УДК 517.53

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.2.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С НУЛЯМИ НА МНИМОЙ ОСИ

© Т. В. Шевцова

Юго-Западный государственный университет
Россия, 305040 г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Тел.: +7 (910) 217 20 20.

Email: dec-ivt-zao@mail.ru

В работах Майлза, Шиа, Эдрея и Фукса для целых функций конечного порядка ρ , $1 < \rho < \infty$, с положительными нулями была получена двусторонняя оценка верхнего предела $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{m(r, f)}$, из которой, в частности, следует, что эта величина стремится к нулю, если $\rho \rightarrow \infty$. Эдрей и Фукс высказали гипотезу, что для целой функции f бесконечного порядка с положительными нулями эта величина равна нулю. Эта гипотеза была опровергнута Майлзом, который показал, что она верна при дополнительных предположениях, именно, если при переходе к пределу при $r \rightarrow \infty$ исключить множество значений r нулевой логарифмической меры или вместо $m(r, f)$ взять L_p -норму, $p > 1$, функции $\ln^+ |f(re^{i\theta})|$. Доказательство использовало утверждение, что если f – целая функция бесконечного порядка с положительными нулями, то ее нижний порядок также равен бесконечности. В настоящей работе мы распространяем это утверждение на пространства аналитических функций в верхней полуплоскости $C_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексного переменного z .

Пусть AK – пространство аналитических функций $f(z)$ в C_+ таких, что $\ln |f(re^{i\theta})|$ имеет положительную гармоническую мажоранту в каждой ограниченной области полуплоскости C_+ . Доказывается, что если все нули истинно аналитической функции бесконечного порядка в верхней полуплоскости распределены на мнимой полуоси, то ее нижний порядок также равен бесконечности. Метод доказательства основан на теории коэффициентов Фурье мероморфных функций в полуплоскости, разработанный К. Г. Малютиным в начале XXI в.

Ключевые слова: истинно аналитическая функция, бесконечный порядок, коэффициенты Фурье.

Введение

Для целых функций конечного порядка ρ , $1 < \rho < \infty$, с положительными нулями известна такая оценка

$$0.9 \frac{|\sin \pi \rho|}{1 + \rho} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{m(r, f)} \leq A(\rho),$$

где $A(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$.

Первое неравенство получено в работах [1–2], второе – в работах [3–4]. Поэтому долгое время казалась правдоподобной гипотеза, выдвинутая Эдреем и Фуксом [5], что для целой функции f бесконечного порядка с положительными нулями выполняется

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{m(r, f)} = 0.$$

В работе [6] (см. также [7]) показано, что это верно (даже когда нули функции f лежат на конечной системе лучей), если при переходе к пределу при $r \rightarrow \infty$ исключить множество значений r , относительно малое в определенном смысле, или же если вместо $m(r, f)$ взять L_p -норму, $p > 1$, функции $\ln^+ |f(re^{i\theta})|$. Кроме того, доказано, что если f – целая функция бесконечного порядка с положительными нулями, то ее нижний порядок также равен бесконечности.

В настоящей работе методом коэффициентов Фурье мероморфных функций [8–11] мы доказываем аналогичный результат для функций, аналити-

ческих в верхней полуплоскости комплексного переменного. Задачи, связанные с оценками величины

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{m(r, f)}$$

для функций конечного порядка в верхней полуплоскости изучались в работах [12–14].

Вопросы, связанные с распределением нулей и полюсов мероморфных функций, а также с распределением мер субгармонических функций, рассматривались в работах Б. Н. Хабибуллина и его учеников [15–20], а также в работах [21–23].

Пространства аналитических функций в полуплоскости

Символами $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ будем обозначать множества натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Обозначим через $C_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z . Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a ; через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью C_+ ; $\Omega_+ = \Omega \cap C_+$; $\bar{G}$ означает замыкание множества G . Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1, r_2) = \{z: r_1 \leq |z| \leq r_2, \operatorname{Im} z > 0\}$ означает замкнутое полукольцо.

Пусть AK – пространство аналитических функций $f(z)$ в C_+ таких, что $\ln |f(re^{i\theta})|$ имеет положительную гармоническую мажоранту в каждой ограниченной области полуплоскости C_+ . Функции из

пространства AK обладают следующими свойствами [24]:

а) $\ln|f(re^{i\theta})|$ имеет некасательный предел $\ln|f(t)|$ почти всюду на вещественной оси,
 $\ln|f(re^{i\theta})| \in L^1_{loc}(-\infty, +\infty)$;

б) на вещественной прямой существует знакопеременная мера $\nu_f = \nu$ такая, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b \ln|f(t + iy)| dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}(\nu(\{a\}) - \nu(\{b\})).$$

Мера ν называется *границной мерой* функции f ,

с) $d\nu(t) = \ln|f(t)|dt + d\sigma(t)$,

где $\sigma := \sigma_f$ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функций $f \in AK$ определим, следуя [24], полную меру $\lambda_f := \lambda$ равенством

$$\lambda(G) = 2\pi \int_{C_+(0, R)} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \nu(G \cap \mathbf{R}),$$

где $\mu := \mu_f$ – риссовская мера функции f .

Для функций $f \in AK$ справедливо представление в полукруге $z \in C_+(0, R)$:

$$\begin{aligned} \ln|f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, R)} \frac{G(z, \zeta)}{\operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) + \\ &+ \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} \ln|f(Re^{i\varphi})| d\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $G(z, \zeta)$ – функция Грина полукруга $C_+(0, R)$, $\partial G/\partial n$ – означает производную по внутренней нормали, ядро под знаком двойного интеграла продолжается на вещественную ось по непрерывности при $|t| \leq R$.

Аналитическая в C_+ функция f называется *истинно аналитической*, если

$$\lim_{z \rightarrow t, z \in C_+} \ln|f(z)| \leq 0$$

для любого вещественного числа $t \in \mathbf{R}$. Пространство истинно аналитических функций обозначим через JA . Полная мера функции $f \in JA$ является положительной мерой, чем и обоснован термин «истинно аналитическая функция».

Приведем определение порядка аналитической в C_+ функции $f(z)$. Для заданной меры λ обозначим через $\lambda(t) = \lambda(C(0, t))$. Введем следующие характеристики функции f :

$$\begin{aligned} m(r, f) &:= \frac{1}{r} \int_0^\pi \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi, N(r, f, r_0) := \\ &:= \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt, \end{aligned}$$

где $r_0 > 0$ – произвольное фиксированное число, (при желании можно считать $r_0 = 1$), которое в обозначениях (если это не вызывает недоразумений) мы будем опускать (например, вместо $N(r, f, r_0)$ писать $N(r, f)$ и т.п.), $\ln^+ a = \max\{0, \ln a\}$ ($a > 0$).

Порядком функции $f \in JA$ называется число

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r m(r, f))}{\ln r}.$$

Если этот предел равен бесконечности, то порядок функции равен бесконечности. В этом случае функция $f(z)$ называется *функцией бесконечного порядка*. В противном случае функция $f(z)$ называется *функцией конечного порядка*.

Соответственно, *нижним порядком функции* $f \in JA$ называется число

$$\underline{\rho} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r m(r, f))}{\ln r}.$$

Справедливо соотношение [24]:

$$m(r, f) = m(r, 1/f) + N(r, f, r_0). \quad (2)$$

Коэффициенты Фурье функции $f \in JA$ определяются формулой [8–9]:

$$c_k(r, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})| \sin k\theta d\theta, k \in \mathbf{N}.$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} c_k(r, f) &= \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) + \\ &+ \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_k = c_k(r_0, f)$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

Из определения коэффициентов Фурье $c_k(r, f)$ следует неравенство:

$$|c_k(r, f)| \leq \frac{2k}{\pi} \int_0^\pi |\ln|f(re^{i\theta})|| \sin \theta d\theta, k \in \mathbf{N}.$$

Отсюда, с учетом равенства (2), получаем

$$\frac{\pi}{4k} |c_k(r, f)| \leq r m(r, f), k \in \mathbf{N} \quad (4)$$

Действительно, (4) следует из соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2kr} |c_k(r, f)| &\leq \frac{1}{r} \int_0^\pi (\ln^+ |f(re^{i\theta})| + \ln^+ |1/f(re^{i\theta})|) \sin \theta d\theta = \\ &= m(r, f) + m(r, 1/f) \leq 2m(r, f). \end{aligned}$$

Функции с полной мерой на мнимой полуоси

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. Если $f \in JA$ – истинно аналитическая функция бесконечного порядка с полной мерой λ на мнимой полуоси $Y_+ = \{z: \operatorname{Im} z = y > 0\}$, то ее нижний порядок также равен бесконечности.

Доказательство. Так как мера λ сосредоточена на мнимой полуоси Y_+ , то, во-первых, $0 \notin \operatorname{supp} \lambda$; во-вторых, из формул (3) для коэффициентов Фурье функции f находим:

$$\begin{aligned} c_k(r, f) &= \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \sin \frac{\pi k}{2} \int_{r_0}^r \tau^{k-1} d\lambda(\tau) + \\ &+ \frac{r^k}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \int_0^r \frac{d\lambda(\tau)}{\tau^{k+1}} - \frac{1}{r^k \pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \int_0^r \tau^{k-1} d\lambda(\tau), k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Выбирая r_0 так, чтобы $C(0, r_0) \notin \operatorname{supp} \lambda$, получим отсюда:

$$c_k(r, f) = \alpha_k r^k + \frac{1}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \int_{r_0}^r \left[\frac{r^k}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{r^k} \right] d\lambda(t),$$

$$k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Интегрируя дважды по частям в формулах (5), получим:

$$c_k(r, f) = \alpha_k r^k + \frac{2}{\pi} \tilde{N}(r) \sin \frac{\pi k}{2} +$$

$$+ \frac{(k+1)r^k}{\pi} \sin \frac{\pi k}{2} \int_{r_0}^r \frac{\tilde{N}(t)}{t^{k+1}} dt -$$

$$+ \frac{k-1}{\pi r^k} \sin \frac{\pi k}{2} \int_{r_0}^r t^{k-1} \tilde{N}(t) dt,$$

$$k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

$$\text{где } \tilde{N}(t) = \int_{r_0}^t \frac{\lambda(t)}{t^2} dt.$$

Так как

$$\frac{k-1}{\pi r^k} \sin \frac{\pi k}{2} \int_{r_0}^r t^{k-1} \tilde{N}(t) dt \leq \frac{(k-1)\tilde{N}(r)}{\pi r^k} \int_0^r t^{k-1} dt \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{N}(r)}{\pi}, k \in \mathbb{N},$$

то из (6) при $k = 1 + 4\pi j, j = 1, 2, \dots$, получаем

$$\frac{c_k(r, f)}{r^k} \geq \alpha_k + \frac{(k+1)}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\tilde{N}(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{\tilde{N}(r)}{\pi r^k}, k \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Если функция $\tilde{N}(r)$ имеет бесконечный порядок, то интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, неограничен при $r \rightarrow \infty$, т.к.

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\tilde{N}(t)}{t^{k+1}} dt \geq \int_r^{\infty} \frac{\tilde{N}(t)}{t^{k+1}} dt \geq \frac{\tilde{N}(r)}{\pi r^k}, k \in \mathbb{N},$$

а правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно большой при подходящем выборе r . Учитывая это и неравенство (4), из (7) получаем требуемое утверждение.

Если $\tilde{N}(r)$ имеет конечный порядок, то существуют положительные числа $K > 0$ и $\rho > 0$ такие, что $\tilde{N}(r) \leq Kr^\rho$ для всех $r > 0$. Можно считать ρ нецелым. Отсюда следует, что

$$K2^\rho r^\rho \geq \tilde{N}(2r) \geq \int_r^{2r} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt \geq \lambda(r) \int_r^{2r} \frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda(r)}{2r},$$

т.е.

$$\lambda(r) \leq K2^{\rho+1} r^{\rho+1}.$$

В этом случае из работы [9] следует, что существует функция $g \in JA$ порядка ρ с полной мерой λ .

Тогда функция $G = f/g \in JA$ и $\lambda_G \equiv 0$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если функция $G \in JA$ и ее полная мера $\lambda_G \equiv 0$, то $|G(z)| = \exp(\operatorname{Im} F(z))$, где $F(z)$ – целая вещественная функция.

Доказательство. Напомним [25], что целая функция F называется вещественной, если $F(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Так как полная мера функции G равна нулю, то из (1) следует, что при любом $R > 0$

$$\ln |G(z)| = \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} \ln |G(Re^{i\varphi})| d\varphi, z \in C_+(0, R).$$

В правой части стоит гармоническая в полукруге $C_+(0, R)$ функция, непрерывно продолжающаяся нулем на интервале $(-R, R)$. Поскольку R – произвольное положительное число, то функция $\ln |G(z)|$ является гармонической в полуплоскости C_+ , непрерывно продолжающейся нулем на вещественную ось. По принципу симметрии эта функция продолжается как гармоническая в нижней полуплоскости.

Таким образом, существует гармоническая во всей плоскости функция $h(z)$, обращающаяся в нуль на вещественной оси и такая, что $\ln |G(z)| = h(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $-h_1(z)$ – функция, гармонически сопряженная с функцией $h(z)$. Тогда $F(z) = h_1(z) + ih(z)$ есть целая функция, вещественная на вещественной оси и $|G(z)| = \exp(\operatorname{Im} F(z))$.

Лемма доказана.

Согласно лемме $|G(z)| = \exp(\operatorname{Im} F(z))$, где $F(z)$ – целая вещественная функция,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{R}.$$

Тот факт, что $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, доказывается почленным дифференцированием ряда Тейлора функции $F(z)$ в точке $z = 0$.

Если лишь конечное число $a_n z^n \neq 0$, то $F(z)$ – многочлен, следовательно G и f имеют конечный порядок, что противоречит условию.

Далее

$$c_n(r, G) = a_n r^n, n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, используя неравенство (4), получим

$$rm(r, G) \geq \frac{\pi}{4n} |c_n(r, G)| = \frac{\pi |a_n| r^n}{4n}, n \in \mathbb{N}.$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом фиксированном натуральном n , то это означает, что функция $G(z)$ имеет бесконечный нижний порядок.

Далее из элементарного неравенства $\ln^+(ab) \geq \ln^+ a - \ln^+ b$, справедливого при $b > 1$, получаем

$$rm(r, G) \leq rm(r, f) + rm(r, g).$$

Тогда и из неравенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rm(r, G) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} rm(r, f) + \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} rm(r, g),$$

из соотношений $\lim_{r \rightarrow \infty} rm(r, G) = \infty$,

$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} rm(r, g) \leq \rho < +\infty$ следует, что $\lim_{r \rightarrow \infty} rm(r, f) = \infty$.

Теорема доказана.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-01-00236.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. B., Shea D. P. An extremal problem in value distribution theory // Quart. J. Math. Oxford. 1973. V. 24. Pp. 377–383.

2. Miles J. B., Shea D. P. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value // *Duke Math. J.* 1976. V. 43. Pp. 171–186.
3. Edrei A., Fuchs W. The deficient of meromorphic functions of order less than one // *Duke Math. J.* 1960. V. 27. Pp. 233–249.
4. Edrei A., Fuchs W. Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions // *Proc. London Math. Soc.* 1962. V. 12. Pp. 315–344.
5. Hayman, Walter K., Lingham, Eleanor F. *Research problems in function theory*. AG: Springer Nature Switzerland, 2020. 284 p.
6. Miles J. B. On entire functions of infinite order with radially distributed zeros // *Pacif. J. Math.* 1979. V. 81. No 1. Pp. 131–157.
7. Кондратьев А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища школа, 1988. 196 с.
8. Malyutin K. G. Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane // *Sb.: Math.* 2001. V. 192. No 6. Pp. 843–861.
9. Malyutin K. G., Sadik N. Representation of subharmonic functions in a half-plane // *Sb.: Math.* 2001. V. 198. No 12. Pp. 1747–1761.
10. Malyutin K. G., Malyutina T. I. Fourier series and delta-subharmonic functions of zero-type in a half-plane // *Matematychni Studii.* 2008. V. 30. No 2. P. 132–138.
11. Malyutin K. G., Kabanko M. V. The meromorphic functions of completely regular growth on the upper half-plane // *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye nauki.* 2020. V. 30. Issue 3. Pp. 396–409.
12. Malyutin K. G., Revenko A. A. Extreme problems in the space of meromorphic functions of finite order in the half plane // *Matematychni Studii.* 2019. V. 52. No 2. Pp. 144–155.
13. Malyutin K. G., Revenko A. A. Extreme problems in the space of meromorphic functions of finite order in the half plane. II // *Matematychni Studii.* 2020. V. 54, No 2. Pp. 154–161.
14. Malyutin K. G., Sadik N. Extremal problems in the class of delta-subharmonic functions of finite order in a half-plane // *Siberian Math. J.* 2002. V. 43. No 5. Pp. 882–887.
15. Хабибуллин Б. Н., Шмелева, Абдуллина А. В. Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. II. Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче // *Алгебра и анализ.* 2020. Т. 32. №1. С. 208–243.
16. Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Б. Н. Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на ее рост // *Изв. вузов. Матем.* 2020. №5. С. 55–61.
17. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Distribution of Zeros of Exponential-Type Entire Functions with Constraints on Growth along a Line // *Math. Notes.* 2020. V. 108. No 4. Pp. 579–589.
18. Khabibullin B. N. Balayage of Measures with respect to (Sub-) Harmonic Functions // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2020. V. 41. No 11. Pp. 2179–2189.
19. Gabdrakhmanova L. A., Khabibullin B. N. A Small Intervals Theorem for Subharmonic Functions // *Russian Mathematics.* 2020. V. 64. No 9. Pp. 12–20.
20. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Growth of subharmonic functions along line and distribution of their Riesz measures // *Ufa Mathematical Journal.* 2020. V. 12. No 2. Pp. 35–49.
21. Гришин А. Ф., Мalyutina Т. И. Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // *Матем. физ., анализ, геом.* 2005. Т. 12. №1. С. 25–72.
22. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Integrals and indicators of subharmonic functions. I // *Chebyshevskii sbornik.* 2018. V. 19. No 2. Pp. 272–303.
23. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Integrals and indicators of subharmonic functions. II // *Chebyshevskii sbornik.* 2019. V. 20. No 4. Pp. 236–269.
24. Fedorov M. A., Grishin A. F. // *Mathematical Physics, Analysis and Geometry.* 1998. V. 1. No 3. Pp. 223–271.
25. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Providence. RI: Amer. Math. Soc., 1980. 536 p.

Поступила в редакцию 20.02.2021 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.2.3

ANALYTIC FUNCTIONS OF INFINITE ORDER ON THE HALF-PLANE WITH ZEROS ON IMAGINARY AXIS

© T. V. Shevtsova

Southwest State University
94 50 let Oktyabrya Street, 305040 Kursk, Russia.

Phone: +7 (910) 217 20 20.

Email: dec-ivt-zao@mail.ru

In the papers of Miles and Shea (Quart. J. Math. Oxford, 1973; Duke Math. J. 1976), Edrey and Fuchs (Duke Math. J., 1960; Proc. London Math. Soc. 1962), for entire functions of finite order ρ , $1 < \rho < \infty$, with positive zeros, it was obtained a two-sided estimate for the upper limit $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{m(r, f)}$ from which, in particular, it follows that this quantity tends to zero if $\rho \rightarrow \infty$. Edrey and Fuchs hypothesized that for an entire function f of infinite order with positive zeros, this quantity is zero. This conjecture was refuted by Miles, who showed that it is valid under additional assumptions, namely, when one excludes many values of r of the zero logarithmic measure passing to the limit as $r \rightarrow \infty$ or instead of $m(r, f)$ takes the L_p -norm, $p > 1$, of the function $\ln^+ |f(re^{i\varphi})|$. In the paper of J. B. Miles (Pacif. J. Math. 1979. V. 81. No. 1), the entire functions were considered whose zeros lie on a finite system of rays. In particular it was proved that if f is an entire function of infinite order with positive zeros, then its lower order is also equal to infinity. In this paper, the authors prove a similar result in the space of analytic functions in the upper half-plane. The function f , which is analytic in the upper half-plane of a complex variable $\mathbb{C}_+$, is called proper analytic if $\overline{\lim}_{z \rightarrow t, z \in \mathbb{C}_+} \ln |f(z)| \leq 0$ for any real number $t \in \mathbb{R}$. The space of the proper analytic functions is denoted by JA . The full measure of the function $f \in JA$ is a positive measure, which justifies the term "proper analytic function". The order of the function $f \in JA$ is defined as $\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r m(r, f))}{\ln r}$, where $m(r, f) := \frac{1}{r} \int_0^\pi \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi$. If this limit is equal to infinity, then the order of the function is equal to infinity. In this case, the function $f(z)$ is called a function of infinite order. Otherwise, the function $f(z)$ is called a function of finite order. Accordingly, the lower order of the function $f \in JA$ is defined as $\underline{\rho} = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(r m(r, f))}{\ln r}$. The Fourier coefficients of the function $f \in JA$ are determined by the formula $c_k(r, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ln |f(re^{i\theta})| \sin k\theta d\theta$, $k \in \mathbb{N}$. The main result of the article is formulated in the following statement. **Theorem.** Let the function $f \in JA$ be a proper analytic function of infinite order with the full measure λ on an imaginary semiaxis $Y_+ = \{z: \operatorname{Im} z = y > 0\}$, then its lower order also equals infinity. The proof of the theorem is based on the following lemma. **Lemma.** Let the function $f \in JA$ be a proper analytic function and its full measure $\lambda_G \equiv 0$. Then $|G(z)| = \exp(\operatorname{Im} F(z))$, where $F(z)$ is entire real function. Recall that an entire function $F(z)$ is called real function if $F(x) \in \mathbb{R}$ for all $x \in \mathbb{R}$. The method of proof of the theorem is based on the theory of Fourier coefficients of meromorphic functions developed by K. G. Malyutin at the beginning of the 20th century (Sb.: Math. 2001. V. 192. No. 6).

Keywords: proper analytic function, infinite order, lower order, Fourier coefficients, imaginary axis.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Miles J. B., Shea D. P. Quart. J. Math. Oxford. 1973. Vol. 24. Pp. 377–383.
2. Miles J. B., Shea D. P. Duke Math. J. 1976. Vol. 43. Pp. 171–186.
3. Edrei A., Fuchs W. Duke Math. J. 1960. Vol. 27. Pp. 233–249.
4. Edrei A., Fuchs W. Proc. London Math. Soc. 1962. Vol. 12. Pp. 315–344.

5. Hayman, Walter K., Lingham, Eleanor F. Research problems in function theory. AG: Springer Nature Switzerland, 2020.
6. Miles J. B. Pacif. J. Math. 1979. Vol. 81. No 1. Pp. 131–157.
7. Kondratyuk A. A. Ryady Fur'e i meromorfnye funktsii [Fourier series and meromorphic functions]. Lviv: Vishcha shkola, 1988.
8. Malyutin K. G. Sb.: Math. 2001. Vol. 192. No 6. Pp. 843–861.
9. Malyutin K. G., Sadik N. Sb.: Math. 2001. Vol. 198. No 12. Pp. 1747–1761.
10. Malyutin K. G., Malyutina T. I. Matematychni Studii. 2008. Vol. 30. No 2. Pp. 132–138.
11. Malyutin K. G., Kabanko M. V. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'uternye nauki. 2020. Vol. 30. Issue 3. Pp. 396–409.
12. Malyutin K. G., Revenko A. A. Matematychni Studii. 2019. Vol. 52. No 2. Pp. 144–155.
13. Malyutin K. G., Revenko A. A. Matematychni Studii. 2020. Vol. 54. No 2. Pp. 154–161.
14. Malyutin K. G., Sadik N. Siberian Math. J. 2002. Vol. 43. No 5. Pp. 882–887.
15. Khabibullin B. N. Algebra i analiz. 2020. Vol. 32. No. 1. Pp. 208–243.
16. Men'shikova E. B., Khabibullin B. N. Izv. vuzov. Matem. 2020. No. 5. Pp. 55–61.
17. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Math. Notes. 2020. Vol. 108. No 4. Pp. 579–589.
18. Khabibullin B. N. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. No 11. Pp. 2179–2189.
19. Gabdrakhmanova L. A., Khabibullin B. N. Russian Mathematics. 2020. Vol. 64. No 9. Pp. 12–20.
20. Salimova A. E., Khabibullin B. N. Ufa Mathematical Journal. 2020. Vol. 12. No 2. Pp. 35–49.
21. Grishin A. F., Malyutina T. I. Matem. fiz., anal., geom. 2005. Vol. 12. No. 1. Pp. 25–72.
22. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Chebyshevskii sbornik. 2018. Vol. 19. No 2. Pp. 272–303.
23. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Malyutina T. I. Chebyshevskii sbornik. 2019. Vol. 20. No 4. Pp. 236–269.
24. Fedorov M. A., Grishin A. F. Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 1998. Vol. 1. No 3. Pp. 223–271.
25. Levin B. Ya. Distribution of zeros of entire functions. Providence. RI: Amer. Math. Soc., 1980.

Received 20.02.2021.