УДК 532.5

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.2.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

© Р. Р. Юлмухаметова*, А. А. Мусин, Л. А. Ковалева

Башкирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел./факс: +7 (347) 229 96 43.

*Email: Regina.you@mail.ru

В данной работе проводится численное исследование ламинарного течения суспензии, состоящей из твердых сферических частиц одинакового размера и вязкой несжимаемой жидкости, в плоском канале. Математическая модель процесса сформулирована в одножидкостном приближении в трехмерной постановке и реализована в программном пакете OpenFOAM. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными. По результатам многопараметрических исследований получены зависимости времени формирования профиля заданной концентрации от объемного содержания твердых частиц в закачиваемой суспензии. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования продвижения фронта концентрации в зависимости от концентрации исходной суспензии без проведения сложных численных расчетов.

Ключевые слова: суспензия, вязкая несжимаемая жидкость, твердые сферические частицы, ламинарное течение, плоский канал.

Введение

Течение суспензии в каналах разной геометрии встречается во многих технологических процессах. Например, при применении одной из самых популярных технологий увеличения нефтеотдачи – гидравлического разрыва пласта. Технология заключается в создании высокопроводимой трещины в пласте для обеспечения притока добываемого флюида. В качестве рабочей жидкости обычно применяют растворы на водной основе, а расклинивающего материала – проппант, проблема транспортировки которого в трещине связана с гравитационным осаждением, утечкой жидкости из трещины в пласт и закупоркой трещин [1]. Теоретические и экспериментальные исследования в этой области преимущественно посвящены изучению движения смеси взвешенных твердых частиц и жидкости в моделях трещины гидроразрыва пласта. При численном моделировании течений концентрированных суспензий важно учитывать такие явления, как взаимодействие между частицами, их миграция, режимы течений, а также гравитационные силы [2].

Среди методов моделирования течений суспензий можно выделить два подхода: одножидкостный и двухконтинуальный [3–5]. Различия между ними существенны. При одножидкостном подходе (диффузионное приближение) несущая жидкость и взвешенные в ней твердые частицы рассматриваются как единое целое. Данный подход применим, когда устойчивые потоки характеризуются малым временем динамической релаксации частиц по сравнению с гидродинамическим временем или малым числом Стокса [5]. При двухконтинуальном подходе решается полная система двухскоростной модели. Однако для большинства

практических целей последнее не только требует больших вычислительных затрат, но и не является необходимым. В то же время одножидкостная модель, несмотря на свою кажущуюся простоту, позволяет провести технические расчеты с достаточно высокой достоверностью без привлечения больших вычислительных мощностей. Это объясняет широкое применение данного подхода как отечественными, так и зарубежными исследователями.

В частности, вышеупомянутый подход был применен в работе [6] при моделировании течения низкоконтрированной суспензии. Сравнение с экспериментальными данными показало хорошую согласованность результатов моделирования. В данной работе проведена модификация математической модели и алгоритма численного решения задачи для случая течения высококонтрированной суспензии.

Постановка задачи. Рассматривается нестационарное течение суспензии, состоящей из твердых сферических частиц и вязкой несжимаемой жидкости, в канале прямоугольной формы. Схема расчетной области представлена на рис. 1.

Рис. 1. Схема расчетной области.

Математическое моделирование. Математическая модель включает уравнение неразрывности для суспензии, систему уравнений движений суспе-

нии, уравнение сохранения массы в виде конвективно-диффузионного уравнения переноса для объемной концентрации частиц [5; 7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \Sigma + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_p \rho_f}{\rho} (1 - C) C \vec{u}_r \vec{u}_r \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \vec{u}) = -\nabla \cdot (C(1 - f_p) \vec{u}_r), \quad (3)$$

где $\rho = \rho_p C + \rho_f(1 - C)$ – плотность суспензии; $\vec{u}$ – среднемассовая скорость суспензии; p – среднее давление суспензии; C – объемная концентрация твердых частиц; $f_p = \rho_p/\rho$ – массовая доля дисперсной фазы; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; $\Sigma = \mu[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - 2/3(\nabla \cdot \vec{u})I]$ – тензор напряжений в суспензии; $\vec{u}_r$ – относительная скорость между фазами; μ – коэффициент эффективной вязкости суспензии; I – единичная матрица. Здесь и далее индекс p обозначает параметры, относящиеся к твердой дисперсной фазе, f – к жидкой непрерывной фазе.

Эффективный коэффициент вязкости суспензии рассчитывается согласно эмпирической зависимости, предложенной Кригером [8]:

$$\mu = \mu_f \left(1 - \frac{C}{C_{max}} \right)^{-\beta}, \quad (4)$$

где μ_f – коэффициент динамической вязкости несущей жидкости; C_{max} – максимальная плотность упаковки частиц суспензии; β – эмпирический коэффициент.

Относительная скорость между фазами определяется по формуле, учитывающей гравитационные силы при различной плотности частиц и несущей фазы и силы, связанные с изменением сдвиговых напряжений в рассматриваемой системе при движении в канале [5]:

$$\vec{u}_r = f^h \left(\vec{u}_{st} - \frac{d^2(\rho_p - \rho_f)}{18\mu_f} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d^2}{18\mu_f C} \nabla \Sigma_p \right), \quad (5)$$

$$\vec{u}_{st} = \frac{d^2(\rho_p - \rho_f)g}{18\mu_f}, \quad (6)$$

$$\Sigma_p = -\gamma \nabla(\mu_f a_n) - K_\gamma \mu_f a_n \nabla \gamma, \quad (7)$$

$$K_\gamma = \left(2 - \frac{K_\eta}{K_c} \right) \left(1 - \frac{C}{C_{max}} \right)^p + \frac{K_\eta}{K_c}, \quad (8)$$

где $\vec{u}_{st}$ – скорость осаждения по Стоксу; d – диаметр частиц; Σ_p – тензор напряжений в среде частиц; γ – скорость сдвига потока суспензии; $a_n = 0.75 \left(\frac{C}{C_{max}} \right)^2 \left(1 - \frac{C}{C_{max}} \right)^{-2}$ – эмпирическая функция [9]; K_η и K_c – эмпирические коэффициенты, отношение которых определяется выражением [10]:

$$\frac{K_c}{K_\eta} = 1.042C + 0.1142.$$

Функция стесненного осаждения определяется по формуле [5]:

$$f^h = (1 - C) \frac{\mu_f}{\mu} \left(1 - \left(\frac{C}{C_{max}} \right)^2 \right). \quad (9)$$

В начальный момент времени канал заполнен жидкостью, система находится в покое:

$$C(x, y, z, t = 0) = 0, \quad (10)$$

$$\vec{u}(x, y, z, t = 0) = 0. \quad (11)$$

Граничные условия.

Для объемной концентрации на твердых стенках ставится условие непротекания:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (12)$$

На входе в канал задаются постоянные концентрация и скорость:

$$C(x = 0, y, z, t) = C_{in}, \quad (13)$$

$$\vec{u}(x = 0, y, z, t) = \vec{u}_{in}. \quad (14)$$

Для касательной к стенке компоненты скорости суспензии задается условие частичного скольжения на стенке:

$$\beta_w d \left(1 - \frac{C}{C_{max}} \right) C \frac{\mu}{\mu_f} \frac{\partial u}{\partial n} = u, \quad (15)$$

где β_w – коэффициент проскальзывания, зависящий от радиуса частиц [11].

Для нормальной к стенке компоненты скорости суспензии задается условие непротекания на твердой стенке:

$$u n_w = 0, \quad (16)$$

где n_w – нормаль к поверхности стенки.

Для концентрации и скорости на выходе из канала заданы условия протекания:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0. \quad (18)$$

Результаты моделирования. Система уравнений (1)–(3) с замыкающими соотношениями (4)–(9) и краевыми условиями (10)–(18) решается методом контрольного объема в программном пакете OpenFOAM. Для валидации математической модели и тестирования алгоритма решения было проведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными по определению профилей скорости и концентрации потока жидкости со сферическими твердыми частицами в плоском прямоугольном канале, приведенными в работе [12].

Расчеты проводились при следующих параметрах: $\rho_f = \rho_p = 1190$ кг/м³, $\mu_f = 0.48$ Па·с, $d = 55.4 \cdot 10^{-3}$ мм, $C_{max} = 0.68$, $\beta = 0.9$, $\beta_w = 1$. Размеры канала $300 \times 2 \times 25.4$ мм. Скорость закачки суспензии $u_{in} = 0.00853$ м/с. Концентрация частиц в закачиваемой в канал суспензии варьировалась.

На рис. 2–3 представлено сравнение профилей скорости и распределения концентрации частиц поперек канала на расстоянии 11.2 см от входа, полученных в результате численного моделирования и экспериментальных исследований, приведенных в работе [12], для концентраций частиц 0.3 и 0.4 в момент времени 30 сек.

Из рисунков видно, что профили скорости и концентрации, полученные путем моделирования, достаточно точно описывают результаты эксперимента при выбранных концентрациях. При этом с увеличением концентрации частиц на входе более чем 0.4 ед. наблюдается лишь качественное совпадение результатов. Это согласуется с результатами работы [5] и может быть связано с недостаточно точным выбором эмпирических коэффициентов, входящих в математическую модель, что является предметом дальнейших исследований.

Рис. 2. Распределение скорости (а) и концентрации частиц (б) в плоском канале на расстоянии 11.2 см от входа в момент времени 30 с для суспензии при начальной концентрации $C_m = 0.3$: точки – эксперимент, линия – модель.

Рис. 3. Распределение скорости (а) и концентрации частиц (б) в плоском канале на расстоянии 11.2 см от входа в момент времени 30 с для суспензии при начальной концентрации $C_m = 0.4$: точки – эксперимент, линия – модель.

В результате сопоставления результатов математического моделирования и экспериментальных данных можно сделать вывод, что модель применима для получения прогнозов поведения суспензии. Далее проведено моделирование динамики распределения концентрации твердых сферических

частиц в потоке жидкости в плоском канале в зависимости от концентрации закачиваемой суспензии.

На рис. 4 приведены профили концентрации частиц, полученные в момент времени 30 с для разных значений начальной концентрации частиц на входе в канал.

Рис. 4. Профили концентрации частиц в момент времени 30 с для разных значений начальной концентрации частиц: 1 – 0.1, 2 – 0.2, 3 – 0.3, 4 – 0.4, 5 – 0.5.

Рис. 5. Распределение концентрации частиц при $C_{in} = 0.1$ вдоль центра канала в разные моменты времени: 1 – 1 с, 2 – 5 с, 3 – 10 с, 4 – 20 с, 5 – 30 с.

Рис. 6. Профиль концентрации частиц при $C_{in} = 0.1$ на расстоянии 11.2 см от входа в канал в различные моменты времени: 1 – 10 с, 2 – 20 с, 3 – 30 с.

Из рисунка видно, что качественная картина распределения частиц практически не меняется при вариации значения исходной концентрации закачиваемой суспензии. При всех значениях начальной концентрации происходит миграция частиц от стенок к центру канала, при увеличении концентрации закачиваемой суспензии меняются лишь количественные характеристики. При одинаковом шаге по концентрации кривые в центре сгущаются. Это связано с нелинейным увеличением эффективной вязкости суспензии с ростом концентрации.

На рис. 5 представлено распределение концентрации твердых сферических частиц вдоль центра канала в разные моменты времени при закачке суспензии с исходной концентрацией 0.1.

По мере продвижения частиц наблюдается увеличение их концентрации в центре канала, что связано, с одной стороны, с формированием параболического профиля течения, с другой – с миграцией частиц от стенок к центру канала, вызванной сдвиговыми напряжениями в потоке. Это приводит к тому, что по мере продвижения суспензии на определенных расстояниях от входа концентрация частиц в центре канала равна исходной концентрации.

При этом распределение концентрации частиц поперек канала претерпевает изменения. В частности, на рис. 6 представлены профили концентрации твер-

дых сферических частиц на расстоянии 11.2 см от входа в различные моменты времени.

Приведенные на рис. 6 кривые показывают, что у стенок канала концентрация вначале равна нулю, а затем постепенно возрастает до формирования стабильного распределения концентрации. При этом в центре канала концентрация стремится к максимальному значению. В приведенном на рис. 6 примере этот максимум (0.18) достигается за время равное примерно 20 с, а установление стабильного распределения концентрации – за 30 с.

Аналогичные результаты были получены для исходных концентраций 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 и 0.6. Обнаружено, что независимо от начальной концентрации закачиваемой суспензии существует такой момент времени, когда профили концентраций повторяются на заданном расстоянии от входа в канал. По результатам многопараметрических исследований построены кривые зависимости времени формирования профиля заданной концентрации от объемного содержания твердых частиц в закачиваемой суспензии. Рассматривались профили на расстоянии 11.2 см от входа с заданным максимальным значением в центре канала равным: 1 – 0.07, 2 – 0.12, 3 – 0.16 (рис. 7).

Рис. 7. Зависимость времени формирования профиля концентрации на расстоянии 11,2 см от входа с заданным максимальным значением в центре канала равным: 1 – 0,07, 2 – 0,12, 3 – 0,16.

Видно, что с увеличением объемного содержания твердых частиц в закачиваемой суспензии уменьшается время формирования профиля концентрации с заданным максимальным значением в центре канала. Тогда как с увеличением этого максимального значения время увеличивается. Полученные результаты можно использовать для прогнозирования продвижения фронта твердых частиц в зависимости от их исходной концентрации без проведения сложных численных расчетов.

Заключение

Проведено моделирование динамики распределения концентрации твердых сферических частиц в потоке жидкости в плоском канале. Показано, что при любой начальной концентрации закачиваемой в канал суспензии происходит миграция частиц от стенок к центру канала. Это приводит к увеличению концентрации частиц в центре канала по мере продвижения фронта частиц и появлению параболического профиля течения.

В результате многопараметрических исследований обнаружено, что с изменением объемного содержания частиц в закачиваемой суспензии существует такое время, при котором распределение концентрации в поперечном сечении канала повторяется на заданном расстоянии от входа. Это связано с параболическим профилем течения и миграцией частиц от стенок к центру канала. Установлено, что это время уменьшается при увеличении концентрации частиц в закачиваемой суспензии и увеличивается с ростом максимального значения концентрации в центре канала.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90157.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксаков А. В., Борщук О. С., Желтова И. С., Дедурин А. В., Калуджер З., Пестриков А. В., Торопов К. В. Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта: от математической модели к программной реализации // Нефтяное хозяйство. 11. 2016. С. 35–40.
2. Соковнин О. М., Загоскина Н. В., Загоскин С. Н. Гидродинамика движения частиц, капель и пузырей в неньютоновских жидкостях. М.: Наука, 2019. 215 с.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 2. 464 с.
4. Боронин С. А., Осипцов А. А. Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва // Док. АН. 2010. Т. 431. №6. С. 758–761.
5. Гаврилов А. А., Шебелев А. В. Одножидкостная модель смеси для ламинарных течений высококонцентрированных суспензий // Изв. РАН. МЖГ. 2018. №2. С. 84–98.
6. Zamula Yu. S., Iulmukhametova R. R., Musin A. A., Shashkov A. V., Kovaleva L. A. Experimental and numerical modeling of a viscous incompressible fluid flow with dispersed particles in a rectangular channel // Journal of Physics: Conference Series 1359 012039. 2019. DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012039
7. Manninen M., Taivassalo V., Kallio S. On the mixture model for multiphase flow // VTT Publications. 288. Technical Research Centre of Finland. 1996. 67 p.
8. Krieger I. M. Rheology of monodisperse lattice // Adv. Colloid Interface Sci. 1972. V. 3. P. 111–136.
9. Morris J. F., Boulay F. Curvilinear flows of non-colloidal suspensions: the role of normal stresses // J. Rheol. 1999. V. 43. P. 1213–1237.
10. Tetlow N., Graham A. L., Ingber M. S., Subia S. R., Mondy L. A., Altobelli S. A. Particle migration in a Couette apparatus: experiment and modeling // J. Rheol. 1998. V. 42. P. 307–327.
11. Ingber M. S., Graham A. L., Mondy L. A., Fang Z. An improved constitutive model for concentrated suspensions accounting for shear-induced particle migration rate dependence on particle radius // Int. J. Multiphase Flow. 2009. V. 35. P. 270–276.
12. Lyon M. K., Leal L. G. An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. Part 1. Monodisperse systems // J. Fluid Mech. 1998. V. 363. P. 25–56.

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.

NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR SUSPENSION FLOW IN FLAT CHANNEL

© R. R. Iulmukhametova*, A. A. Musin, L. A. Kovaleva

*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

Phone: +7 (347) 229 96 43.

**Email: regina.you@mail.ru*

The suspension flow in channels of different geometry is encountered in many technological processes. For example, when using one of the most popular technologies for enhanced oil recovery – hydraulic fracturing. The technology consists of creating a highly conductive fracture in the formation to ensure the flow of the produced fluid. The problem of proppant transportation in the fracture is associated with gravity settling, fluid leakage from the fracture into the formation, and fracture plugging. The process of the laminar flow of a dispersed system consisting of solid spherical particles of the same size and a viscous incompressible fluid in a flat channel is studied in this work. The mathematical model is formulated in a one-fluid approximation in a three-dimensional formulation and implemented in the OpenFOAM software package. The results of mathematical modeling compared with experimental data are presented. It is shown that at any initial concentration of the suspension pumped into the channel, particles migrate from the walls to the center. This leads to an increase in the concentration of particles in the center and to the appearance of a parabolic flow profile. Based on the results of multivariate studies, the dependences of the formation time of the profile of a given concentration on the initial value of the suspension concentration are obtained. The results of numerical simulation may be used to predict the advance of the concentration front depending on the consistency of the initial suspension without performing complex numerical calculations.

Keywords: suspension, viscous incompressible liquid, solid spherical particles, laminar flow, flat channel.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Aksakov A. V., Borshchuk O. S., Zheltova I. S., Dedu-rin A. V., Kaludzhner Z., Pestrikov A. V., Toropov K. V. Neftyanoe khozyaistvo. 11. 2016. Pp. 35–40.
2. Sokovnin O. M., Zagoskina N. V., Zagoskin S. N. Gidrodinamika dvizheniya chastits, kapel' i puzrei v nen'yutonovskikh zhidkostyakh [Hydrodynamics of the motion of particles, drops and bubbles in non-Newtonian fluids]. Moscow: Nauka, 2019.
3. Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka, 1987. Vol. 1. 2.
4. Boronin S. A., Osipov A. A. Dok. AN. 2010. Vol. 431. No. 6. Pp. 758–761.
5. Gavrilov A. A., Shebelev A. V. Izv. RAN. MZhG. 2018. No. 2. Pp. 84–98.
6. Zamula Yu. S. Journal of Physics: Conference Series 1359 012039. 2019. DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012039
7. Manninen M., Taivassalo V., Kallio S. VTT Publications. 288. Technical Research Centre of Finland. 1996.
8. Krieger I. M. Adv. Colloid Interface Sci. 1972. Vol. 3. Pp. 111–136.
9. Morris J. F., Boulay F. J. Rheol. 1999. Vol. 43. Pp. 1213–1237.
10. Tetlow N., Graham A. L., Ingber M. S., Subia S. R., Mondy L. A., Altobelli S. A. J. Rheol. 1998. Vol. 42. Pp. 307–327.
11. Ingber M. S., Graham A. L., Mondy L. A., Fang Z. Int. J. Multiphase Flow. 2009. Vol. 35. Pp. 270–276.
12. Lyon M. K., Leal L. G. J. Fluid Mech. 1998. Vol. 363. Pp. 25–56.

Received 27.05.2021.