УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

© М. Г. Юмагулов¹, С. В. Акманова^{2*}

¹Бакирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

²Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова

Россия, Челябинская область, 455000 г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38.

Тел. +7 (3519) 29 85 62.

*Email: svet.akm_74@mail.ru

В статье представлено исследование устойчивости точки равновесия нелинейной непрерывно-дискретной системы с постоянным шагом дискретизации. Изложены условия асимптотической устойчивости точки равновесия этой системы с учетом постоянного шага ее последующей дискретизации. Для частного случая такой системы описаны условия ее асимптотической устойчивости и особенности бифуркационного поведения, связанные с выявлением точек бифуркации и соответствующих им сценариев бифуркаций.

Ключевые слова: динамические системы, бифуркации, точка равновесия, асимптотическая устойчивость, точка бифуркации, собственные значения матрицы.

1. Введение и постановка задачи

Непрерывно-дискретные системы возникают при моделировании широкого класса эволюционных процессов в биологии, экологии, экономике, технике и других областях. Такие системы содержат как уравнения динамики с непрерывным временем, так и уравнения с дискретным временем. Изучению непрерывно-дискретных систем посвящена обширная литература (см., например, [1–5]).

Центральное место в задаче построения непрерывно-дискретной системы занимает тот факт, что на оси времени t задаются узловые точки

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots \quad (1)$$

Будем считать, что сетка (1) является равномерной, т.е. шаг $h = t_{k+1} - t_k > 0$ является постоянным, независимым от k . Динамика непрерывно-дискретной системы естественно зависит от значения h . В частности, зависят от h и качественные ее свойства: устойчивость, гиперболичность, бифуркации и т.п. Поэтому важным представляется изучение зависимости качественных свойств непрерывно-дискретной системы от h .

В настоящей работе изучается непрерывно-дискретная система, отвечающая уравнениям

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y(t_k), \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k)), \end{cases} \quad (2)$$

здесь $t_k \leq t < t_{k+1}$, $x \in R^N$, $y \in R^m$, A_1 – квадратная матрица порядка N , B_1 – прямоугольная матрица порядка $N \times m$, функция $g(x, y): R^{N+m} \rightarrow R^m$ предполагается гладкой и удовлетворяющей условию

$$g(0, 0) = 0. \quad (3)$$

Систему (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k, \\ y_{k+1} = g(x_{k+1}, y_k), \end{cases} \quad (4)$$

полагая $y(t_k) = y_k$, $x(t_k) = x_k$.

Динамика системы (4) определяется следующим образом. Задаются начальные значения $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, и решается задача Коши

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $x(t)$ – решение задачи (5). Полагая $x(t_1) = x_1$, $y_1 = g(x_1, y_0)$, далее решаем задачу Коши:

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_1, \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (6)$$

и т.д.

Непрерывно-дискретная система (4) (или, что то же самое, система (2)) имеет точку равновесия $x = 0, y = 0$. Изучается задача об устойчивости этой точки равновесия и о бифуркациях системы в окрестности этой точки, при этом h рассматривается как бифуркационный параметр.

2. Исследование устойчивости

В силу условия (3) нелинейность $g(x, y)$ может быть представлена в виде

$$g(x, y) = A_2 x + B_2 y + \varepsilon(x, y), \quad (7)$$

где A_2 – прямоугольная матрица размера $m \times N$, B_2 – квадратная матрица порядка m , $\varepsilon(x, y): R^{N+m} \rightarrow R^m$, при этом $\varepsilon(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$ при $|x|, |y| \rightarrow 0$. Тогда соответствующая системе (4) линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k, \\ y_{k+1} = A_2 x_{k+1} + B_2 y_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Основное внимание в данной работе будет уделено изучению случаев, когда:

1. Все собственные значения матрицы A_1 имеют отрицательные вещественные части.

2. Все собственные значения матрицы B_2 по модулю меньше 1.

В этих случаях линейные системы:

$$x'(t) = A_1 x(t), x \in R^N, \quad (9)$$

$$y_{k+1} = B_2 y_k, k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

являются асимптотически устойчивыми [6].

Переход от систем (9) и (10) к непрерывно-дискретной системе (8) или (4) может изменить характер устойчивости нулевых точек равновесия этих систем, что может привести к различным бифуркациям. Рассмотрим условия устойчивости нулевого решения системы (2).

Теорема 1. При малых значениях норм $\|B_1\|$ и $\|A_2\|$ точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (2) является асимптотически устойчивой при любом $h > 0$.

Справедливость этого утверждения следует из структурной устойчивости систем (9) и (10).

Пусть матрица A_1 обратима, т.е. существует матрица A_1^{-1} , определим квадратную матрицу порядка $N + m$:

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Данной матрице соответствует дискретная система:

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 y_k, \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + [A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2] y_k \end{cases} \quad (12)$$

Теорема 2. Пусть все собственные значения матрицы $A(h)$ удовлетворяют неравенству $|\lambda| < 1$. Тогда точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (2) является асимптотически устойчивой.

Действительно, система (13) сохраняет все свойства системы (8), т.к. получена в ходе точной дискретизации системы (8), значит, точка $x = 0, y = 0$ равновесия этих систем является гиперболической в силу условия теоремы 2, а значит, существуют ее окрестности, в которых системы (8) и (2) топологически эквивалентны [7, с. 82]. Поскольку для системы (13) точка $x = 0, y = 0$ является асимптотически устойчивой, значит, $x = 0, y = 0$ – асимптотически устойчивая точка равновесия и для системы (2).

3. Бифуркационное поведение системы (2)

Перейдем к изучению бифуркационного поведения системы (2).

Точками бифуркации системы (2) называют такие значения параметра $h > 0$, при которых точка равновесия этой системы является негиперболической.

Исходя из данного определения, приходим к очевидной теореме.

Теорема 3. Пусть матрица $A(h^*)$ при некотором значении $h^* > 0$ имеет собственное значение $\lambda_0: |\lambda_0| = 1$. Тогда точка h^* является точкой бифуркации системы (2).

Для более детального изучения бифуркационного поведения системы (2) рассмотрим частный случай этой системы, а именно систему:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y_k, \\ y_{k+1} = a_2 x_{k+1} + b_2 y_k + \varepsilon(x_{k+1}, y_k), \end{cases} \quad (13)$$

где $x, y \in R^1, a_1, b_1, a_2, b_2$ – некоторые коэффициенты, функция $\varepsilon(x, y)$ удовлетворяет соотношению $\varepsilon(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$ при $x, y \rightarrow 0$.

Условия 1° и 2° для системы (13) равносильны тому, что $a_1 < 0$ и $|b_2| < 1$. Для простоты изложения положим $a_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}$. Тогда получим следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h_0}}{1-e^{-h_0}} < a_2 b_1 < \frac{1}{2},$$

тогда точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (13) является асимптотически устойчивой при всех $0 < h \leq h_0$.

Действительно, системе (13) можно поставить в соответствие линейную непрерывно-дискретную систему

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y_k, \\ y_{k+1} = a_2 x_{k+1} + b_2 y_k. \end{cases} \quad (14)$$

Системе (14), в свою очередь, соответствует линейная дискретная система с точкой равновесия $x = 0, y = 0$ и матрицей

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & \frac{1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1)b_1 \\ a_2 e^{a_1 h} & \frac{a_2}{a_1}(e^{a_1 h} - 1)b_1 + b_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Можно доказать, что точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (14) будет асимптотически устойчива в том и только том случае, если выполняются условия

$$\begin{cases} |b_2 e^{a_1 h}| < 1, \\ -(b_2 + 1)(e^{a_1 h} + 1) < \frac{a_2 b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) < (b_2 - 1) \cdot (e^{a_1 h} - 1). \end{cases} \quad (16)$$

Тогда при $a_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}$ условия (17) примут вид:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2} e^{-h} \right| < 1, \\ -\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h}}{1-e^{-h}} < a_2 b_1 < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Очевидно, что первое условие в системе (17) выполняется при любом $h > 0$. Тогда при некотором фиксированном значении h_0 второе условие примет вид

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h_0}}{1-e^{-h_0}} < a_2 b_1 < \frac{1}{2}, \quad (18)$$

Поскольку при выполнении условия (18) точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (14) является гиперболической при любом $0 < h \leq h_0$, то эта точка равновесия будет являться асимптотически устойчивой для системы (13) также при указанных условиях.

Следствие 1. Пусть $-\frac{3}{2} < a_2 b_1 < \frac{1}{2}$. Тогда точка равновесия $x = 0, y = 0$ системы (13) является асимптотически устойчивой при любом $h > 0$.

Теорема 5. Пусть $a_2 b_1 = \frac{1}{2}$, тогда любое значение $h > 0$ является точкой бифуркации для системы (13), при этом оно соответствует бифуркации положения равновесия.

Действительно, характеристическое уравнение для линейной дискретной системы с матрицей (15) при $a_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}$ и $a_2 b_1 = \frac{1}{2}$ будет иметь корни $\lambda_1 = \frac{e^{-h}}{2} < 1$ и $\lambda_2 = 1$. Поскольку $\lambda_2 = 1$, то точка равновесия $x = 0, y = 0$ является негиперболической для системы с матрицей (15), и в окрестности этой точки возникает сценарий бифуркации положений равновесия. Этот сценарий соответствует и системе (13).

Теорема 6. Пусть $a_2 b_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h_0}}{1-e^{-h_0}}$ при некотором $h_0 > 0$. Тогда h_0 является точкой бифуркации системы $2h_0$ -периодических решений системы (13).

Аналогично рассуждая, можно убедиться, что одно из собственных значений матрицы (15) равно -1, а другое по модулю меньше 1. Значит, в окрестности негиперболической точки равновесия $x = 0, y = 0$ линейной дискретной системы с матрицей (15) возникает сценарий бифуркации удвоения периода, что соответствует возникновению циклов периода 2 в окрестности этой точки. Тогда для соответствующей непрерывно-дискретной системы (13) это означает возникновение в окрестно-

сти точки равновесия $x = 0, y = 0$ $2h_0$ -периодических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов В. П., Чадов А. Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского ун-та, 2011. №2(9). С. 13–23.
2. Логунова О. С., Агапитов Е. Б., Баранкова И. И., Андреев С. М., Чусавитина Г. Н. Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы, 2019. №2(43). С. 25–34.
3. Расина И. В. Дискретизация непрерывных управляемых систем на основе обобщенных решений // Автоматика и телемеханика, 2011. №6. С. 171–178.
4. Максимов В. П., Чадов А. Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия вузов. Математика, 2012. №9. С. 72–76.
5. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ, 2012. №6. С. 7–10.
6. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. СПб.: изд-во «Лань», 2015. 272 с.
7. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 428 с.

Поступила в редакцию 01.07.2021 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.4.1

**STABILITY AND BIFURCATIONS OF CONTINUOUS DISCRETE
DYNAMIC SYSTEMS WITH A CONSTANT STEP OF DISCRETION**© M. G. Yumagulov¹, S. V. Akmanova^{2*}¹*Bashkir State University**32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*²*Nosov Magnitogorsk State Technical University**38 Lenin Avenue, 455000 Magnitogorsk, Russia.**Phone: +7 (3519) 29 85 62.***Email: svet.akm_74@mail.ru*

The authors studied the stability of the equilibrium points of a continuous-discrete system with a constant discretization step, containing a linear differential and nonlinear difference equations and describing processes with significantly different characteristics by means of continuous and discrete variables. The study is based on the transition to an equivalent nonlinear discrete system, as well as linearization in the vicinity of the equilibrium point. Based on the analysis of the resulting system, a condition for the asymptotic stability of the zero solution of the original system for a constant grid step $h > 0$ was formulated and proved. The found conditions made it possible to determine the bifurcation values of the parameter h . The main bifurcation scenarios were studied. Further, this system was discretized with a step h and transition to the corresponding linear discrete dynamic system with two vector variables. On the example of a particular case of the obtained system, namely, on the example of a linear discrete system with two one-dimensional variables, conditions for the asymptotic stability of the zero equilibrium point of this system were established, its bifurcation points were identified, and the bifurcation scenarios corresponding to these points were described. The obtained Lyapunov values make it possible to carry out a detailed qualitative analysis of the main scenarios of bifurcations, including the direction of bifurcations, and to study the nature of stability.

Keywords: dynamical systems, bifurcations, equilibrium point, asymptotic stability, bifurcation point, matrix eigenvalues.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Maksimov V. P., Chadov A. L. Vestnik Permskogo un-ta, 2011. No. 2(9). Pp. 13–23.
2. Logunova O. S., Agapitov E. B., Barankova I. I., Andreev S. M., Chusavitina G. N. Elektrotekhnicheskie sistemy i komplekсы, 2019. No. 2(43). Pp. 25–34.
3. Rasina I. V. Avtomatika i telemekhanika, 2011. No. 6. Pp. 171–178.
4. Maksimov V. P., Chadov A. L. Izvestiya vuzov. Matematika, 2012. No. 9. Pp. 72–76.
5. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Trudy BGTU, 2012. No. 6. Pp. 7–10.
6. Yumagulov M. G. Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem [Introduction to the theory of dynamical systems]. Saint Petersburg: izd-vo «Lan'», 2015.
7. Shil'nikov L. P., Shil'nikov A. L., Turaev D. V., Chua L. Metody kachestvennoi teorii v nelineinoi dinamike [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics]. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. 2003.

Received 01.07.2021.