Lambda_1(x,k)-\Lambda_2(x,k)\hat H(x,k)=-(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x).$$

Теперь обозначим $S(x,k)=(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x)$, а элементы матрицы $\hat H(x,k)$ через $h_{ij}(x, k)$, $1 \le i,j \le 2$.

Далее получим:

$$\begin{pmatrix}h_{11}(x,k) & h_{12}(x,k)\\ h_{21}(x,k) & h_{22}(x,k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\lambda_1(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{11} & 1\\ 0 & k\lambda_1(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{11}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}k\lambda_2(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{33} & 0\\ 0 & -k\lambda_2(x)-(T^{-1}(x)DT(x))_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{11}(x,k) & h_{12}(x,k)\\ h_{21}(x,k) & h_{22}(x,k)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-s_{11}(x,k) & -s_{12}(x,k)\\ -s_{21}(x,k) & -s_{22}(x,k)\end{pmatrix}.$$

Следовательно, учитывая, что $\lambda_1(x) = 0$, будем иметь:

$$h_{11}(x,k)=\frac{-s_{11}(x,k)}{-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)},\ h_{12}(x,k)=\frac{-s_{12}(x,k)(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))+s_{11}(x,k)}{(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2};$$

$$h_{21}(x,k)=\frac{-s_{21}(x,k)}{k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)},\ h_{22}(x,k)=\frac{-s_{22}(x,k)(k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))+s_{21}(x,k)}{(k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2}.$$

Окончательно, получим следующий результат:

$$DP(x,k)=(H^{-1}(x,k)M(x,k)H(x,k)-H^{-1}(x,k)F(x,k)H(x,k)-H^{-1}(x,k)DH(x,k))P(x,k). \qquad (6)$$

Построение асимптотических формул для фундаментальной матрицы дифференциальных уравнений системы *(6)*

Пусть $a(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x)$, где c_i – произвольные константы.

Предположим, что наложены следующие условия:

1) при $x \ge x_0$ $a'(x), a''(x), a'_{11}(x), a'_{12}(x), a'_{22}(x)$ не меняют знака;

2) $a(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;

3) при $x \to \infty$

$$a'(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2;\ a''(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2;$$

$$xa'_{22}(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1/2\le\alpha\le 3/2;\ a_{22}(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1/2\le\alpha\le 3/2;$$

$$a'_{12}(x)=o(|a_{12}(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2;\ a''_{12}(x)=o(|a_{12}(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2;$$

$$a_{11}(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 2;\ a'_{11}(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2.$$

$$a''_{11}(x)=o(|a(x)|)^{\alpha},\quad 1\le\alpha\le 3/2.$$

Лемма 1. Элементы $g_{ij}(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. $g_{12}(x)=-\frac{1}{8}\frac{a'(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\to 0$, $g_{21}(x)=\frac{1}{8}\frac{a'(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\to 0$ в силу условия 3).

Следствие 1. Для достаточно больших значений k и x матрица $(I_2+k^{-1}G(x))$ обратима и имеют место неравенства

$\|I_2+k^{-1}G(x)\| \le const$, $\|(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\| \le const$.

Лемма 2. Для матрицы $\Phi_2(x)$ элементы $x(\Phi_2(x))_{ij}$, $i, j = 1, 2$, суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство. Поскольку для всех элементов матрицы $\Phi_2(x)$ доказательство проводится совершенно аналогично, приведем его, например, для элемента $(\Phi_2(x))_{11}$.

$$|(\Phi_2(x))_{11}| \le \left|\frac{a_{22}(x)a'_{12}(x)}{\sqrt{a(x)}a_{12}(x)}\right| + \left|\frac{a'_{22}(x)}{\sqrt{a(x)}}\right|.$$

Отсюда, в силу условий 1) и 3), получим: $\int_{x_0}^{\infty}|x(\Phi_2(x))_{11}|dx < \infty$, что и доказывает лемму.

Следствие 2. Из леммы 2.2 и следствия 2.1 следует, что элементы матрицы $\Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x))$, умноженные на x, суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Лемма 3. Элементы матрицы $\Phi_4(x)G(x)$ суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим данную матрицу

$$\Phi_4(x)G(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{34}(x)g_{21}(x) & 0 \\ 0 & \Phi_{43}(x)g_{12}(x) \end{pmatrix}.$$

Так как $\Phi_{43}(x) = \Phi_{34}(x)$, $g_{21}(x) = - g_{12}(x)$, то достаточно рассмотреть любой элемент указанной матрицы.

$$\Phi_{43}(x)g_{12}(x) = \left(-\frac{\lambda'_2(x)}{2\lambda_2(x)}\right)\left(-\frac{1}{4}\frac{\lambda'_2(x)}{\lambda_2^2(x)}\right) = \frac{1}{8}\frac{(\lambda'_2(x))^2}{2\lambda_2^3(x)} = \frac{1}{32}\frac{(a'(x))^2}{a^{\frac{5}{2}}(x)}.$$

Отсюда, в силу условий 1), 3), вытекает, что $\int_{x_0}^{\infty}|\Phi_{43}(x)g_{12}(x)|dx < \infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 4. Элементы матрицы $DG(x)$ суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство. Докажем лемму для элемента $g'_{12}(x)$:

$$|g'_{12}(x)| \le c_1\left|\frac{a''(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\right| + c_2\left|\frac{(a'(x))^2}{a^{\frac{5}{2}}(x)}\right|.$$

Отсюда следует: $\int_{x_0}^{\infty}|g'_{12}(x)|dx < \infty$, что и доказывает лемму.

Следствие 3. Из лемм 2.3, 2.4 и следствия 2.1 вытекает, что элементы матрицы $k^{-1}(I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}(DG(x) + \Phi_4G(x))$ суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Лемма 5. Элементы матрицы $H(x,k)$ суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство. Проведем доказательство для элементов $h_{11}(x,k)$ и $h_{12}(x,k)$, а для оставшихся двух элементов оно проводится совершенно одинаково

$$h_{11}(x,k) = \frac{-s_{11}(x)}{-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)}.$$

Теперь рассмотрим знаменатель данной дроби.

$$-k\lambda_2(x) + \Phi_{33}(x) - \Phi_{11}(x) = -k\sqrt{a(x)}(1 - \frac{5}{4}\frac{a'(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)} + \frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}).$$

Следовательно, при $x \to \infty$:

$$|-k\lambda_2(x) + \Phi_{33}(x) - \Phi_{11}(x)| \cong k\sqrt{a(x)};\ |h_{11}(x,k)| \cong \frac{|s_{11}(x)|}{k\sqrt{a(x)}}.$$

Ранее нами было обозначено $S(x,k) = (I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x)$. Из следствия 1 известно, что $\|(I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}\| \le const$, тогда $\|S(x,k)\| \le const\|\Phi_3(x)\|$.

$$\Phi_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Phi_{11}(x) & \frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)} \\ \frac{1}{2}\Phi_{11}(x) & \frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1-\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)} \end{pmatrix}.$$

$\left|\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)}\right| = \left|1 + \frac{1}{\lambda_2(x)}\right| = \left|1 + \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\right| \le 2$ в силу условия 2). Аналогично $\left|\frac{1-\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)}\right| \le 2$.

Значит, все элементы матрицы $\Phi_3(x)$ ограничены. Теперь рассмотрим элемент $\Phi_{11}(x)$

$$\Phi_{11}(x) = \frac{a'_{11}(x)a_{12}(x) - a_{11}(x)a'_{12}(x)}{a_{12}(x)(a_{11}(x) + a_{22}(x))} = \frac{a'_{11}(x)}{a(x)} - \frac{a_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}.$$

Далее имеем, что справедливо следующее неравенство:

$$|h_{11}(x,k)| \le \frac{c}{k\sqrt{a(x)}}\left|\frac{a'_{11}(x)}{a(x)} - \frac{a_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right| \le \frac{c}{k}\left|\frac{a'_{11}(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)} - \frac{a_{11}(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right|.$$

Теперь получам:

$$\int_{x_0}^{\infty}|h_{11}(x,k)|dx < \infty.$$

По аналогии с рассуждениями для элемента $h_{11}(x, k)$ имеем следующую оценку:

$$|h_{12}(x,k)| \le \frac{c_1}{k}\left|\frac{a_{11}(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)} - \frac{a'_{11}(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\right| + \frac{c_2}{k^2}\left|\frac{a_{11}(x)}{a^2(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)} - \frac{a'_{11}(x)}{a^2(x)}\right|.$$

Следовательно, $\int_{x_0}^{\infty}|h_{12}(x,k)|dx < \infty$.

<u>Следствие 2.4.</u> Из следствий 2, 3 и леммы 5 вытекает суммируемость элементов матриц $\Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x))\hat{H}(x,k)$, $k^{-1}(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}(DG(x)+\Phi_4 G(x))$ $\widehat{H}(x,k)$, $\widehat{H}(x,k)$ $\Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x))$ $\widehat{H}(x,k)$ и $\widehat{H}(x,k)$ $\Phi_2(x)(I_2+k^{-1}G(x))$ на $[x_0, \infty)$.

<u>Лемма 6.</u> Элементы матрицы $S'(x, k)$ ограничены на $[x_0, \infty)$.

<u>Доказательство.</u> $S(x,k) = (I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3(x)$.

$$S'(x,k) = ((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})'\Phi_3(x) + (I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3'(x).$$

Введем обозначение $S'(x, k) = D(x, k) + F(x, k)$.

1. $D(x,k) = ((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})'\Phi_3(x)$.

а) $$(I_2 + k^{-1}G(x))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16k^2\lambda_2^4(x)}{(\lambda_2'(x))^2+16k^2\lambda_2^4(x)} & \frac{4k\lambda_2'(x)\lambda_2^2(x)}{(\lambda_2'(x))^2+16k^2\lambda_2^4(x)} \\ -\frac{4k\lambda_2'(x)\lambda_2^2(x)}{(\lambda_2'(x))^2+16k^2\lambda_2^4(x)} & \frac{16k^2\lambda_2^4(x)}{(\lambda_2'(x))^2+16k^2\lambda_2^4(x)} \end{pmatrix}.$$

$$((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})_{11}' = \frac{3a^2(x)a'(x)}{a^3(x)\left(1+\frac{1}{64k^2}\frac{(a'(x))^2}{a^3(x)}\right)} -$$

$$-\frac{3a^5(x)a'(x)}{a^6(x)\left(1+\frac{1}{64k^2}\frac{(a'(x))^2}{a^3(x)}\right)^2} - \frac{2a''(x)a'(x)a^3(x)}{64k^2a^6(x)\left(1+\frac{1}{64k^2}\frac{(a'(x))^2}{a^3(x)}\right)^2}.$$

Теперь, учитывая, что $\frac{a'(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)} \to 0$ при $x \to \infty$, получим:

$$|((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})_{11}'| \le c_1\left|\frac{a'(x)}{a(x)}\right|.$$

Аналогично находим, что

$$|((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})_{12}'| \le \frac{c_1}{k}\left|\frac{a''(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\right| + \frac{c_2}{k}\left|\frac{(a'(x))^2}{a^{\frac{5}{2}}(x)}\right|.$$

Далее, для элементов $((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})_{21}'$ и $((I_2 + k^{-1}G(x))^{-1})_{22}'$ доказательство данных оценок проводится аналогичным способом.

б) $$\Phi_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Phi_{11}(x) & \frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)} \\ \frac{1}{2}\Phi_{11}(x) & \frac{1}{2}\Phi_{11}(x)\frac{1-\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)} \end{pmatrix}.$$

Выше было доказано, что все элементы матрицы $\Phi_3(x)$ ограничены на данном интервале.

$$|d_{11}(x,k)| \le \left|\frac{a_{11}(x)}{a(x)}\frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)} - \frac{a_{11}'(x)}{a(x)}\right|\left(\frac{c_1}{k}\left|\frac{a''(x)}{a^{\frac{3}{2}}(x)}\right| + c_4\left|\frac{a'(x)}{a(x)}\right|\right).$$

Аналогичные данные оценки можно получить для элементов $d_{12}(x, k)$, $d_{21}(x, k)$ и $d_{22}(x, k)$.

2. $F(x,k) = (I_2 + k^{-1}G(x))^{-1}\Phi_3'(x)$.

Таким образом из следствия 2.1 известно, что $\|(I_2+k^{-1}G(x))^{-1}\| \le c$. Значит, $\|F(x, k)\| \le c\ \|\Phi_3'(x)\|$.

$$\Phi_{31}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{11}(x)}{a(x)}\left(\frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}\right)' - \left(\frac{a_{11}'(x)}{a(x)}\right)' + \frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}\left(\frac{a_{11}'(x)}{a(x)}\right)'\right).$$

$$\Phi_{32}'(x) = \left(\Phi_{31}(x)\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)}\right)' = \Phi_{31}'(x)\frac{1+\lambda_2(x)}{\lambda_2(x)} + \Phi_{31}(x)\left(\frac{-\lambda_2'(x)}{\lambda_2^2(x)}\right) =$$

$$= \Phi_{31}'(x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\right) - \Phi_{31}(x)\frac{a'(x)}{2a^{\frac{3}{2}}(x)}.$$

$$|\Phi_{32}'(x)| \le c|\Phi_{31}'(x)|.$$

Теперь аналогичным образом выполняются оценки для элементов $\Phi'_{41}(x)$ и $\Phi'_{42}(x)$. $S'(x, k) = D(x, k) + F(x, k)$.

$$|s_{11}'(x,k)| \le |d_{11}'(x,k)| + |f_{11}'(x,k)| \le c\left|\frac{a''(x)}{a^{\frac{5}{2}}(x)}\left(\frac{1}{k}\frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}a_{11}(x) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -a_{11}'(x)\right) + \frac{a_{11}(x)}{a(x)}\left(\frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}\right)' - \left(\frac{a_{11}'(x)}{a(x)}\right)' + \frac{a_{12}'(x)}{a_{12}(x)}\left(\frac{a_{11}'(x)}{a(x)}\right)'\right|.$$

Затем элементы $s_{12}'(x,k), s_{21}'(x,k)$ и $s_{22}'(x,k)$ оцениваются аналогично.

<u>Лемма 7.</u> Элементы матрицы $H'(x, k)$ суммируемы на $[x_0, \infty)$.

Доказательство.

1. $h'_{11}(x,k) = \frac{s_{11}(x,k)\left(-k\lambda'_2(x)+\Phi'_{33}(x)-\Phi'_{11}(x)\right)}{(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2} - \frac{s'_{11}(x,k)}{-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)}$.

Таким образом, рассмотрим сначала числитель первой дроби:

$$-k\lambda'_2(x)+\Phi'_{33}(x)-\Phi'_{11}(x) \le \mathrm{c}\left|-k\frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}}+\frac{5}{4}\frac{a''(x)}{a(x)}-\left(\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right)'-2\frac{a''_{11}(x)}{a(x)}+\right.$$
$$\left.+2\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right|.$$

Принимая во внимание, что $|-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)| \cong k\sqrt{a(x)}$ и $(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2 \cong k^2a(x)$, получим

$$|h'_{11}(x,k)| \le \frac{1}{k^2a(x)}c_1\left|\left(\frac{a_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}-\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}\right)\left(-k\frac{a'(x)}{2\sqrt{a(x)}}+\frac{5}{4}\frac{a''(x)}{a(x)}-\left(\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right)'-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\frac{a''_{11}(x)}{a(x)}+2\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right)\right|+\frac{1}{k\sqrt{a(x)}}c_2\left|\frac{a''(x)}{a^{\frac{5}{2}}(x)}\left(\frac{1}{k}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}a_{11}(x)-a'_{11}(x)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{11}(x)}{a(x)}\left(\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\right)'-\left(\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}\right)'+\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}\left(\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}\right)'\right|.$$

Таким образом,

$$\int_{x_0}^{\infty}|h'_{11}(x,k)|dx < \infty.$$

2. $h'_{12}(x,k) = \frac{-s'_{12}(x,k)}{-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x)} + \frac{s_{12}(x,k)(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))'}{(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2} +$
$+\frac{s'_{11}(x,k)}{(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^2} - \frac{2s_{11}(x,k)(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))'}{(-k\lambda_2(x)+\Phi_{33}(x)-\Phi_{11}(x))^3}$.

Следовательно, для элемента $h'_{12}(x,k)$ оценка производится аналогично элементу $h'_{11}(x,k)$.

Теперь применим теорему 1 к нашей системе дифференциальных уравнений (6). В данном случае $p = 1, 2, 3$; $q = 1, 2, 3$; $i = 1,\dots, l_p$; $j = 1,\dots, l_q$; $w_p(x)$ – собственные значения матриц $\Lambda_1(x, k)$ и $\Lambda_2(x, k)$, кратность которых соответственно равна: $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 3 \rightarrow n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $c_{n_p+i,n_q+j}(x)$ – элементы матрицы $C(x, k) = -H^{-1}(x, k)F(x, k)H(x, k) - H^{-1}(x, k)DH(x, k))P(x, k)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) – 3) теоремы Рапопорта (см. [1]) и условия 1) – 3):

1) выполнение данного условия очевидно:

$$w_1(x) = \frac{a_{11}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}-\frac{a'_{11}(x)}{a(x)}, w_2(x) = k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)},$$
$$w_3(x) = -k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)}.$$

2) это условие принимает следующий вид:

$$c_{11}(x), c_{13}(x), c_{14}(x), c_{22}(x), c_{31}(x), c_{33}(x), c_{34}(x), c_{41}(x), c_{43}(x), c_{44}(x), c_{21}(x)x,$$
$$c_{23}(x)x, c_{24}(x)x, c_{12}(x)\frac{1}{x}, c_{32}(x)\frac{1}{x}, c_{42}(x)\frac{1}{x} \in L(x_0,\infty),$$

выполнение данных требований следует из лемм 1–7 и следствий 1–4;

3) это условие имеет вид:

существует такое достаточно большое число X_0, что при $x \ge X_0$ ни одна из функций

$$\frac{1}{x}, -2k\sqrt{a(x)}, 2k\sqrt{a(x)},$$
$$k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)}+\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)},$$
$$k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)}+\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}-\frac{1}{x},$$
$$-k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)}+\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)},$$
$$-k\sqrt{a(x)}-\frac{a'(x)}{4a(x)}+\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}-\frac{1}{x},$$
$$-k\sqrt{a(x)}+\frac{a'(x)}{4a(x)}-\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}+\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)},$$

$$-k\sqrt{a(x)}+\frac{a'(x)}{4a(x)}-\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}+\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}+\frac{1}{x},$$
$$k\sqrt{a(x)}+\frac{a'(x)}{4a(x)}-\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)},$$
$$k\sqrt{a(x)}+\frac{a'(x)}{4a(x)}-\frac{a'_{11}(x)-a'_{22}(x)}{a(x)}-\frac{a_{11}(x)-a_{22}(x)}{a(x)}\frac{a'_{12}(x)}{a_{12}(x)}+\frac{1}{x}$$

не меняет знака.

Функция $-\frac{1}{x}$ неположительна и в то же время несуммируема в интервале (X_0, ∞), но после умножения на x эта функция становится строго отрицательной при выполнении неравенства $x \geq X_0$.

Итак, система (6) имеет четыререшения, следующего вида вида

$$P^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}\eta_{11}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{21}(x)\frac{1}{x} exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{31}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{41}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\end{pmatrix};\ P^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}\eta_{12}(x)x\, exp\int_{t_0}^{t} w_1(t)dt\\ \eta_{22}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{32}(x)x\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{42}(x)x\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\end{pmatrix}; \qquad (7)$$

$$P^{(3)}(x)=\begin{pmatrix}\eta_{13}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt\\ \eta_{23}(x)\frac{1}{x} exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt\\ \eta_{33}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt\\ \eta_{43}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt\end{pmatrix};\ P^{(4)}(x)=\begin{pmatrix}\eta_{14}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt\\ \eta_{24}(x)\frac{1}{x} exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt\\ \eta_{34}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt\\ \eta_{44}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt\end{pmatrix};$$

где $\eta_{ij}(x)$ $(i, j = 1,\dots,4)$ - функции, непрерывные в бесконечном интервале $[x_0, \infty)$ и причем $\eta_{11}(\infty) = \eta_{12}(\infty) = \eta_{22}(\infty) = \eta_{33}(\infty) = \eta_{44}(\infty) = 1$; $\eta_{13}(\infty) = \eta_{14}(\infty) = \eta_{21}(\infty) = \eta_{23}(\infty) = \eta_{24}(\infty) = \eta_{31}(\infty) = \eta_{32}(\infty) = \eta_{34}(\infty) = \eta_{41}(\infty) = \eta_{42}(\infty) = \eta_{43}(\infty) = 0$.

Значит, для решений системы дифференциальных уравнений (6) имеют место асимптотические формулы:

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix}1+o(1)\\ o\left(\frac{1}{x}\right)\\ o(1)\\ o(1)\end{pmatrix};\qquad P^{(2)}=\begin{pmatrix}x+o(x)\\ 1+o(1)\\ o(x)\\ o(x)\end{pmatrix};$$

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix}o(exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt)\\ o\left(\frac{1}{x}exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt\right)\\ exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt+o(exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt)\\ o(exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt)\end{pmatrix};\qquad P^{(4)}==\begin{pmatrix}o(exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt)\\ o\left(\frac{1}{x}exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt\right)\\ o(exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt)\\ exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt+o(exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt)\end{pmatrix}.$$

Теперь подставим формулы *(7)* в систему *(6)* и получим следующие соотношения:

$$DP(x,k) = (H^{-1}(x,k)M(x,k)H(x,k) - H^{-1}(x,k)F(x,k)H(x,k) - H^{-1}(x,k)DH(x,k))P(x,k).$$

$$1)\begin{pmatrix}\eta'_{11}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt+w_1(x)\eta_{11}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \left(\eta'_{21}(x)\frac{1}{x}-\eta_{21}(x)\frac{1}{x^2}\right) exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt+w_1(x)\eta_{21}(x)\frac{1}{x} exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta'_{31}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt+w_1(x)\eta_{31}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta'_{41}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt+w_1(x)\eta_{41}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}w_1(x) & 1 & 0 & 0\\ 0 & w_1(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & w_2(x) & 0\\ 0 & 0 & 0 & w_3(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_{11}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{21}(x)\frac{1}{x} exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{31}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\\ \eta_{41}(x)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\end{pmatrix}-(H^{-1}(x,k)F(x,k)H(x,k)\ +\ H^{-1}(x,k)DH(x,k)).$$

Таким образом, получим следующую систему:

1) $\begin{cases} \eta'_{11}(x) = \frac{1}{x}\eta_{21}(x); \\ \eta'_{21}(x) = \frac{1}{x}\eta(x); \\ \eta'_{31}(x) = (w_2(x) - w_1(x))\eta_{31}(x); \\ \eta'_{41}(x) = (w_3(x) - w_1(x))\eta_{41}(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{11}(x) = x; \\ \eta_{21}(x) = x; \\ \eta_{31}(x) = exp\int_{x_0}^{x}(w_2(t) - w_1(t))dt; \\ \eta_{41}(x) = exp\int_{x_0}^{x}(w_3(t) - w_1(t))dt. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x\eta_{12}(x))' = \eta_{22}(x); \\ \eta'_{22}(x) = 0; \\ (x\eta_{32}(x))' = (w_2(x) - w_1(x))x\eta_{32}(x); \\ (x\eta_{42}(x))' = (w_3(x) - w_1(x))x\eta_{41}(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{12}(x) = 1; \\ \eta_{22}(x) = 1; \\ \eta_{32}(x) = \frac{1}{x}exp\int_{x_0}^{x}(w_2(t) - w_1(t))dt; \\ \eta_{42}(x) = \frac{1}{x}exp\int_{x_0}^{x}(w_3(t) - w_1(t))dt. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \eta'_{13}(x) = (w_1(x) - w_2(x))\eta_{13}(x) + \frac{1}{x}\eta_{23}(x); \\ \left(\frac{1}{x}\eta_{23}(x)\right)' = (w_1(x) - w_2(x))\frac{1}{x}\eta_{23}(x); \\ \eta'_{33}(x) = 0; \\ \eta'_{43}(x) = (w_3(x) - w_2(x))\eta_{43}(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{13}(x) = x\,exp\int_{x_0}^{x}(w_1(t) - w_2(t))dt; \\ \eta_{23}(x) = x\,exp\int_{x_0}^{x}(w_1(t) - w_2(t))dt; \\ \eta_{33}(x) = 1; \\ \eta_{43}(x) = exp\int_{x_0}^{x}(w_3(t) - w_2(t))dt. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \eta'_{14}(x) = (w_1(x) - w_3(x))\eta_{14}(x) + \frac{1}{x}\eta_{24}(x); \\ \left(\frac{1}{x}\eta_{24}(x)\right)' = (w_1(x) - w_3(x))\frac{1}{x}\eta_{24}(x); \\ \eta'_{34}(x) = (w_2(x) - w_3(x))\eta_{34}(x); \\ \eta'_{44}(x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{14}(x) = x\,exp\int_{x_0}^{x}(w_1(t) - w_3(t))dt; \\ \eta_{24}(x) = x\,exp\int_{x_0}^{x}(w_1(t) - w_3(t))dt; \\ \eta_{34}(x) = exp\int_{x_0}^{x}(w_2(t) - w_3(t))dt; \\ \eta_{44}(x) = 1. \end{cases}$

Далее, осуществив обратную замену, получим:

$$P^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} x\,exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt \\ exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt \\ exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt \\ exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt \end{pmatrix}, i = 1,\ldots,4,$$

здесь:

$$exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt = \frac{a_{12}(x)}{a_{11}(x)} - \frac{a_{12}(x_0)}{a_{11}(x_0)}, exp\int_{x_0}^{x} w_2(t)dt = \frac{1}{\sqrt[4]{a(x)}\Big|_{x_0}^{x}} exp\left(k\int_{x_0}^{x}\sqrt{a(t)}dt\right),$$

$$exp\int_{x_0}^{x} w_3(t)dt = \frac{1}{\sqrt[4]{a(x)}\Big|_{x_0}^{x}} exp\left(-k\int_{x_0}^{x}\sqrt{a(t)}dt\right).$$

Теперь, возвращаясь к первоначальной системе (2), имеем следующие асимптотические формулы для решений:

$$y_1^{(r)}(x,k) = n_{r1}(x,k)\, x\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt,\ y_2^{(r)}(x,k) = n_{r2}(x,k)\, exp\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt,$$

$$y_j^{(r)}(x,k) = n_{rj}(x,k)\, exp\int_{x_0}^{x} w_{j-1}(t)dt, \quad r = 1,\ldots,4;\ j = 3,4.$$

Здесь, функции $n_{ij}(x, k)$ являются элементами матрицы перехода к системе (2):

$$N(x,k) = T(x)\begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 + k^{-1}G(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ \hat{H}(x,k) & I_2 \end{pmatrix}.$$

Пример. В качестве матрицы *A (x)* можно рассмотреть следующие матрицу, заданные следующим образом:

1. $A(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - e^{-x} & e^{x} \\ 1 - e^{-3x} & e^{-x} \end{pmatrix}; \quad \lambda_1(x) = 0;\ \lambda_2(x) = e^{x}.$
2. $A(x) = \begin{pmatrix} x^{2\alpha} - x^{-\gamma} & x^{-\gamma-\alpha} \\ x^{3\alpha} - x^{\alpha-\gamma} & x^{-\gamma} \end{pmatrix}; \quad \lambda_1(x) = 0;\ \lambda_2(x) = x^{\alpha}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: изд-во АН УССР, 1954.
2. Султанаев Я. Т. Асимптотика спектра обыкновенных дифференциальных опрераторов в вырожденном случае, Дифференциальные уравнения, 18. 1992. №10. 1694. С. 1702.
3. Султанаев Я. Т., Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений в вырожденном случае. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 13. 1988. С. 36–55.
4. Султанаев Я. Т. Асимптотика дискретного спектра одномерных дифференциальных опреаторов. Дифференциальные уравнения, 10. 1974. №11. 2010. 2020.
5. Султанаев Я. Т., Исламова Р. Т. Исследование уравнения для парциальных волн с быстро осциллирующим потенциалом. Матем. заметки, 79. 2006. №2. С. 288–293.

Поступила в редакцию 02.12.2020 г.
После доработки – 23.12.2020 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2020.4.2

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE FUNDAMENTAL MATRIX OF A SYSTEM OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A DEGENERATE CASE

© R. T. Sadrieva, N. A. Sidel'nikova*

Bashir State University
32 Zaki Validi Street, 460076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 32.
**Email: zhiber.na@gmail.ru*

The authors of the work studied the asymptotic behavior of the fundamental matrix of a system of second-order differential equations for large values variable x in the degenerate case. The authors considered a system of two equations on the interval I = [a, b] (the finite or the infinite):

$$L\ (D,k) \equiv D^2y(x) - k^2\ A(x)y = 0.$$

Here, D = d/dx, k – a big parameter, and A(x) – a second-order matrix. Provided that the relations $a_{11}(x)a_{22}(x) = a_{12}(x)a_{21}(x)$ are hold for the elements of the matrix A(x), the eigenvalues of the matrix A(x) have the following form:

$$\lambda_-(x) = 0,\ \lambda_+(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x).$$

The authors reduced the initial system to a differential first-order equation:

$$DY = kB(x)Y.$$

Then they proved that the obtained equation could be converted to a L- diagonal system. And finally, moving on to the initial system, the authors got asymptotic formulas for solutions of the initial system:

$$y_1{}^{(r)}\,(x,k) \;=\; n_{r1}(x,k)\;x\;exp\;\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\,, y_2{}^{(r)}\,(x,k)$$

$$=\; n_{r2}(x,k)\;\;exp\;\int_{x_0}^{x} w_1(t)dt\,,$$

$$y_j{}^{(r)}\,(x,k) \;=\; n_{rj}(x,k)\;\;exp\;\int_{x_0}^{x} w_{j-1}(t)dt\,,\qquad r = 1,\ldots,4;\; j = 3{,}4.$$

Keywords: asymptotic formulas, fundamental matrix, differential system, degenerate case.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Rapoport I. M. O nekotorykh asimptoticheskikh metodakh v teorii differentsial'nykh uravnenii [On some asymptotic methods in the theory of differential equations]. Kiev: izd-vo AN USSR, 1954.
2. Sultanaev Ya. T. Asimptotika spektra obyknovennykh differentsial'nykh oprreratorov v vyrozhdennom sluchae, Differentsial'nye uravneniya, 18. 1992. No. 10. 1694. Pp. 1702.
3. Sultanaev Ya. T., Asimptotika reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii v vyrozhdennom sluchae. Trudy seminara im. I. G. Petrovskogo, 13. 1988. Pp. 36–55.
4. Sultanaev Ya. T. Asimptotika diskretnogo spektra odnomernykh differentsial'nykh opreatorov. Differentsial'nye uravneniya, 10. 1974. No. 11. 2010. 2020.
5. Sultanaev Ya. T., Islamova R. T. Issledovanie uravneniya dlya partsial'nykh voln s bystro ostsilliruyushchim potentsialom. Matem. zametki, 79. 2006. No. 2. Pp. 288–293.

Received 02.12.2020.
Revised 23.12.2020.