УДК 517.938
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.3.3

ПЕРВЫЕ ЛЯПУНОВСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОСНОВНЫЕ СЦЕНАРИИ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© М. Г. Юмагулов[1], С. В. Акманова[2]*

[1]*Башкирский государственный университет*
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2]*Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова,*
Россия, Челябинская область,455000 г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38.

Тел.: +7 (3519) 29 85 62.
**Email: svet.akm_74@mail.ru*

В статье описаны основные сценарии бифуркаций для динамических систем, задающихся неавтономными периодическими уравнениями. Основное внимание уделено операторным методам вычисления ляпуновских величин в задачах о бифуркациях вынужденных колебаний и бифуркациях Андронова-Хопфа. Полученные формулы нахождения ляпуновских величин позволяют проводить анализ бифуркаций вынужденных колебаний и бифуркаций Андронова-Хопфа в терминах исходного уравнения.

Ключевые слова: *динамические системы, бифуркации, матрица монодромии, мультипликатор, ляпуновские величины, точка равновесия, устойчивость, центральное многообразие.*

Введение

Ключевое значение в теории бифуркаций динамических систем имеют ляпуновские величины, с помощью которых определяются такие важные качественные свойства бифуркаций, как устойчивость возникающих решений, направленность бифуркаций и другие. Ляпуновские величины важны и с точки зрения приложений (см., например, [1–4]).

Большинство известных результатов, связанных с получением формул вычисления ляпуновских величин (см., например, [5–8]), относятся к автономным динамическим системам. Существенно меньше известно результатов относительно вычисления ляпуновских величин при исследовании неавтономных периодических динамических систем.

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнением

$$x' = f(x,t,\mu), x \in R^N, \qquad (1)$$

в котором функция $f(x,t,\mu)$ является T-периодической и непрерывной по t, непрерывно дифференцируемой по x и μ, при этом $f(0,t,\mu_0) \equiv 0$, т.е. $x = 0$ – точка равновесия системы *(1)* при $\mu = \mu_0$.

Через $A(t,\mu) = f_x'(0,t,\mu)$ будем обозначать матрицу Якоби правой части системы *(1)*, вычисленную в точке $x = 0$. Положим $A_0(t) = f_x'(0,t,\mu_0)$.

Основным является предположение, что точка равновесия $x = 0$ системы *(1)* при $\mu = \mu_0$ является *негиперболической*, т.е. линейная система

$$x' = A_0(t)x, x \in R^N \qquad (2)$$

имеет хотя бы один мультипликатор μ такой, что $|\mu| = 1$. В этом случае значение μ_0 параметра μ является *точкой бифуркации* системы *(1)*.

Возможны различные сценарии бифуркационного поведения системы *(1)* при переходе параметра μ через значение μ_0. Качественные свойства каждого сценария бифуркации могут быть определены с использованием так называемых *ляпуновских величин.*

В настоящей статье приводятся новые формулы для первых ляпуновских величин для основных сценариев бифуркаций в системе *(1)*. А именно, будут рассмотрены случаи, когда линейная система *(2)* имеет:

S1) простой мультипликатор 1;

S2) пару простых мультипликаторов вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где θ_0 – иррационально или $\theta_0 = p/q$, где p/q – рациональная несократимая дробь, причем $q \geq 5$.

При этом будем считать, что модули остальных мультипликаторов системы *(2)* не равны 1. Отметим, что система *(2)* не может иметь простой мультипликатор – 1.

В случае S1 качественная перестройка системы *(1)* при переходе μ через значение μ_0 состоит в возникновении в окрестности точки $x = 0$ ненулевых T – периодических решений малой амплитуды. Такой сценарий называют *бифуркацией вынужденных колебаний* системы *(1).*

Случай S2 возможен только при $N \geq 2$. В частности, при $N = 2$ в пространстве $R^2 \times R^1$ ($x \in R^2, t \in R^1$) возникает двумерная гладкая поверхность $\Gamma(\mu)$, охватывающая ось t и являющаяся инвариантной для уравнения *(1).* Динамика системы *(1)* на этой поверхности может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических решений. Такой сценарий бифуркации обычно называют *бифуркацией Андронова-Хопфа*.

В настоящей статье предлагаются новые формулы для ляпуновских величин указанных сценариев бифуркаций, на основе которых изучаются свойства бифуркаций. Полученные в статье результаты примыкают к результатам работы [5].

Вспомогательные преобразования

Систему *(1)* можно представить в виде

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu) + \\ +g(t,\mu), x \in R^N. \quad (3)$$

Здесь $g(t,\mu) = f(0,t,\mu)$ и, следовательно, $g(t,\mu_0) = 0$, а функция $a(x,t,\mu)$ определяется равенством

$$a(x,t,\mu) = a_2(x,t,\mu) + \\ +a_3(x,t,\mu) + \tilde{a}_4(x,t,\mu),$$

в котором $a_2(x,t,\mu)$ и $a_3(x,t,\mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\tilde{a}_4(x,t,\mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по t и μ.

Наряду с (3) будем рассматривать линейную систему

$$x' = A(t,\mu)x, x \in R^N. \quad (4)$$

Поскольку правая часть системы *(1)* является T-периодической по t, то траектории точек (x,t,μ) и $(x,t+Tk,\mu)$, где k – целое число, одинаковы. Поэтому система *(1)* может быть ассоциирована с гладкой дискретной динамической системой

$$x_{n+1} = U(x_n,\mu), n = 0,1,2,\ldots, \ x_n \in R^N, \quad (5)$$

где $U(*,\mu)\colon R^N \to R^N$ – оператор сдвига по траекториям системы *(1)* за время от 0 до T (см., например, [9]). Соответственно задача о локальных бифуркациях системы *(1)* в естественном смысле равносильна задаче о локальных бифуркациях системы *(5)*. Далее, так как система *(1)* представима в виде *(3)*, то оператор $U(*,\mu)$ представим в виде

$$U(x,\mu) = V(\mu)x + v(x,\mu) + u(\mu), \quad (6)$$

где $V(\mu)$ – матрица монодромии системы *(4)*, $u(\mu_0) = 0$, и

$$v(x,\mu) = v_2(x,\mu) + v_3(x,\mu) + \tilde{v}_4(x,\mu), \quad (7)$$

причем $v_2(x,\mu)$ и $v_3(x,\mu)$ содержат квадратичные и кубические по x слагаемые соответственно, а $\|\tilde{v}_4(x,\mu)\| = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по μ.

Перейдем к обсуждению вопроса о вычислении ляпуновских величин системы *(3)* для случаев S1 и S2.

Ляпуновские величины в случае S1

Пусть $X(t,\mu)$ – фундаментальная матрица решений системы *(4)*.

Рассмотрим сначала случай S1, т.е. пусть линейная система *(2)* имеет простой мультипликатор 1. Другими словами, матрица монодромии V_0 имеет собственное значение 1. Пусть e, g – собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^* соответственно, причем $\|e\| = 1, (e,g) = 1$. Тогда $V_0 e = e$ и $V_0 = I$.

Теорема 1. *Пусть имеет место случай S1. Тогда первая ляпуновская величина системы (3) в задаче о бифуркации вынужденных колебаний определяется равенством*

$$l_1 = \int_0^T (X^{-1}(\tau,\mu_0)a_2(X(\tau,\mu_0)e,\tau,\mu_0),g)d\tau. \quad (8)$$

В случае, когда $a_2(x,t,\mu) = 0$, *получим* $l_1 = 0$, *а вторая ляпуновская величина определяется равенством:*

$$l_2 = \int_0^T X^{-1}(\tau,\mu_0)a_3(X(\tau,\mu_0)e,\tau,\mu_0),g)d\tau. \quad (9)$$

Доказательство.

Ограничимся доказательством равенства *(8)*. Обозначим через $V(\mu)$ матрицу монодромии системы *(4)*, тогда $V(\mu) = X(\mathrm{T},\mu)$, и $V_0 = V(\mu_0)$. Из работы [5] известно, что

$$v_2(x,\mu) = V(\mu)\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu)a_2(X(\tau,\mu)x,\tau,\mu)d\tau.$$

В [5] показано, что первая ляпуновская величина для дискретной системы *(5)* определяется формулой $l_1 = (v_2(e,\mu_0),g)$. Поскольку $V_0 = I$, тогда, следуя этой формуле, получим:

$$l_1 = \int_0^T (X^{-1}(\tau,\mu_0)a_2(X(\tau,\mu_0)e,\tau,\mu_0),g)d\tau.$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть имеет место случай S1 и матрица $A(t,\mu)$ системы *(4)* удовлетворяет условию $A(t,\mu_0) \equiv A_0$ (постоянна по t). Тогда формулы *(8)* и *(9)* примут соответственно вид

$$l_1 = \int_0^T (a_2(e,\tau,\mu_0),g)d\tau, \ l_2 = \int_0^T (a_3(e,\tau,\mu_0),g)d\tau.$$

Основные сценарии бифуркации вынужденных колебаний

Укажем особенности сценариев бифуркации вынужденных колебаний, руководствуясь значениями ляпуновских величин l_1 и l_2 (см., например, [5]). Эти сценарии определяются функцией $g(t,\mu)$. А именно: если в системе *(3)* $g(t,\mu) \equiv 0$, тогда бифуркация вынужденных колебаний сводится к транскритической или бифуркации типа вилки, а при $g(t,\mu) \not\equiv 0$ – к седло-узловой бифуркации.

4.1. Транскритическая бифуркация. Если $l_1 \neq 0$ и $(V'(\mu_0)e,g) > 0)$) $\big((V'(\mu_0)e,g) < 0\big)$, то при наличии у матрицы монодромии V_0 системы *(4)* ненулевых собственных значений с отрицательными вещественными частями, система *(3)* имеет только одно ненулевое T-периодическое решение малой амплитуды $x = x(t,\mu)$, которое при $\mu > \mu_0$ будет асимптотически устойчивым (неустойчивым), а при $\mu < \mu_0$ – неустойчивым (асимптотически устойчивым). При этом качественные свойства такой транскритической бифуркации не зависят от знака l_1.

4.2. Бифуркация типа вилки. Если $l_1 = 0$ и $l_2 \neq 0$, при этом $\mu_2 = = -\frac{l_2}{(V'(\mu_0)e,g)} > 0$, то при $\mu > \mu_0$ в окрестности точки $x = 0$ система *(3)* имеет два ненулевых Т-периодических решения малой амплитуды $x = x_1(t,\mu), x = = x_2(t,\mu)$,а при $\mu < \mu_0$ – не имеет ненулевых периодических решений. Если при этом $l_2 > 0$ $(l_2 < 0)$, и ненулевые собственные значения матрицы V_0 имеют отрицательные вещественные части, то при $\mu > \mu_0$ ненулевые Т-периодические решения системы будут неустойчивы (асимптотически устойчивы), т.е. основным сценарием бифуркаций в окрестности точки $x = 0$ будет бифуркация типа вилки.

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая $\mu_2 < 0$, при этом изменится лишь направленность бифуркации, но не свойства устойчивости.

4.3. Седло-узловая бифуркация. Пусть $g(t,\mu) \not\equiv 0$. Тогда, если $l_1 \neq 0$, при этом $\mu_1 = -\frac{l_1}{(u'(\mu_0),g)} > 0$, то при $\mu < \mu_0$ система *(3)* в окрестности точки $x = 0$ не имеет состояний равновесия, а при $\mu > \mu_0$ имеет два Т-периодических ненулевых решения малой амплитуды: $x = x_1(t,\mu), x = x_2(t,\mu)$, при этом если ненулевые собственные значения матрицы V_0 имеют отрицательные вещественные части, то одно из этих решений асимптотически устойчиво, а другое – неустойчивое, т.е. получим сценарий седло-узловой бифуркации.

Если $\mu_1 < 0$, то изменится лишь направленность бифуркации, а не свойство устойчивости. Кроме этого, если $l_1 = 0$, а $l_2 \neq 0$, то в системе *(3)* может быть также реализован сценарий седло-узловой бифуркации, при котором в окрестности точки $x = 0$ существует одно ненулевое Т-периодическое решение $x = x(t,\mu)$ малой амплитуды, как при каждом $\mu < \mu_0$, так и при каждом $\mu > \mu_0$.

Ляпуновские величины в случае S2

Рассмотрим случай S2. Пусть для простоты рассуждений *N*=2, и матрица монодромии системы *(4)* имеет вид

$$V(\mu) = \big(1 + \varphi(\mu)\big) \begin{bmatrix} cos2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) & -sin2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) \\ sin2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) & cos2\pi(\theta_0 + \psi(\mu)) \end{bmatrix},$$

где $\varphi(\mu), \psi(\mu)$ – гладкие функции, удовлетворяющие условиям: $\varphi(\mu_0) = 0$, $\psi(\mu_0) = 0$, $\varphi'(\mu_0) \neq 0, \psi'(\mu_0) \neq 0$. Тогда

$$V_0 = \begin{bmatrix} cos2\pi\theta_0 & -sin2\pi\theta_0 \\ sin2\pi\theta_0 & cos2\pi\theta_0 \end{bmatrix},$$

и $e^{\pm i2\pi\theta_0}$ – собственные значения матрицы V_0.

Теорема 2. *Пусть имеет место случай S2 для системы (4). Тогда первые ляпуновские величины системы (3) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа равны*

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu_0)a_3(X(\tau,\mu_0)e(\varphi),\tau,\mu_0)d\tau\right), h(\varphi + 2\pi\theta_0)\right)d\varphi,$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu_0)a_3(X(\tau,\mu_0)g(\varphi),\tau,\mu_0)d\tau\right), h(\varphi + 2\pi\theta_0)\right)d\varphi,$$

$$\textit{где } e(\varphi) = \begin{bmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \end{bmatrix},\ g(\varphi) = \begin{bmatrix} sin\varphi \\ -cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$h(\varphi) = \begin{bmatrix} cos(\varphi + 2\pi\theta_0) \\ sin(\varphi + 2\pi\theta_0) \end{bmatrix}.$$

Доказательство.

Этот случай сводится применительно к системе *(5)* к случаю, когда матрица монодромии $V_0 = V(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$. Поэтому задача о вычислении первых ляпуновских величин L_1 и Ω_1 для системы *(3)* сводится к вычислению указанных величин для соответствующей ей дискретной системы *(5)*.

Проектируя систему *(5)* при $\mu = \mu_0$ на подпространство E_0 матрицы V_0 см., например, [5; 8; 10], приведём её к следующей двумерной системе

xn+1=xncos2πθ0−ynsin2πθ0+αxn−βynxn2+yn2+orn3,yn+1=xnsin2πθ0+ynco s2πθ0+βxn+αynxn2+yn2+orn3, (10)

где $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ и $L_1 = \alpha cos2\pi\theta_0 + \beta sin2\pi\theta_0$, $\Omega_1 = \beta cos2\pi\theta_0 - \alpha sin2\pi\theta_0$.

Из системы *(10)* следует, что $v(x,\mu) = v_3(x,\mu) + \tilde{v}_4(x,\mu)$. Тогда, согласно теореме 12 в работе [5],

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(\varphi)d\varphi,\ \ \Omega_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi)d\varphi,$$

где $\chi(\varphi) = (v_3(e(\varphi),\mu_0), h(\varphi)), \psi(\varphi) = (v_3(g(\varphi),\mu_0), h(\varphi))$.

Учитывая, что

$$v_3(x,\mu) = V(\mu)\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu)a_3\,(X(\tau,\mu)x,\tau,\mu)d\tau,$$

получим

$$L_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left(\int_0^T X^{-1}(\tau,\mu_0)a_3\,(X(\tau,\mu_0)e(\varphi),\tau,\mu_0)d\tau\right), h(\varphi + 2\pi\theta_0)\right)d\varphi.$$

Аналогично рассуждая, найдём Ω_1.

Что и требовалось доказать.

О сценарии бифуркации Андронова-Хопфа

Исследуя систему *(3)* в случае S2 с целью описания сценариев локальных бифуркаций, можно считать, что $g(t,\mu) \equiv 0$, поскольку, выполняя соответствующую замену, всегда можно получить систему вида *(3)*, в которой $g(t,\mu) \equiv 0$. Тогда система *(3)* примет вид

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu), x \in R^N, \qquad (11)$$

а в соответствующей ей дискретной системе *(5)* у оператора сдвига по траекториям системы *(3)* слагаемое $u(\mu) \equiv 0$.

Для простоты изложения будем считать $N = 2$. Тогда основным сценарием локальных бифуркаций в окрестности точки равновесия $x = 0$ при переходе μ через значение μ_0 является возникновение в этой окрестности инвариантной кривой $\gamma(\mu)$, ограничивающей бассейн притяжения или отталкивания этой точки, т.е. сценарий бифуркации Андронова-Хопфа. При этом кривая $\gamma(\mu)$ при малых $|\mu - \mu_0|$ возникает, как правило, в одном из трех случаев: 1) $\mu > \mu_0$; 2) $\mu < \mu_0$; 3) $\mu = \mu_0$.

Случай 3 возможен, если *(5)* – линейная или консервативная система (это вырожденный случай). Первые два случая имеют место, если нелинейный оператор $v(x,\mu)$ системы *(5)* не вырождается, тогда каждому μ соответствует единственная гладкая кривая $\gamma(\mu)$, которая стремится к положению равновесия $x = 0$, если $\mu \to \mu_0$.

Вычислив ляпуновскую величину L_1 в соответствии с доказанной формулой в теореме 2, обратимся к теореме 11.1 в работе [8]: Согласно этой работы, сценарии бифуркации системы *(5)* опишем по следующей схеме.

1) если $L_1 < 0$, то для малых $\mu - \mu_0 \leq 0$ состояние равновесия системы *(5)* устойчиво, и все траектории в некоторой окрестности точки $x = 0$ стремятся к этому положению равновесия; при $\mu - \mu_0 > 0$ состояние равновесия неустойчиво, и возникает неустойчивая периодическая орбита диаметра $\sim\sqrt{\mu - \mu_0}$ такая, что все траектории из окрестности точки $x = 0$, за исключением точки $x = 0$, стремятся к ней;

2) если $L_1 > 0$, то для малых $\mu - \mu_0 \geq 0$ состояние $x = 0$ неустойчиво, и все остальные траектории покидают малую окрестность точки $x = 0$; если же разность $\mu - \mu_0 < 0$, то состояние равновесия становится устойчивым, его область притяжения ограничена неустойчивой периодической орбитой диаметра $\sim\sqrt{\mu_0 - \mu}$, которая стягивается к точке $x = 0$ при $\mu = \mu_0$.

Динамика системы *(5)* на инвариантной кривой $\gamma(\mu)$ может быть весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических орбит (в последнем случае $N \geq 3$). Появление кривой $\gamma(\mu)$ означает, что в пространстве $R^2 \times R^1 (x \in R^2, t \in R^1)$ возникает двумерная гладкая поверхность $\Gamma(\mu)$, охватывающая ось t и являющаяся инвариантной для уравнения *(3)*. Динамика системы *(3)* на этой поверхности может быть весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических решений.

Несложно описанный сценарий бифуркации Андронова-Хопфа переформулировать для исходной неавтономной системы *(1)*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. СПб: Лань, 2015. 272 с.
2. Газизова О. В., Аллаяров А. А., Кондрашова Ю. Н., Патшин Н. Т. Определение границ динамической устойчивости генераторов промышленной электростанции с учетом двигательной нагрузки // Электротехнические системы и комплексы. №2(39). 2018. С. 34–41.
3. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
4. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998. 593 p.
5. Юмагулов М. Г., Гусарова Н. И., Муртазина С. А., Фазлытдинов М. Ф. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журнал. Т. 10. №1. 2018. С.25–49.
6. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В. Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 16. №1. 2010. С. 119–126.
7. Lynch S. Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert`s sixteenth problem // Differential equations with symbolic computations. Basel: BirkhEauser, 2005. Pp. 1–26.
8. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
9. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
10. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 416 с.

Поступила в редакцию 01.07.2021 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.3.3

FIRST LYAPUNOV VALUES AND BASIC BIFURCATION SCENARIOS FOR NONAUTONOMIC PERIODIC DYNAMIC SYSTEMS

© M. G. Yumagulov[1], S. V. Akmanova[2]*

[1]Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]Nosov Magnitogorsk State Technical University
38 Lenin Avenue, 455000 Magnitogorsk, Russia.

Phone: +7 (3519) 29 85 62.
**Email: svet.akm_74@mail.ru*

Lyapunov quantities play a key role in the study of local bifurcations of dynamical systems. These values allow carrying out a detailed qualitative analysis of the corresponding bifurcation scenarios. Most of the well-known scientific results related to the study of bifurcations of dynamical systems by means of Lyapunov quantities refer to autonomous dynamical systems. Much less known results are related to the study of bifurcations in systems described by non-autonomous periodic differential equations. The authors of the article present the results of studying local bifurcations in non-autonomous periodic dynamical systems based on the construction of Lyapunov values. The main scenarios of bifurcations are described. Special attention is paid to operator methods for calculating Lyapunov values in problems of forced oscillation bifurcations and Andronov-Hopf bifurcations. Formulas are derived for calculating the first and second Lyapunov quantities in the problem of bifurcations of forced oscillations and the first Lyapunov quantities in the problem of Andronov-Hopf bifurcations, and proofs of these formulas are presented. The formulas obtained make it possible to analyze bifurcations of forced vibrations and Andronov-Hopf bifurcations in terms of the original equation.

Keywords: dynamical systems, bifurcations, monodromy matrix, multiplier, Lyapunov quantities, equilibrium point, stability, central manifold.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Yumagulov M. G. Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem [Introduction to the theory of dynamical systems]. Saint Petersburg: Lan', 2015.
2. Gazizova O. V., Allayarov A. A., Kondrashova Yu. N., Patshin N. T. Elektrotekhnicheskie sistemy i kompleksy. No. 2(39). 2018. Pp. 34–41.
3. Bautin N. N. Povedenie dinamicheskikh sistem vblizi granits oblasti ustoichivosti [The behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability region]. Moscow: Nauka, 1984.
4. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998.
5. Yumagulov M. G., Gusarova N. I., Murtazina S. A., Fazlytdinov M. F. Ufimskii matematicheskii zhurnal. Vol. 10. No. 1. 2018. Pp. 25–49.
6. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Kudryashova E. V. Tr. IMM UrO RAN. Vol. 16. No. 1. 2010. Pp. 119–126.
7. Lynch S. Differential equations with symbolic computations. Basel: BirkhEauser, 2005. Pp. 1–26.
8. Shil'nikov L. P., Shil'nikov A. L., Turaev D. V., Chua L. Metody kachestvennoi teorii v nelineinoi dinamike [Methods of the qualitative theory in nonlinear dynamics]. Pt. 2. M.; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovanii, 2009.
9. Krasnosel'skii M. A. Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravnenii [The shift operator along the trajectories of differential equations]. Moscow: Nauka, 1966.
10. Wang D., Li Ch., Chou Sh.-N. Normal'nye formy i bifurkatsii vektornykh polei na ploskosti [Normal forms and bifurcation of planar vector fields]. Moscow: MTsNMO, 2005.

Received 01.07.2021.