УДК 539

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.1.2

ОБ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА

© Э. В. Семка

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
Россия, 394064 г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54-А.

*Email: semka_elya@mail.ru

На примере условия пластичности Шмидта–Ишлинского изложен характерный для кусочно-линейных условий пластичности алгоритм решения задачи термопластического состояния диска в приближении плоского напряженного состояния. Исследуется зависимость некоторых параметров модели от температуры. Рассматриваемый алгоритм может использоваться для проведения конкретных инженерных расчетов.

Ключевые слова: идеальное упругопластическое тело, тепловое воздействие, математическое моделирование, упругопластическое тело, плоское напряженное состояние, кусочно-линейные условия пластичности, термоупругопластичность.

Введение

Ряд авторов [2; 4] рассматривает условие пластичности Шмидта–Ишлинского. В некоторых работах рассматриваются кусочно-линейные условия пластичности общего вида, учитывающие пластическую сжимаемость [2–3]. Использование гладких функций пластичности (например, Мизеса) приводит к построению приближенных аналитических или численных решений [1; 9–10]. Фактически во всех новейших работах учитывается зависимость параметров модели от температуры, например [5–7; 9–10].

Теоретическое изучение объекта позволяет прогнозировать его поведения, используя выбранную математическую модель. Изменение состояния объекта обусловлено изменением значения внешних параметров, характеризующих внешние воздействия на объект. Поэтому внешние параметры можно называть параметрами управления состоянием объекта. Зависимости между искомыми параметрами состояния – уравнения состояния, являются составной частью выбираемой математической модели. Внешние параметры и модули объекта являются исходными данными при построении алгоритма решения конкретной задачи, определения искоемых параметров состояния модели.

Постановка задачи

Рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния тонкого упругопластического диска, испытывающего тепловое и силовое воздействие. В центральной части кругового диска $0 \leq \rho \leq a$ температурное поле однородное $T = T_a$, на границе диска $\rho = b$ задана температура $T_b = 0$ и давление p_b . Торцевые границы диска теплоизолированные.

Исходные соотношения

Упругие деформации выражаются через напряжения согласно закону Гука

$$E\varepsilon_\rho^e = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, E\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, E\varepsilon_z^e = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta), \quad (1)$$

Рассматривается аддитивная форма связи полных упругих, пластических и деформаций при свободном тепловом расширении

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^p + \varepsilon_\rho^e + \alpha T, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\theta^e + \alpha T, \varepsilon_z = \varepsilon_z^p + \varepsilon_z^e + \alpha T. \quad (2)$$

Окружная и радиальная компоненты тензора полных деформации выражаются через перемещения по формулам

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \quad (3)$$

Условие совместности деформаций

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0 \quad (4)$$

и уравнение равновесия

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0. \quad (5)$$

Выбирается кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$\left\{ F = \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho + \gamma_i \sigma_z \} = k = k_0(1 - \zeta T), \right. \quad (6)$$

$$\left. \sigma_z = 0. \right.$$

где ζ – коэффициент, определяющий зависимость предела пластичности от температуры, k_0 – предел пластичности при начальной температуре.

Приращения пластических деформаций связаны соотношениями, следующими из ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{d\alpha_i} = \frac{d\varepsilon_\rho^p}{d\beta_i} = \frac{d\varepsilon_z^p}{d\gamma_i}. \quad (7)$$

Допустимые значения коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ определяются исходя из требований симметрии поверхности пластичности [5]. Параметры модели $k_0, \zeta, \nu, \alpha, E$ считаются постоянными величинами.

В рассматриваемом случае распределение температуры [6]

$$T = T_a, f = \begin{cases} 1, & 0 \leq \rho \leq a, \\ \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}, & a \leq \rho \leq b. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и ниже все величины являются безразмерными. Для безразмерных величин сохраняются обозначения соответствующих размерных величин. В качестве масштаба напряжений выбирается k_0 – предел пластичности при начальной температуре, за масштаб длины принимается a – радиуса центральной части диска, масштаб температуры равен 1°C .

Переход в пластическое состояние

Функция пластичности (9)

$$F = \max_{i=1+n} \{\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho\} - k_0(1 - \zeta T_a f) = 0, \quad (9)$$

может принимать наибольшее значение на границе $\rho = b$, или в области $0 \leq \rho \leq a$, или одновременно на границе $\rho = b$ и в области $0 \leq \rho \leq a$.

Пусть k – предел пластичности при одноосном растяжении. Область диска $0 \leq \rho \leq a$ переходит в пластическое состояние, когда давление на границе $\rho = a$ достигает значения предела пластичности

$$p_a = k = k_0(1 - \zeta T_a). \quad (10)$$

Тогда из (11)

$$\sigma_\theta = \sigma_\rho = -p_a = \frac{\alpha T_a E}{2b^2} \left(2 \int_0^b f \rho d\rho - b^2 \right) - p_b \quad (11)$$

и (10) следует, что область $0 \leq \rho \leq a$ переходит в предельное состояние, когда температура в центре диска

$$T_a = T_{in} = \frac{2b^2(k_0 - p_b)}{2b^2\zeta + \alpha E(b^2 - 2 \int_0^b f \rho d\rho)} \quad (12)$$

где T_{in} – температура внутренней границы диска.

Принимая гипотезу о естественном состоянии [5] на границе $\rho = b$ режим пластичности зависит от значения давления p_b . Используя формулы (11; 13–15)

$$\sigma_\rho = -\frac{\alpha T_a E}{\rho^2} \int_{c_{in}}^\rho f \rho d\rho + A + \frac{B}{\rho^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\alpha T_a E}{\rho^2} \left(\int_{c_{in}}^\rho f \rho d\rho - \rho^2 f \right) + A + \frac{B}{\rho^2}, \quad (14)$$

$$A = \frac{\alpha T_a E}{\rho^2} \int_0^b f \rho d\rho - p_b, B = 0, \quad (15)$$

находим температуру внешней границы T_{ex}

$$T_a = T_{ex} = \frac{(k_0 + (\alpha_i + \beta_i)p_b)b^2}{2\alpha E \alpha_i 2 \int_0^b \rho f d\rho} = \frac{2b^2(k_0 + (\alpha_i + \beta_i)p_b) \ln(b/a)}{\alpha E \alpha_i (b^2 - a^2)}, \quad (16)$$

при которой на внешней границе диска будет выполняться режим

$$\alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho = k.$$

а)

б)

Рис. 1. Графики T_{ex} и T_{in} до точки их пересечения $\rho = b_k$:
а) $\zeta = 0.0008$, б) $\zeta = 0$.

На рис. 1 приведены графики T_{ex} и T_{in} до точки их пересечения $\rho = b_k$ для коэффициентов $\alpha_i = 1, \beta_i = -0.5$, и давления $p_b = 0$.

Результаты, представленные на рис. 1 показывают, что:

- 1) когда $b \leq b_k$ и $T_a = T_{ex}$ только граница диска $\rho = b$ переходит в пластическое состояние;
- 2) когда $b > b_k$ и $T_a = T_{in}$ только область $0 \leq \rho \leq a$ переходит в пластическое состояние;
- 3) когда $b = b_k$ и $T_a = T_{ex} = T_{in}$ одновременно в пластическое состояние переходит область $0 \leq \rho \leq a$ и граница диска $\rho = b$.

Также приведенный график способствуют введению следующей классификации:

- 1) диски малого радиуса, когда $b < b_k$;
- 2) диски большого радиуса, когда $b > b_k$;
- 3) диски среднего радиуса, когда $b = b_k$.

Появление внешней пластической области при наличии внутренней пластической области

Рассмотрим случай, когда радиус диска $b > b_k$. Выполненное выше исследование показывает, когда $T_a = T_{in}$, внешний контур диска $\rho = b$ переходит в пластическое состояние радиус упругопластической границы $c_{in} = a$. Если $T_a > T_{in}$, то $c_{in} > a$.

В области $0 \leq \rho \leq a$ будет выполняться условие полной пластичности $\sigma_\theta = \sigma_\rho = -k_0(1 - \zeta T_a)$.

Из условия непрерывности напряжений следует, что в области $a \leq \rho \leq c_{in}$ может выполняться режим $\sigma_\theta + \sigma_\rho = -2k$, для которого, учитывая условия непрерывности напряжений на границе $\rho = a$, напряжения находим по формулам.

$$\sigma_\rho = -k_0 \left(1 - \frac{\zeta T_a}{2 \ln(b/a)} \left(2 \ln(b/\rho) - \frac{a^2}{\rho^2} + 1 \right) \right),$$

$$\sigma_\theta = -k_0 \left(1 - \frac{\zeta T_a}{2 \ln(b/a)} \left(2 \ln(b/\rho) + \frac{a^2}{\rho^2} - 1 \right) \right).$$

В области упругого состояния диска $c_{in} \leq \rho \leq c_{ex}$, учитывая условия непрерывности напряжений

на упругопластической границе $\rho = c_{in}$, напряжения будут определяться (17)

$$\sigma_\rho = -\frac{\alpha T_a E}{4 \ln(b/a)} \left(2 \ln \left(\frac{\rho}{c_{in}} \right) + \frac{a^2}{\rho^2} - 1 \right) + \frac{k_0 \zeta T_a}{2 \ln(b/a)} \left(2 \ln \left(\frac{b}{c_{in}} \right) + \frac{c_{in}^2 - a^2}{\rho^2} \right) - k_0, \quad (17)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\alpha T_a E}{4 \ln(b/a)} \left(2 \ln \left(\frac{\rho}{c_{in}} \right) - \frac{a^2}{\rho^2} + 1 \right) + \frac{k_0 \zeta T_a}{2 \ln(b/a)} \left(2 \ln \left(\frac{b}{c_{in}} \right) + \frac{a^2 - c_{in}^2}{\rho^2} \right) - k_0. \quad (18)$$

Обозначим через T_{a1} значение температуры ядра диска, когда выполняется равенство $c_{ex} = b$. В зависимости от значения внешнего давления p_b на границе $\rho = b$ может выполняться один из трех режимов пластичности: $\frac{1}{2} \sigma_\theta - \sigma_\rho = k$, $\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_\rho = k$, $\sigma_\theta + \sigma_\rho = -2k$.

Если на границе $\rho = b$ выполняется режим пластичности $\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_\rho = k$, то давление на внешней границе диска может изменяться в диапазоне $-\frac{2}{3} k_0 \leq p_b \leq \frac{2}{3} k_0$.

Равенство $c_{ex} = b$ будет выполняться, если напряжения, определяемые по формулам (17–18), удовлетворяют условиям

$$\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0, \sigma_\theta|_{\rho=b} - \frac{1}{2} \sigma_\rho|_{\rho=b} = k. \quad (19)$$

Тогда T_{a1} и p_b определяем по формулам (20) и (21)

$$T_a = T_{a1} = \frac{4b^2(k_0 - p_b) \ln(b/a)}{2b^2 \ln(b/c_{in})(2k_0 \zeta + \alpha E) + 2k_0 \zeta (c_{in}^2 - a^2) + \alpha E (c_{in}^2 - b^2)}, \quad (20)$$

$$\frac{4(2k_0 - p_b)(2k_0 \zeta (a^2 - c_{in}^2) + \alpha E (b^2 - c_{in}^2))}{2b^2 \ln(b/c_{in})(2k_0 \zeta + \alpha E) + 2k_0 \zeta (c_{in}^2 - a^2) + \alpha E (c_{in}^2 - b^2)} - 2k_0 - p_b = 0. \quad (21)$$

Когда $T_a > T_{a1}$ во внешней пластической зоне $c_{ex} \leq \rho \leq b$ будет выполняться режим $\frac{1}{2} \sigma_\theta - \sigma_\rho = k$.

Напряжения в области $c_{ex} \leq \rho \leq b$ будут определяться по формулам

$$\sigma_{\rho 1} = \frac{2k_0 T_a}{\ln(b/a)} \left(\left(\ln \left(\frac{b}{c_{ex}} \right) + 2 \right) \sqrt{\frac{c_{ex}}{\rho}} - \ln \left(\frac{b}{\rho} \right) - 2 \right) + 2k_0 - (2k_0 + p_e) \sqrt{\frac{c_{ex}}{\rho}},$$

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{2k_0 T_a}{\ln(b/a)} \left(\left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b}{c_{ex}} \right) + 1 \right) \sqrt{\frac{c_{ex}}{\rho}} - \ln \left(\frac{b}{\rho} \right) - 1 \right) + 2k_0 - (2k_0 + p_e) \sqrt{\frac{c_{ex}}{\rho}},$$

где p_e – давление на упругопластической границе $\rho = c_{ex}$. Используя граничное условие $\sigma_\rho|_{\rho=b} = 0$ определяем p_e (24)

$$p_e = \frac{2k_0 \zeta T_a}{\sqrt{c_{ex}} \ln(b/a)} \left(\sqrt{c_{ex}} \left(\ln \left(\frac{b}{c_{ex}} \right) + 2 \right) - 2\sqrt{b} \right) - 2k_0 + (2k_0 + p_b) \sqrt{\frac{b}{c_{ex}}}.$$

Результаты расчетов

Выполненное выше исследование позволяет построить алгоритм решения задачи в зависимости от значения радиуса диска, температуры в центре диска и давления на границе. При проведении расчетов будем полагать, что величины $k_0 = 1$, $a = 1$, $\alpha E = 0.012$, $\zeta = 0.0008$, $p_b = 0$ безразмерны. На рис. 2–5 приведены графики распределения напряжений, эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений.

a)

b)

Рис. 2. а) распределения напряжений, б) эквивалентных напряжений
 $T_a = 580.5$, $b = 2.25$, $p_b = 0$, $c_e = 1.38$.

Рис. 3. Годографа вектора напряжений
 $T_a = 580.5$, $b = 2.25$, $p_b = 0$, $c_e = 1.38$.

a)

b)

Рис. 4. а) распределения напряжений,
б) эквивалентных напряжений
 $T_a = 350.5, b = 2.25, p_b = 0, c_e = 1.33$.

Рис. 5. Годографа вектора напряжений
 $T_a = 350.5, b = 2.25, p_b = 0, c_e = 1.33$.

a)

b)

Рис. 6. а) распределения напряжений,
б) эквивалентных напряжений
 $T_a = 219.5, b = b_k = 3.3096, p_b = 0$.

Рис. 7. Годографа вектора напряжений
 $T_a = 219.5, b = b_k = 3.3096, p_b = 0$.

Выводы

Характер распределения напряжений и режимы пластичности остаются неизменными для всех значений температуры $T_a > T_{a1}$, о чем свидетельствует вид годографа напряжений. Вид годографа напряжений показывает невозможность исчезновения зоны упругого состояния диска.

Графики для эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений используем для контроля полученного решения, рассматривая поведение объекта от изменения внешних параметров. Вопросы построения алгоритма решения рассматриваемой выше конкретной задачи характерны для большинства аналогичных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Poryadkovyy analiz i smezhnyye voprosy matematicheskogo modelirovaniya: tezisy dokladov XIV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Tsey, 3–8 iyulya 2017 g.). Vladikavkaz. 2017. P. 137–138.
2. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Saransk. 2017. P. 236–247.
3. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati akademika L. I. Sedova. Moscow. 2017. P. 33–35.

4. Dats E., Murashkin E. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, "WCE 2016 – World Congress on Engineering 2016". P. 69–72.
5. Kachanov L. M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. MIR Publishers, Moscow. 1974. 482 p.
6. Timoshenko S. P. Goodier J. N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill. 1970. 506 p.
7. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й. Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению. Доклады АН. 2012.
8. Артемов М. А., Якубенко А. П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска. Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2014. .V. 1. P. 30–38.
9. Семка Э. В., Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Фатхудинов Д. Б. О нейтральном нагружении диска при тепловом и силовом воздействиях // Инженерный вестник Дона. 2018. №2. URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2018/4970>
10. Семка Э. В., Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г., Фатхудинов Д. Б. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника. Инженерный вестник Дона. 2018. №2. URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2018/4973>

Поступила в редакцию 20.04.2020 г.

После доработки – 11.06.2020 г.

ABOUT THE ALGORITHM FOR CALCULATING THE STATE PARAMETERS OF A THERMOPLASTIC DISK

© E. V. Semka

*Russian Air Force Military Educational and Scientific Center,
Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin
54A Starykh Bolshevikov Street, 394064 Voronezh, Russia.*

Email: semka_elya@mail.ru

Theoretical study of an object allows predicting its behavior using the selected mathematical model. The change in the state of the object is due to a change in the value of external parameters characterizing the external effects on the object. Therefore, external parameters can be called the state control parameters of the object. Determined by the formulation of the problem, the target parameters of the state of the object may be dependent. Dependencies between the target state parameters (equations of state) are an integral part of the chosen mathematical model. External parameters and modules of the object are the initial data when constructing an algorithm for solving a specific problem, determining the target parameters of the model state. Using an example of the Schmidt-Ishlinsky plasticity condition, an algorithm for solving the problem of the thermoplastic state of the disk in the approximation of a plane stress state, characteristic for piecewise-linear plasticity conditions, is described. The dependence of some model parameters on temperature is considered. The algorithm under discussion can be used for specific engineering calculations. The performed study allows the researcher to construct an algorithm for solving the problem depending on the value of the radius of the disk, temperature in the center of the disk, and pressure at the boundary. The paper presents numerical calculations that show the nature of the stress distribution and plasticity regimes. The author uses the plots for equivalent stresses and the hodograph of the stress vector to control the solution obtained, considering the behavior of the object from changes in external parameters. The issues of constructing an algorithm for solving the particular problem considered above are characteristic for most similar problems.

Keywords: ideal elastoplastic body, thermal effect, mathematical modeling, elastoplastic body, plane stress state, piecewise linear plasticity conditions, thermoelasticity.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Artemov M. A., Baranovskiy E. S. Poryadkovyy analiz i smezhnyye voprosy matematicheskogo modelirovaniya: tezisy dokladov XIV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Tsey, 3–8 iyulya 2017 g.). Vladikavkaz. 2017. Pp. 137–138.
2. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Saransk. 2017. Pp. 236–247.
3. Artemov M. A., Baranovskiy E. S., Pereyaslavskaya I. I. Sovremennyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy: tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati akademika L. I. Sedova. Moscow. 2017. Pp. 33–35.
4. Dats E., Murashkin E. Lecture Notes in Engineering and Computer Science. WCE 2016 – World Congress on Engineering 2016. Pp. 69–72.
5. Kachanov L. M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. MIR Publishers, Moscow. 1974.
6. Timoshenko S. P. Goodier J. N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill. 1970.
7. Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzeng I. R. Reshenie termouprugoplasticheskoi zadachi dlya tonkogo diska iz plasticheskoi szhimaemogo materiala, podverzhennogo termicheskomu nagruzheniyu. Doklady AN. 2012.
8. Artemov M. A., Yakubenko A. P. Vestnik Voronezhskogo gos. un-ta. Ser.: Fizika. Matematika. 2014. . Vol. 1. Pp. 30–38.
9. Semka E. V., Artemov M. A., Baranovskii E. S. Inzhenernyi vestnik Dona. 2018. No. 2. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4970>
10. Semka E. V., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Berdzenishvili G. G., Fatkhudinov D. B. O povedenii uprugoplasticheskogo diska pod deistviem teplovogo istochnika. Inzhenernyi vestnik Dona. 2018. No. 2. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4973>

Received 20.04.2020.

Revised 11.06.2020.