УДК 532.529.534.2

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.4.2

ВЛИЯНИЕ ПРОВОДИМОСТИ ГИДРОРАЗРЫВНОЙ ТРЕЩИНЫ НА ВОЗМОЖНОСТЬ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ АКУСТИЧЕСКОГО «ТЕЛЕВИЗОРА»

© Э. В. Галиакбарова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450054 г. Уфа, пр. Октября, 71.

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, Республика Башкортостан, 450062 г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.

Тел.: +7 (347) 242 87 15.

Email: emi.galiakbar@yandex.ru

Исследуется динамика импульсного сигнала, распространяющегося в зазоре, заполненном акустически сжимаемой жидкостью, между открытой скважиной и цилиндрическим зондом. Акустический «телевизор» предполагает наличие в зонде генератора и приемников импульсных сигналов с цифровым модулем обработки сигналов. На дисперсию сигнала оказывают влияние фильтрационные характеристики призабойной зоны скважины. Рассматриваются пласты проницаемостью санти- и миллидарси с гидроразрывной трещиной, перпендикулярной скважине. Анализируется влияние проводимости трещины на дисперсионные кривые, на динамику сигнала. Построена интегральная кривая зависимости модуля коэффициента отражения от проводимости трещины с учетом влияния длительности сигнала и величины зазора.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, трещина, акустическая волна, диагностика.

Введение

Интерес к методу гидравлического разрыва пласта (ГРП) возобновляется в связи с потребностью стимуляции добычи нефти из низкопроницаемых пластов проницаемостями порядка санти- и миллидарси. В работе [1] изложена методология ГРП. Развита теория акустического зондирования скважины, окруженной неоднородной пористой средой [2–3]. Представлен [4] вывод уравнения фильтрации жидкости в трещину ГРП при воздействии через скважину на призабойную зону гармоническими волнами давления. Акустическое зондирование цилиндрических каналов с учетом фильтрации жидкости в грунт через поврежденные участки в виде трещин рассмотрено в работах [5–6]. Обнаружение трещин ГРП в низкопроницаемых пластах возможно при подборе оптимальной величины канала и технических характеристик источника и приемника импульсных сигналов методом акустического «телевизора» [7–8], поскольку возникающие отраженные сигналы имеют малую амплитуду, не превышающую 10% амплитуды сканирующего импульсного сигнала.

В настоящей работе приводится метод оценки проводимости трещины, перпендикулярной скважине, с помощью акустического «телевизора».

1. Основные уравнения

Рассматривается открытая скважина внутреннего радиуса R , заполненная жидкостью, с диагностическим зондом цилиндрической формы радиуса r , оси корпуса зонда и скважины совпадают с осью Oz (рис. 1). По отношению к скважине в однородном пласте имеется перпендикулярная тре-

щина ГРП шириной d_f , ось трещины совпадает с осью Oy . Акустические сигналы малой амплитуды, создаваемые «воображаемым» излучателем D_1 , имеющим координату $z=0$, распространяются по жидкости в зазоре между зондом и скважиной.

Полагается, что скважина и скелет пористой среды заполнены акустически сжимаемой жидкостью; длина зонда l значительно больше длины волны λ ($l \gg \lambda$), поэтому трещина – отражающая поверхность. При распространении акустической волны по зазору влияние вязкости жидкости, заполняющей скважину, учитывается в тонком пограничном слое вблизи стенок зазора, поэтому необходимо выполнение следующего неравенства: $R - r \gg 2\sqrt{\nu/\omega}$, где $R - r$ – величина зазора; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, находящейся в скважине. При выполнении условия: $\lambda > R - r$, ($\lambda = 2\pi C/\omega$, C – скорость звука в среде) течение в зазоре принято одномерным.

Для описания распространения акустической волны в зазоре записаны законы сохранения масс и импульса в плоскоодномерном приближении:

$$\pi(R^2 - r^2) \left(\frac{1}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -2\pi R \rho_0 u_p \left(u_p' \Big|_{x=0} = u_p \right). \quad (1.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a}, \quad \sigma = \rho_0 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{(\partial w / \partial \tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (\nu = \mu/\rho_0), \quad (1.2)$$

где P и w – возмущения давления и скорости в скважине; u_p' и u_p – скорость фильтрации в пласте и на границе со скважиной; ρ_0 – плотность

жидкости в невозмущенном состоянии; C – скорость звука в жидкости; μ и ν – динамическая и кинематическая вязкость жидкости; σ – касательное напряжение на поверхности стенки канала, выражение для которого записано, согласно [9].

Рис.1. Схема скважины с цилиндрическим зондом для обнаружения трещины ГРП в пласте, перпендикулярной скважине: (а) вертикальный разрез; (б) горизонтальный разрез. Датчики-анализаторы сигналов D_1 и D_4 расположены вблизи начала и конца обследуемого участка скважины; D_2, D_3 – «воображаемые» датчики начала и конца сечения трещины.

Для учета фильтрации жидкости в пласт вокруг скважины и трещину при распространении импульса давления в зазоре между корпусом зонда и внешней стенкой скважины, при допущении малости глубины проникания фильтрационных возмущений по сравнению с радиусом скважины, приняты следующие уравнения фильтрации [4]:

$$\begin{aligned}
 (0 < x < \infty) \\
 u'_p &= -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P'_p}{\partial x}, \frac{\partial P'_p}{\partial t} = \\
 &= \kappa_p \frac{\partial^2 P'_p}{\partial x^2} (P'_p|_{x=0} = P_p). \quad (1.3) \\
 (0 < y < \infty) \\
 u'_f &= -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P'_f}{\partial y}, \frac{\partial P'_f}{\partial t} = \kappa_f \frac{\partial^2 P'_f}{\partial y^2} - 2 \frac{m_p \kappa_p}{m_f d_f} \\
 &\int_{-\infty}^t \frac{\partial P'_f(\tau, y) / \partial \tau}{\sqrt{\pi \kappa_p (t - \tau)}} d\tau \\
 (P'_f|_{y=0} &= P_f), \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

где P'_p , P'_f и P_p , P_f – возмущения давления в пласте, в трещине и на границе со скважиной; m_i и k_i ($i = f, p$) – пористость и коэффициент проницаемости; $\kappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ ($i = f, p$) – коэффициент пьезопроводности.

Записаны условия на сечении ($z = z_f$) трещины ГРП, рассматриваемой как отражающая поверхность:

$$P_{(-)} = P_{(+)} = P_f. \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 \pi(R^2 - r^2) \rho_0 w_{(-)} &= 2\pi \rho_0 d_f u_f + \\
 + \pi(R^2 - r^2) \rho_0 w_{(+)} &(u_f = u'_f|_{y=0}), \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

где нижние индексы $(-)$ и $(+)$ соответствуют возмущениям параметров слева и справа от отражающей поверхности вдоль оси Oz ; u'_f и u_f – скорость фильтрации через проницаемые стенки скважины в трещину и на границе со скважиной.

2. Дисперсионные соотношения

Решения системы уравнений (1.1)–(1.4) найдены в виде гармонических волн [10]: (2.1)

$$\begin{aligned}
 P &= A^{(P)} e^{i(Kz - \omega t)}, w = A^{(w)} e^{i(Kz - \omega t)}, \\
 P_p &= A_p^{(P)} e^{i(Kz - \omega t)}, u_p = A_p^{(u)} e^{i(Kz - \omega t)}, \\
 P_f &= A_f^{(P)} e^{i(Kz - \omega t)}, u_f = A_f^{(u)} e^{i(Kz - \omega t)},
 \end{aligned}$$

($K = k + i\delta$ – волновой вектор; δ – коэффициент затухания; $C_p = \omega/k$ – фазовая скорость), получено дисперсионное уравнение:

$$K = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{R-r} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} (1+i)\right) \left(1 + \frac{R m_p}{R^2 - r^2} \sqrt{\frac{2\kappa_p}{\omega}} (1+i)\right)} \quad (2.2)$$

Здесь знаки $(+)$ и $(-)$ перед правой частью соотносятся с волнами, распространяющимися слева в правую сторону и справа в левую сторону вдоль оси Oz .

В предположении, что падающая волна распадается на отраженную и прошедшую волны и в области $0 < z < z_f$ существуют две волны (падающая и отраженная) для знаков $(+)$ и $(-)$ в уравнении (2.2), а в области $z > z_f$ – прошедшая волна для знака $(+)$, получены коэффициенты отражения N и прохождения M для гармонических волн вида (2.1), падающих нормально на сечение трещины ($z = z_f$):

$$N = -\frac{L_2/L_1}{1+L_2/L_1}, M = 1 + N, \quad (2.3)$$

где $L_1 = K/(D_2 - D_1)$, $L_2 = 2\pi R \rho_0 \alpha_f d_f k_f / \mu$,

$$\alpha_f^2 = -i \left(\frac{\omega}{\kappa_f} + 2 \frac{m_p \sqrt{\kappa_p}}{m_f d_f \kappa_f} \sqrt{i\omega} \right).$$

На рис. 2 представлены расчеты по уравнению (2.1), иллюстрирующие влияние проницаемости пласта на зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от круговой частоты. Для параметров скважины и пласта приняты следующие величины: $R = 5$ см, $m_p = 0.1$. В качестве жидко-

сти принята вода с физическими параметрами: $\rho_0=10^3 \text{ кг/м}^3$; $C=1.5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$; $\mu=10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Видно, что эффекты снижения фазовой скорости и увеличения коэффициента затухания в пластах проницаемостью $k_p=10^{-14}$, 10^{-15} м^2 сравнимы и в большей степени проявляются при уменьшении величины зазора. Например, при круговой частоте $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ и проницаемости $k_p=10^{-14} \text{ м}^2$ значения $C_p = 1490 \text{ м/с}$ ($C_p = 1480 \text{ м/с}$) и $\delta=0.15 \text{ м}^{-1}$ ($\delta=0.4 \text{ м}^{-1}$) при величине зазора $R-r=3 \text{ см}$ ($R-r=1 \text{ см}$); проницаемости $k_p=10^{-15} \text{ м}^2$ значения $C_p = 1500 \text{ м/с}$ ($C_p = 1490 \text{ м/с}$) и $\delta=0.06 \text{ м}^{-1}$ ($\delta=0.2 \text{ м}^{-1}$) при $R-r=3 \text{ см}$ ($R-r=1 \text{ см}$).

Рис. 2. Зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания от частоты для скважины, заполненной водой. Линии 1, 2 (1', 2') соответствуют коэффициенту проницаемости $k_p=10^{-14}$, 10^{-15} м^2 и величине зазора $R-r=3 \text{ см}$ ($R-r=1 \text{ см}$).

На рис. 3 показано влияние проводимости трещины на зависимости коэффициента отражения от круговой частоты. Видно, что увеличение проводимости трещины приводит к схожему по порядку величин росту амплитуды отраженного сигнала в пластах проницаемостью $k_p=10^{-14}$, 10^{-15} м^2 . Чувствительность метода повышается с уменьшением величины зазора. Например, при круговой частоте $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ амплитуда отраженного сигнала при наличии трещины проводимостью $d_f k_f=10^{-13} \text{ м}^3$ составляет около 10% (30%) сканирующего сигнала при величине зазора $R-r=3 \text{ см}$ ($R-r=1 \text{ см}$), при $d_f k_f=10^{-12} \text{ м}^3$ – 30% (60%), при $d_f k_f=10^{-11} \text{ м}^3$ – 65% (85%).

Рис. 3. Зависимости модуля коэффициента отражения (сплошные линии), а также их аргументов (пунктирные линии) от частоты для скважины, заполненной водой, при проницаемости пласта $k_p=10^{-14} \text{ м}^2$ (а) и $k_p=10^{-15} \text{ м}^2$ (б). Линии 1–3 (1'–3') соответствуют величине проводимости трещины $d_f k_f=10^{-11}$; 10^{-12} ; 10^{-13} м^3 и величине зазора $R-r=3 \text{ см}$ ($R-r=1 \text{ см}$).

3. Эволюция импульсного сигнала

Динамика импульсного сигнала в кольцевом зазоре, образованном скважиной и зондом, изучается методом быстрого преобразования Фурье [11] и численной реализации [12]. Источником импульсного сигнала, находящимся в точке D_1 с координатой $z=0$, в момент времени $t=t_0$ запускается сигнал конечной длительности Δt колоколообразной формы с амплитудой ΔP_0 :

$$\tilde{P}^{(0)} = \Delta P_0 \exp \left(-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t/6} \right)^2 \right). \quad (3.1)$$

Характерная частота сигнала соответствует моменту времени, при котором достигается пиковое значение сигнала.

Для сигнала, дошедшего до «воображаемого» датчика D_2 , отраженного от границы и прошедшего через границу $z=z_f$, а также возвратившегося к датчику D_1 , имеем:

$$\begin{aligned} P^{(0)}(z_f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}^{(0)}(\tau) \exp[iK(\omega)z_f] \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \\ P^{(R)}(z_f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}^{(0)}(\tau) N(\omega) \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \quad (3.2) \\ P^{(G)}(z_f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{P}^{(0)}(\tau) M(\omega) \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \\ \tilde{P}^{(E)}(z_f, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P^{(R)}(z_f, \tau) \exp[iK(\omega)z_f] \exp[i\omega(t-\tau)] d\omega d\tau \end{aligned}$$

На рис. 4 представлено влияние проводимости трещины на динамику сигнала в зазоре, заполненном водой. Расчетные параметры пласта и скважины совпадают с рис. 2, проницаемость пласта $k_p=10^{-15} \text{ м}^2$, сечение трещины $z_f=2 \text{ м}$. Длина зонда $l=4 \text{ м}$, величина зазора $R-r=1 \text{ см}$. На осциллограмме D_1 первый всплеск представляет собой начальный импульс, который доходит до сечения трещины несколько ослабленным – на осциллограмме D_2 первый всплеск. Импульс, отраженный от сечения трещины, фиксируется на осциллограм-

ме D_2 , а также – возвратившийся к датчику D_1 (второй всплеск). Более сильное «эхо» наблюдается от трещины проводимости $d_f k_f = 10^{-11} \text{ м}^3$. Виден рост амплитуды прошедшего сечение трещины импульсного сигнала (показания датчиков D_3 и D_4) для более низкой проводимости трещины $d_f k_f = 10^{-13} \text{ м}^3$.

Рис. 4. Динамика сигнала длительности $\Delta t = 6 \times 10^{-5} \text{ с}$ в пласте проницаемостью $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$. Сплошные линии соответствуют величине проводимости трещины $d_f k_f = 10^{-11} \text{ м}^3$; пунктирные – $d_f k_f = 10^{-12} \text{ м}^3$; штрих-пунктирные – $d_f k_f = 10^{-13} \text{ м}^3$.

Рис. 5. Зависимости модуля коэффициента отражения от проводимости трещины при проницаемости пласта $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$. Линии 1, 2 (1', 2') соответствуют $\Delta t = 6 \times 10^{-4} \text{ с}$; $6 \times 10^{-5} \text{ с}$ и величине зазора $R - r = 3 \text{ см}$ ($R - r = 1 \text{ см}$).

На рис. 5 показаны интегральные зависимости модуля коэффициента отражения от проводимости трещины для пласта проницаемостью $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$. Видно, что выбором значения длительности сигнала и величины зазора можно увеличить чувствительность метода. Например, амплитуда отраженного импульса при длительности сигнала $\Delta t = 6 \times 10^{-4} \text{ с}$ от трещины проводимости $d_f k_f = 10^{-12} \text{ м}^3$ даже при уменьшении величины зазора не превосходит 10% амплитуды сканирующего сигнала, а при сигнале $\Delta t = 6 \times 10^{-5} \text{ с}$ составляет 30% при величине зазора $R - r = 1 \text{ см}$. Более того, при длительности сигнала $\Delta t = 6 \times 10^{-5} \text{ с}$ и величине зазора $R - r = 1 \text{ см}$ для трещин проводимости $10^{-12} \text{ м}^3 < d_f k_f \leq 10^{-10} \text{ м}^3$, имеющей практический интерес [1], «эхо» отраженного сигнала составляет более 30% сканирующего сигнала, а для трещины с меньшей проводи-

мостью $10^{-13} \text{ м}^3 \leq d_f k_f \leq 10^{-12} \text{ м}^3$ информативным является прошедший сигнал.

Заключение

В работе показано, что подбором величины зазора и длительности сигнала можно обнаружить гидроразрывные трещины проводимости $10^{-13} - 10^{-10} \text{ м}^3$ по отраженному или прошедшему сигналам методом акустического «телевизора».

Исследование выполнено за счет гранта Российской государственной программы «Исследования и разработки на приоритетных направлениях развития науки и технологий» государственного задания №21-11-00207. URL: <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

Обозначения

R – внутренний радиус трубопровода, м; r – внешний радиус зонда, м; l – длина зонда, м; d_f – ширина трещины, м; $d_f k_f$ – проводимость трещины, м^3 ; z – координата, м; k – коэффициент проницаемости, м^2 ; u – скорость фильтрации, м/с; κ – коэффициент пьезопроводности, $\text{м}^2/\text{с}$; μ – динамическая вязкость, $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$; ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$; ρ – плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; σ – касательное напряжение на поверхности стенки канала, $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$.

$A^{(P)}$ – амплитуда параметра P ; $A^{(w)}$ – амплитуда параметра w ; C – скорость звука, м/с; C_p – фазовая скорость, м/с; M – коэффициент прохождения гармонической волны; N – коэффициент отражения гармонической волны; P – давление, Па; t – время, с; Δt – характерная временная протяженность импульса давления, с; w – скорость, м/с; δ – коэффициент затухания, м^{-1} ; λ – длина волны, м; ω – круговая частота, с^{-1} .

Индексы: нижние (p) соответствуют параметрам пористой среды, (f) трещины; верхние (O) соответствуют падающей волне, (R) и (G) – отраженной и прошедшей волнам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Экономидес М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
2. Shagapov V. Sh., Khlestkina N. M., Lhuillier D. Acoustic waves in channels with porous and permeable walls // Transport in Porous Media. 1999. Vol. 35. No. 3. Pp. 327–344.
3. Булатова З. А., Гумерова Г. А., Шагапов В. Ш. Об эволюции волн в каналах, имеющих участки с проницаемыми стенками и окруженных неоднородной пористой средой // Акустический журнал. 2002. Т. 48. №3. С. 300–308.
4. Шагапов В. Ш., Нагаева З. М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. №5(345). С. 121–130.
5. Галиакбарова Э. В., Хакимова З. Р. Акустическое сканирование трубчатых каналов с узкими трещинами // Вестник Башкирского университета. 2017. №3. С. 590–596.
6. Шагапов В. Ш., Галиакбарова Э. В., Хусаинов И. Г., Хакимова З. Р. Акустическое сканирование поврежденных трубопроводов, находящихся в грунте // ПМТФ. 2018. Т. 59. №4. С. 169–178.
7. Шагапов В. Ш., Галиакбарова Э. В., Хакимова З. Р. К теории локального зондирования трещин, образовавшихся при гидроразрыве пласта, с использованием импульсных волн давления // ПМТФ. 2021. Т. 62. №4. С. 46–56.
8. Шагапов В. Ш., Галиакбарова Э. В., Хакимова З. Р. К теории акустического зондирования ГРП трещин, перпендикулярных скважине // ИФЖ. 2021. Т. 94. №5. С. 1185–1195.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М: Наука, 1986. С. 736.
10. Исакович М. А. Общая акустика. М: Наука, 1973. С. 496.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1977. С. 735.
12. Ефимов В. А. Математический анализ (специальные разделы). Ч. I. М: Высшая школа, 1980. С. 279.

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.

THE INFLUENCE OF THE CONDUCTIVITY OF A HYDRAULIC FRACTURING CRACK ON THE POSSIBILITY OF DIAGNOSIS USING AN ACOUSTIC “TV”

© E. V. Galiakbarova

*Institute of Mechanics, Ufa Research Center of RAS
71 Oktyabrya Avenue, 450054 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Ufa State Petroleum Technological University
1 Kosmonavtov Street, 450062 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Phone: +7 (347) 242 87 15.
Email: emi.galiakbar@yandex.ru*

The dynamics of the propagation of a pulsed signal in a gap filled with an acoustically compressible fluid between an open well and a cylindrical probe is studied. An acoustic “TV set” assumes the presence of a generator and receivers of impulse signals with a digital signal processing module in the probe. The dispersion of the signal is influenced by the filtration characteristics of the bottomhole zone of the well. Formations with centi- and millidarcy permeability with a hydraulic fracture perpendicular to the well are considered. The effect of fracture conductivity on dispersion curves and signal dynamics is analyzed. An integral curve of the dependence of the modulus of the reflection coefficient on the conductivity of the crack was constructed, taking into account the influence of the signal duration and the size of the gap. It is shown that the sensitivity of the method can be increased by choosing the size of the gap and the duration of the signal. With a signal duration of 60 μs and a gap of 1 cm for conduction cracks from 10^{-12} m^3 to 10^{-10} m^3 , the “echo” of the reflected signal is more than 30% of the scanning signal, and for a crack with a lower conductivity from 10^{-13} m^3 to 10^{-12} m^3 , the transmitted signal is informative.

Keywords: hydraulic fracturing, crack, acoustic wave, diagnostics.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Ekonomides M. Unifitsirovannyi dizain gidrorazryva plasta: ot teorii k praktike [Unified hydraulic fracturing design: from theory to practice]. M.; Izhevsk: Institut komp'yuternykh tekhnologii, 2007.
2. Shagapov V. Sh., Khlestkina N. M., Lhuillier D. Transport in Porous Media. 1999. Vol. 35. No. 3. Pp. 327–344.
3. Bulatova Z. A., Gumerova G. A., Shagapov V. Sh. Akusticheskii zhurnal. 2002. Vol. 48. No. 3. Pp. 300–308.
4. Shagapov V. Sh., Nagaeva Z. M. PMTF. 2017. Vol. 58. No. 5(345). Pp. 121–130.
5. Galiakbarova E. V., Khakimova Z. R. Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2017. No. 3. Pp. 590–596.
6. Shagapov V. Sh., Galiakbarova E. V., Khusainov I. G., Khakimova Z. R. PMTF. 2018. Vol. 59. No. 4. Pp. 169–178.
7. Shagapov V. Sh., Galiakbarova E. V., Khakimova Z. R. PMTF. 2021. Vol. 62. No. 4. Pp. 46–56.
8. Shagapov V. Sh., Galiakbarova E. V., Khakimova Z. R. IFZh. 2021. Vol. 94. No. 5. Pp. 1185–1195.
9. Landau L. D., Lifshits E. M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. M: Nauka, 1986. Pp. 736.
10. Isakovich M. A. Obshchaya akustika [General acoustics]. M: Nauka, 1973. Pp. 496.
11. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M: Nauka, 1977. Pp. 735.
12. Efimov V. A. Matematicheskii analiz (spetsial'nye razdely). Ch. I [Mathematical analysis (special sections). Pt. 1]. M: Vysshaya shkola, 1980. Pp. 279.

Received 26.10.2021.