РАЗЛИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© О. А. Кривошеева

Бакирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 65.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

В работе рассматриваются различные характеристики числовой последовательности: верхняя, нижняя, угловая и максимальная плотности, индекс конденсации (А. С. Кривошеева). Показана важность этих характеристик при решении задач о представлении рядами экспонент и экспоненциальных мономов функций из инвариантных относительно дифференцирования подпространств аналитических функций в выпуклых областях комплексной плоскости (проблема фундаментального принципа) и о распределении особых точек сумм рядов экспонент с положительными показателями на границах их областей сходимости. Приведено несколько характерных примеров различных последовательностей. А также возможность применения критериев справедливости фундаментального принципа и наличия особых точек на прямой сходимости указанных выше рядов для этих последовательностей.

Ключевые слова: максимальная плотность, индекс конденсации, выпуклая область, ряд экспоненциальных мономов.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k . Каждая точка λ_k имеет кратность n_k . Последовательность Λ будем считать неубывающей по модулю с единственной предельной точкой на бесконечности, т.е. $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|, k \geq 1$, и $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. В данной работе рассмотрим различные числовые характеристики этой последовательности, а также примеры на вычисления этих характеристик. Отметим важность этих характеристик при решении следующих задач:

1) о представлении рядами экспоненциальных мономов элементов подпространств аналитических функций инвариантных относительно оператора дифференцирования в выпуклых областях комплексной плоскости (эта задача носит название проблемы фундаментального принципа);

2) о распределении особых точек сумм рядов экспонент с положительными показателями на границах их областей сходимости.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Символом $n(r, \Lambda)$ будем обозначать число точек λ_k с учетом их кратностей n_k , которые попадают в открытый круг $B(0, r)$ с центром в нуле и радиуса r . Величины

$$\underline{n}(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}, \bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}$$

называют соответственно нижней и верхней плотностью последовательности Λ .

Последовательность Λ имеет плотность $n(\Lambda)$ или еще говорят, что она измерима, если $\underline{n}(\Lambda) = \bar{n}(\Lambda) = n(\Lambda) < +\infty$. Пусть $\Lambda_0(\Lambda) = \{\xi_p\}_{p=1}^{\infty}$ – неубывающая по модулю последовательность, которая состоит из точек $\lambda_k, k \geq 1$, причем, каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз. Тогда

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{|\xi_p|} \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{n(|\xi_p| + 1, \Lambda)}{|\xi_p|} = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{n(|\xi_p| + 1, \Lambda)}{|\xi_p| + 1} \leq \bar{n}(\Lambda).$$

Выберем последовательность $r_l \rightarrow \infty$ такую, что

$$\bar{n}(\Lambda) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{n(r_l, \Lambda)}{r_l}.$$

Пусть $p(l)$ – максимальный номер, удовлетворяющий условию $|\xi_{p(l)}| < r_l$. Имеем:

$$\bar{n}(\Lambda) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{p(l)}{r_l} \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{p(l)}{|\xi_{p(l)}|} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{|\xi_p|}.$$

Таким образом,

$$\bar{n}(\Lambda) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{|\xi_p|}, \{\xi_p\}_{p=1}^{\infty} = \Lambda_0(\Lambda) \quad (1)$$

Аналогично получаем равенства

$$\underline{n}(\Lambda) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{|\xi_p|}, n(\Lambda) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{|\xi_p|}, \{\xi_p\}_{p=1}^{\infty} = \Lambda_0(\Lambda).$$

Рассмотрим еще одну важную характеристику числовой последовательности, которую ввел Д. Поля [1] для положительных последовательностей. Ее называют максимальной плотностью $n^0(\Lambda)$. Она определяется следующим образом:

$$n^0(\Lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} n^0(\Lambda, \delta), n^0(\Lambda, \delta) = \frac{\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} n(r, \Lambda) - n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

С учетом леммы из [2, гл. VI, § E3] определение $n^0(\Lambda)$ корректно, поскольку предел существует.

Лемма 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Тогда, если Λ – измеримая последовательность, то $n(\Lambda) = n^0(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть Λ измерима. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda) - n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r} = \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda)}{\delta r} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r} = \\ & = \frac{n(\Lambda)}{\delta} - (1 - \delta) \frac{n(\Lambda)}{\delta} = n(\Lambda), \delta > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $n^0(\Lambda) = n(\Lambda)$. Лемма доказана.

Также отметим, что согласно лемме 2.1 в работе [3] верно следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Справедливы неравенства

$$\bar{n}(\Lambda) \leq n^0(\Lambda) \quad (2)$$

Замечание. Вообще говоря, неравенство в (2) может быть и строгим. Рассмотрим пример. Пусть

$$\Lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\lambda_k, 1\}_{k=k(m)}^{k(m+1)-1}, \lambda_{k(m)+j} = 10^m + j, 0 \leq j < k(m+1) - k(m), m \geq 1,$$

$$k(1) = 1, k(m+1) - k(m) = 10^{m-1}, m > 1.$$

Непосредственным подсчетом получаем соотношения: $\bar{n}(\Lambda) \leq 9^{-1}$, $n^0(\Lambda) = 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Говорят ([4], гл. II, §1), что Λ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех ψ, φ за исключением, возможно, счетного множества Φ_Λ существует предел

$$n(\Lambda(\Gamma(\psi, \varphi))) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda(\Gamma(\psi, \varphi)))}{r}, \psi, \varphi \notin \Phi_\Lambda.$$

Множество Φ_Λ состоит из тех и только тех φ , для которых

$$\inf_{\alpha > 0} \bar{n}(\Lambda(\Gamma(\varphi - \alpha, \varphi + \alpha))) > 0.$$

Пусть K – выпуклый компакт с опорной функцией

$$H_T(\varphi) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \varphi \in \mathbb{R},$$

и w, z – точки его границы ∂K . Символом $s(w, z, K)$ обозначим длину дуги границы компакта K , которая соединяет точки w и z . Движение от w к z осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Положим

$$L(\varphi, K) = \partial K \cap l(\varphi, K), l(\varphi, K) = \{z: \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_K(\varphi)\}$$

$l(\varphi, K)$ – опорная прямая компакта K . Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ множество $L(\varphi, K)$ может быть точкой (которую обозначим $z(\varphi)$), а может – отрезком. Например, если в качестве K взять окружность или овал, то при любом значении φ множество $L(\varphi, K)$ является точкой. Если множество K – квадрат $\{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$, то, например, для $\varphi = 0$ множество $L(\varphi, K)$ будет отрезком, который совпадет с «правой» стороной этого квадрата. Если $L(\varphi, K)$ – отрезок, то множество $\Phi(K)$ направлений φ является не более чем счетным. Пусть

$$S_K(\psi, \varphi) = \sup_{w \in L(\psi, K), z \in L(\varphi, K)} s(w, z, K).$$

Если $\psi, \varphi \notin \Phi(K)$, то $S_K(\psi, \varphi) = s(z(\psi), z(\varphi), K)$.

Мы рассмотрели величины, характеризующие распределение точек последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ по плоскости (глобальные характеристики). Теперь рассмотрим одну локальную характеристику Λ .

Следуя работам [5–6] положим

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}, q_\Lambda^k(z, \delta) = \prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), m \neq k} \left(\frac{z - \lambda_m}{3\delta|\lambda_m|} \right)^{n_m}.$$

Если круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит точек λ_k ($\lambda_m \neq \lambda_k$), то полагаем $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$ ($q_\Lambda^k(z, \delta) \equiv 1$).

Пусть $z, \lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ и $\delta \in (0, 1)$. Оценим модуль каждого сомножителя функции q_Λ в круге $B(w, \delta|w|)$:

$$\left| \frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right| \leq \frac{2\delta|w|}{3\delta|\lambda_k|} \leq \frac{2|w|}{3|w|(1 - \delta)} = \frac{2}{3(1 - \delta)},$$

Здесь мы учли, что $|\lambda_k| \geq |w| - \delta|w|$. Тогда

$$\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leq 1, z, \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \delta \in (0, 1/3)$$

Кроме того, очевидно, верно неравенство

$$\frac{|\lambda - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geq 1, \lambda \notin B(w, 5\delta|w|), \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \delta \in (0, 1/3).$$

Из определения q_Λ^k имеем:

$$\begin{aligned} \ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| &= \sum_{\substack{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), \\ m \neq k}} n_m \ln \frac{|\lambda_k - \lambda_m|}{3\delta|\lambda_m|} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), \\ m \neq k}} n_m \ln \frac{\delta|\lambda_k|}{3\delta(1 - \delta)|\lambda_k|} = \\ &= \ln \frac{1}{3(1 - \delta)} \sum_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|), m \neq k} n_m = \\ &= -\ln(3(1 - \delta))(n_\Lambda(\lambda_k, \delta) - n_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, если $\delta_1 \leq \delta_2$ и $B(w_1, \delta_1|w_1|) \subset B(w_2, \delta_2|w_2|)$, то сомножители, определяющие $q_\Lambda(z, w_1, \delta_1)$ после замены δ_1 на δ_2 становятся частью сомножителей определяющих $q_\Lambda(z, w_2, \delta_2)$. Таким образом, если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$, $z \in B(\lambda_k, \delta_2|\lambda_k|)$ и $B(w_1, \delta_1|w_1|) \subset B(w_2, \delta_2|w_2|)$, с учетом (3) получаем

$$|q_\Lambda(z, w_1, \delta_1)| \geq |q_\Lambda(z, w_2, \delta_2)|.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$|q_\Lambda^k(z, \delta_1)| \geq |q_\Lambda^k(z, \delta_2)|, z \in B(\lambda_k, \delta_2|\lambda_k|), 0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3.$$

Положим

$$\mathcal{S}_\Lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{S}_\Lambda(\delta), \mathcal{S}_\Lambda(\delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{|\lambda_k|}.$$

Это определение корректно, т.к. в силу последнего неравенства функция $\mathcal{S}_\Lambda(\delta)$ монотонна, т.е. предел всегда существует. Из (4) следует, что $\mathcal{S}_\Lambda \leq 0$. Величина $\mathcal{S}_\Lambda$ называется индексом конденсации, впервые была введена А.С. Кривошеевым в 2004 году. Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева ([7–8], гл. II, §3). Как мы увидим далее, самым «хорошим» случаем является случай, когда $\mathcal{S}_\Lambda = 0$.

Пусть D – выпуклая область в комплексной плоскости. Символом $H(D)$ обозначим пространство функций, аналитических в D , с топологией

равномерной сходимости на компактах. Рассмотрим последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такую, что система функций $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}, k \geq 1, n = 0, \dots, n_k - 1$, не полна в пространстве $H(D)$. Через $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в этом пространстве линейной оболочки указанной системы. Подпространство $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ является нетривиальным и замкнутым в $H(D)$. Оно инвариантно относительно оператора дифференцирования (Λ – его кратный спектр, а $\mathcal{E}(\Lambda)$ – совокупность собственных и присоединенных функций в $\mathcal{W}(\Lambda, D)$).

По построению система функций $\mathcal{E}(\Lambda)$ является полной в подпространстве $\mathcal{W}(\Lambda, D)$. В этом случае говорят, что это подпространство допускает спектральный синтез. В качестве примера подобного подпространства можно взять совокупность решений однородного уравнения свертки $\mu(g(z+w)) \equiv 0$ (где $\mu \neq 0$ – линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$). В силу теоремы 6.1 из работы [10] пространство решений всегда допускает спектральный синтез. Отметим, что линейные дифференциально-разностные (в частности дифференциальные и разностные) уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечно-го порядков являются уравнениями свертки.

По определению все функции из подпространства $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ являются пределами последовательностей линейных комбинаций функций системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Задача представления каждой функции $g \in \mathcal{W}(\Lambda, D)$ рядом экспоненциальных мономов

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \quad (5)$$

называется проблемой фундаментального принципа в инвариантном подпространстве. Если $n_k = 1, k \geq 1$, то ряд (5) становится рядом экспонент. Если дополнительно λ_k – положительные числа, то ряд (5) превращается в ряд Дирихле, частным случаем которого является ряд Тейлора.

В работе [10, теорема 3.2] получено полное решение этой проблемы в случае ограниченной области. Приведем результат.

Теорема 3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D – ограниченная выпуклая область такие, что $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ нетривиально. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Каждую функцию $g \in \mathcal{W}(\Lambda, D)$ можно представить в виде ряда (5);

2) $S_\Lambda = 0$ и существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\overline{D})$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство

$$n^0(\Lambda(\Gamma(\psi, \varphi))) \leq \frac{S_{\overline{D}}(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi}.$$

Как видим, основную роль в решение проблемы фундаментального принципа в случае ограниченной области сыграли такие характеристики, как индекс конденсации, максимальная плотность в угле и длина дуги границы компакта.

Приведем еще один результат, который касается задачи о распределении особых точек суммы рядов Дирихле на границе их области сходимости. Как известно, областью сходимости ряда Дирихле, т.е. ряда вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z), \quad (6)$$

является полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < \gamma\}$, $\operatorname{Re} z = \gamma$ – граничная прямая этой полуплоскости.

Теорема 4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $\tau > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Каждая сумма ряда (6), не являющаяся целой функцией, на каждом отрезке длины $2\pi\tau$ прямой сходимости имеет хотя бы одну особую точку.

2. $S_\Lambda = 0$ и $n^0(\Lambda) \leq \tau$.

Здесь необходимым и достаточным условием наличия хотя бы одной особой точки на отрезке определенной длины на прямой сходимости ряда (6) является одновременное выполнение двух условий: равенство нулю индекса конденсации и конечность максимальной плотности последовательности показателей.

И, наконец, рассмотрим примеры различных числовых последовательностей и подсчета введенных выше характеристик для них. Проанализируем возможность применения теорем 3 и 4 к этим последовательностям.

Примеры. 1. Рассмотрим последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных вещественных чисел, удовлетворяющих условию $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$.

Для начала подсчитаем максимальную плотность.

$$n^0(\Lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \Lambda) - n((1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\frac{\delta r}{h})}{\delta r} = \frac{1}{h}.$$

Поскольку все точки λ_k лежат на одном луче, то $n^0(\Lambda) = n^0(\Lambda(\Gamma(\psi, \varphi))) \leq \frac{1}{h}$ для всех ψ, φ . Следовательно, максимальная плотность конечна.

Теперь выясним, чему равен индекс конденсации для этой последовательности.

$$\begin{aligned} \ln |q_\Lambda^n(\lambda_n, \delta)| &= \ln \prod_{l=1}^m \left(\frac{\lambda_k - \lambda_l}{3\delta \lambda_l} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^s \ln \frac{\lambda_k - \lambda_{k-l}}{3\delta \lambda_{k-l}} + \sum_{l=1}^p \ln \frac{\lambda_{k+l} - \lambda_k}{3\delta \lambda_{k+l}}, \end{aligned}$$

где s – количество точек λ_{k-l} в интервале $(\lambda_k - \delta \lambda_k, \lambda_k)$, а p – количество точек λ_{k+l} в интервале $(\lambda_k, \lambda_k + \delta \lambda_k)$ и $m = s + p$. Поскольку неравенство $S_\Lambda \leq 0$ всегда выполнено, то для того, чтобы доказать, что $S_\Lambda = 0$, нужно полученную сумму оценить

снизу. Так как $\lambda_k - \lambda_{k-l} \geq lh$ и $\lambda_{k+l} - \lambda_k \geq lh$, то имеем

$$\begin{aligned} \ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| &\geq \sum_{l=1}^s \ln \frac{lh}{3\delta\lambda_{k-l}} + \sum_{l=1}^p \ln \frac{lh}{3\delta\lambda_{k+l}} \geq \left| \frac{\lambda_{k-l} < \lambda_k,}{\lambda_{k+l} < \lambda_k(1+\delta)} \right| \\ &\geq \sum_{l=1}^s \ln \frac{lh}{3\delta\lambda_k} + \sum_{l=1}^p \ln \frac{lh}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} = \ln \frac{h}{3\delta\lambda_k} + \\ &\quad + \ln \frac{2h}{3\delta\lambda_k} + \dots + \ln \frac{sh}{3\delta\lambda_k} + \\ &\quad + \ln \frac{h}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} + \ln \frac{2h}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} + \dots + \ln \frac{ph}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} = \\ &= \ln \left(\frac{h}{3\delta\lambda_k} \cdot \dots \cdot \frac{sh}{3\delta\lambda_k} \right) + \ln \left(\frac{h}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} \cdot \dots \cdot \frac{ph}{3\delta(1+\delta)\lambda_k} \right) = \\ &= \ln \frac{s! h^s}{(3\delta\lambda_k)^s} + \ln \frac{p! h^p}{(3\delta(1+\delta)\lambda_k)^p} \geq \ln \frac{s! h^s}{(3\delta\lambda_k)^s} + \ln \frac{p! h^p}{(6\delta\lambda_k)^p} \geq \\ &\geq \ln \left(\frac{s}{3} \right)^s h^s + \ln \left(\frac{p}{6} \right)^p h^p = s \ln \frac{sh}{9\delta\lambda_k} + p \ln \frac{ph}{18\delta\lambda_k}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$.

Тогда

$$\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{\lambda_k} \geq \frac{s}{\lambda_k} \ln \frac{sh}{9\delta\lambda_k} + \frac{p}{\lambda_k} \ln \frac{ph}{18\delta\lambda_k}.$$

Рассмотрим функцию $x \ln \frac{xh}{9\delta}$ при $x = \frac{s}{\lambda_k}$. Эта

функция убывает при $x < \frac{9\delta}{hl}$. Следовательно, имеем

$$\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{\lambda_k} \geq \frac{\delta}{h} \ln \frac{\delta h}{9\delta h} + \frac{\delta}{h} \ln \frac{\delta h}{18\delta h} \geq \frac{2\delta}{h} \ln \frac{1}{18} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем, что $S_\Lambda = 0$.

Итак, для нашей последовательности индекс конденсации равен нулю и максимальная плотность в угле не превосходит $\frac{1}{h}$. Значит, для этой последовательности можно применить теоремы 3 и 4. По теореме 3 для того, чтобы каждую функцию $g \in \mathcal{W}(\Lambda, D)$ можно было представить в виде ряда (5), необходимо и достаточно, чтобы максимальная плотность в угле (φ_1, φ_2) не превосходила длины дуги компакта $\bar{D}$, которая зажата этим же углом, деленной на 2π . Поскольку в нашем случае $n^0(\Lambda(\Gamma(\psi, \varphi))) \leq \frac{1}{h}$, то $S_{\bar{D}}(\varphi_1, \varphi_2) \geq \frac{2\pi}{h}$. Это означает, что область D должна содержать прямолинейный участок на границе, длина которого не меньше, чем $\frac{2\pi}{h}$. Ниже показана область такого вида

В нашем случае отрезок AB должен быть перпендикулярен вещественной оси и для того, чтобы фундаментальный принцип был справедлив, необходимо и достаточно, чтобы длина отрезка AB была не меньше, чем $\frac{2\pi}{h}$.

Замечание 1. В случае, когда точки последовательности Λ расположены на двух лучах, то таких прямолинейных участков должно быть ровно

два. Если же максимальная плотность последовательности Λ равна нулю, то в качестве D можно взять произвольную ограниченную выпуклую область, например, круг или овал.

Замечание 2. В примере 1 точки последовательности Λ расположены на вещественной оси. Это было сделано для удобства восприятия. На самом деле, они могут располагаться на каком-то одном любом луче в комплексной плоскости. Их всегда можно спроецировать на вещественную ось и тогда снова получаем последовательность из примера 1.

2. Теперь рассмотрим последовательность из примера 1, но теперь λ_k — комплексные числа.

Пусть $\lambda_k = m + in$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда минимальное расстояние между любыми двумя точками будет равно единице.

Найдем S_Λ . С учетом (4) и того, что количество точек нашей последовательности в круге $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ примерно равно радиусу этого круга, т.е. примерно равно $\pi\delta^2|\lambda_k|^2$, имеем

$$\begin{aligned} \ln \left| \prod_{\substack{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \\ m \neq k}} \frac{|\lambda_k - \lambda_m|}{3\delta|\lambda_m|} \right| &\leq \\ &\leq -\ln(3(1-\delta))(\pi\delta^2|\lambda_k|^2 + o(\delta|\lambda_k|) - 1) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_\Lambda &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{|\lambda_k|} \leq \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\ln(3(1-\delta))(\pi\delta^2|\lambda_k|^2 + o(\delta|\lambda_k|) - 1)}{|\lambda_k|} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} -\ln(3(1-\delta))\pi\delta^2|\lambda_k| + \frac{\ln(3(1-\delta))}{|\lambda_k|} \\ &\quad + \frac{o(\delta|\lambda_k|)}{|\lambda_k|} = -\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_\Lambda = -\infty$.

Здесь можно отметить, что характеристика S_Λ учитывает не только расстояние между точками в круге, но и их количество. Видим, что в этом случае на равенство $S_\Lambda = -\infty$ повлияло достаточно большое количество точек в круге, а не расстояние между ними. Поскольку в предыдущем примере $S_\Lambda = 0$.

Теперь подсчитаем максимальную плотность.

$$\begin{aligned} n^0(\Lambda) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2 + o(r) - \pi(1-\delta)^2 r^2 - o((1-\delta)r)}{\delta r} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi r(1 - (1-\delta)^2)}{\delta} = +\infty. \end{aligned}$$

Видим, что к такой последовательности нельзя применить теорему 3.

3. Пусть $\lambda_k = 2^k$ и $n_k = 2^{k-1}$.

Подсчитаем плотности. Возможны три случая:

1) $r = 2^k + \varepsilon$; 2) $r = 2^k$;

3) $r = 2^k - \varepsilon$. В первом случае количество точек с учетом кратностей, попавших в круг

$B(0, r)$, равно $2^k - 1$. Во втором и третьем случаях $-2^{k-1} - 1$.

4) Тогда

$$\begin{aligned}\bar{n}(\Lambda) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k - 1}{2^k + \varepsilon} = 1, \underline{n}(\Lambda) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1} - 1}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1} - 1}{2^k - \varepsilon} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Получаем, что $\bar{n}(\Lambda) \neq \underline{n}(\Lambda)$, следовательно, последовательность не измерима.

Теперь подсчитаем минимальную и максимальную плотности. Сразу можно заметить, что минимальная плотность равна нулю, так как ни одна точка λ_k не попадает в интервал $((1 - \delta)r, r)$ при $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ и $\underline{n}_0$ всегда не отрицательна.

Пусть $r = 2^k + \varepsilon$ и $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда

$$\bar{n}^0(\Lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k-1}}{\delta(2^k + \varepsilon)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} = +\infty.$$

Индекс конденсации для этой последовательности равен нулю, т.к. в круг $B(2^k, \delta 2^k)$ при $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ не попадает ни одной точки отличной от точки $\lambda_k = 2^k$. Поэтому $q_{\Lambda}^k(\lambda_k, \delta) \equiv 1$ и, следовательно, $\ln|q_{\Lambda}^k(\lambda_k, \delta)| = 0$.

Получаем, что для этой последовательности нельзя применять теорему 3. Но, если уменьшить кратность, например, взять $n_k = k$, то для такой последовательности получим нулевую максимальную плотность. И применение теоремы 3 становится возможным.

4. Пусть $\lambda_{2k-1} = 2^k - \varepsilon(k)$, $\lambda_{2k} = 2^k$, где $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Очевидно, что $n(\Lambda) = 0$, последовательность измерима. Следовательно, с учетом леммы 1, максимальная плотность равна нулю. Подсчитаем S_{Λ} .

Если $\delta \in (0, \frac{1}{3})$, то в интервал $(2^k - \delta 2^k, 2^k + \delta 2^k)$ попадает только одна точка $2^k - \varepsilon(k)$. Имеем

$$q_{\Lambda}^{2k}(\lambda_{2k}, \delta) = \frac{2^k - (2^k - \varepsilon(k))}{3\delta(2^k - \varepsilon(k))} = \frac{\varepsilon(k)}{3\delta(2^k - \varepsilon(k))}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\ln|q_{\Lambda}^{2k}(\lambda_{2k}, \delta)|}{2^k} &= \frac{\ln \frac{\varepsilon(k)}{3\delta(2^k - \varepsilon(k))}}{2^k} = \\ &= \frac{\ln \varepsilon(k)}{2^k} - \frac{\ln 3\delta(2^k - \varepsilon(k))}{2^k}.\end{aligned}$$

Вторая дробь в последнем выражении стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим первую дробь.

Рассмотрим различные значения $\varepsilon(k)$:

1) $\varepsilon(k) = \frac{1}{k}$, тогда $\frac{\ln \frac{1}{k}}{2^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $S_{\Lambda} = 0$;

2) $\varepsilon(k) = e^{-2^k}$, тогда $\frac{\ln e^{-2^k}}{2^k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $S_{\Lambda} = -1$;

3) $\varepsilon(k) = e^{-k}$, тогда $\frac{\ln e^{-k}}{2^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $S_{\Lambda} = 0$.

Из этого примера видно, что стремления к нулю расстояния между соседними точками недостаточно для отрицательности числа S_{Λ} .

В случаях 1) и 3) к последовательности можно применять теоремы 3 и 4. В теореме 3 граница области D может не содержать прямолинейного участка в направлении перпендикулярном вещественной оси (все точки последовательности расположены на ней), поскольку последовательность имеет нулевую плотность. А с учетом теоремы 4 у каждой суммы ряда (б), которая не является целой функцией, все точки прямой сходимости будут являться особыми.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №18-11-00002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pólya G. Untersuchungen über Lucken und Singularitäten von potenzreihen // Math. Z. 1929. Vol. 29. P. 549–640.
2. Koosis P. The logarithmic integral, I. First paperback edition, with corrections. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. 606 pp.
3. Абдулнагимов А. И., Кривошеев А. С. Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28. №4. С. 1–46.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
5. Кривошеев А. С. Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств // Докл. РАН. 2003. Т. 389. №4. С. 457–460.
6. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. Математика. 2004. Т. 68. №2. С. 71–136.
7. Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris: Gauthier-Villars, 1933. 320 pp.
8. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 176 с.
9. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях. Матем. сб. 1972. Т. 88(130). №1. С. 3–30.
10. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Матем. заметки. 2016. Т. 99. №5. С. 684–697.

Поступила в редакцию 03.12.2020 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.1.1

DIFFERENT CHARACTERISTICS OF NUMERICAL SEQUENCES

© O. A. Krivosheeva

*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.**Phone: +7 (347) 229 96 65.
Email: kriolessya2006@yandex.ru*

In this paper, different characteristics of numerical sequence such as upper density, lower density, angular and maximal densities, condensation index (A. S. Krivosheev) are considered. The importance of these characteristics in solving the problems of representation of exponential series and exponential monomials of functions from invariant subspaces with respect to differentiation of analytic functions in convex domains of the complex plane (the fundamental principle problem) and on the distribution of singular points of sums of exponential series with positive indicators on the boundaries of their convergence domains is shown. The author of the paper presents some results in solving problems of representation of exponential series and exponential monomials of functions from invariant subspaces with respect to differentiation of analytic functions in convex domains of the complex plane and the distribution of singular points on the boundary of convergence domain of series of exponential monomials. Several typical examples of different sequences and the possibility of applying the criteria for the validity of the fundamental principle and the presence of singular points on the convergence line of the above-mentioned series for these sequences are given. In this paper, examples of various sequences are used to calculate such important characteristics as the maximum density and the condensation index of A. S. Krivosheev.

Keywords: maximal density, condensation index, convex domain, series of exponential monomials.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Pólya G. Math. Z. 1929. Vol. 29. Pp. 549–640.
2. Koosis P. The logarithmic integral, I. First paperback edition, with corrections. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
3. Abdalnagimov A. I., Krivosheev A. S. Algebra i analiz. 2016. Vol. 28. No. 4. Pp. 1–46.
4. Levin B. Ya. Raspredelenie kornei tselykh funktsii [Distribution of roots of entire functions]. Moscow: Gostekhizdat, 1956.
5. Krivosheev A. S. Dokl. RAN. 2003. Vol. 389. No. 4. Pp. 457–460.
6. Krivosheev A. S. Izv. RAN. Ser. Matematika. 2004. Vol. 68. No. 2. Pp. 71–136.
7. Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris: Gauthier-Villars, 1933.
8. Leont'ev A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent [Entire functions. Exponential series]. Moscow: Nauka, 1983.
9. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariantnye podprostranstva analiticheskikh funktsii. II. Spektral'nyi sintez na vypuklykh oblastyakh. Matem. sb. 1972. Vol. 88(130). No. 1. Pp. 3–30.
10. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Matem. zametki. 2016. Vol. 99. No. 5. Pp. 684–697.

Received 03.12.2020.