

УДК 534.23

**ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ  
В БЕЗГРАНИЧНОЙ ЖИДКОСТИ**

© Г. И. Гильманова<sup>1,2\*</sup>, Н. А. Гумеров<sup>1,3</sup>, И. Ш. Ахатов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Башкирский государственный университет*

*Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем  
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

<sup>2</sup>*Уфимский государственный нефтяной технический университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450062 г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.*

<sup>3</sup>*Институт передовых компьютерных исследований, Мэрилендский университет  
США.*

<sup>4</sup>*Центр Сколтеха по проектированию, производственным технологиям и материалам  
Россия, г. Москва.*

Тел.: +7 (347) 229 96 70.

\*Email: gilmanova.galia@gmail.com

*В работе представлено численное моделирование динамики микропузырьков под действием акустического поля в безграничной жидкости. Рассматривается кластер пузырьков в жидкости, данная система не ограничена стенками и границами. Источник акустических волн находится в центре пузырькового кластера. После включения источника звука наблюдается два режима динамики пузырьков, в зависимости от концентрации пузырьков. В первом случае, при малом количестве пузырьков наблюдается одностороннее влияние поле-пузырек, поэтому их воздействие на поле несущественно. Во втором случае, при высокой концентрации пузырьков, проявляется двустороннее влияние пузырек-поле-пузырек, поэтому наблюдаем ударную волну объемного содержания, за фронтом которой, остается зона, практически чистая от пузырьков. При реализации второго режима возникает проблема нехватки оперативной памяти для хранения матрицы. Для ускорения расчетов алгоритм матрично-векторного произведения распараллеливается на графических процессорах (GPU) с применением технологии CUDA, без хранения матрицы в памяти компьютера.*

**Ключевые слова:** самоорганизация пузырьков, уравнение Гельмгольца, акустическое поле, высокопроизводительные вычисления, GPU, CUDA.

Во многих отраслях промышленности, растворенные газы в жидкости оказывают отрицательное влияние на протекание технологических процессов. Известно, что ультразвуковые колебания обеспечивают более быстрое и глубокое, по сравнению с другими методами, понижения концентрации растворенного газа. Поэтому изучение влияния акустического поля на динамику пузырьков является актуальной задачей. Распространение акустических волн в жидкости способствует возникновению газовых и паровых пузырьков, их росту вследствие направленной диффузии, а также их слиянию и поступательному движению в жидкости под влиянием сил Бьеркнеса [1–2]. И, наоборот, в связи с их радиальным движением, пузырьки изменяют скорость звука в жидкости [3], производят его затухание и искажение [4]. Интерес к акустической кавитации связан с сопровождающими ее физическими и химическими эффектами, такими как механическое повреждение поверхности, шум, управление химическими реакциями, сонолюминесценция, и т.п. [5]. Пузырьки играют важную роль в дисперсии

и диссипации звука, их движение вызывает изменение поля. Это приводит к проявлению интересных нелинейных явлений [6], таких как самофокусировка и самоиндуцированная прозрачность, а также формированию нитевидных структур [5–7]. Самоорганизация пузырьков в акустическом поле или самодействие акустических волн в пузырьковой жидкости – это сильно нелинейный эффект, обязанный своим существованием двустороннему взаимодействию пузырьков и акустического поля.

В представленной работе проводится численное моделирование и исследование динамики пузырьков под действием акустического поля в безграничной жидкости. Источник акустических волн находится в центре пузырькового кластера (в начале координат), в начальный момент времени пузырьки равномерно распределены вблизи источника. После включения источника наблюдается два режима динамики пузырьков, в зависимости от количества пузырьков. В первом случае, мы наблюдаем одностороннее влияние поле-пузырек, количество пузырьков мало, поэтому их воздействие на

поле несущественно. Пузырьки начинают двигаться от источника колебания либо к узлу, либо к пучности волны, в зависимости от радиуса пузырька. Во втором случае, когда количество пузырьков превышает некоторое критическое число, которое зависит от частоты акустического поля, проявляется двустороннее влияние пузырек-поле-пузырек, поэтому наблюдаем ударную волну объемного содержания. При увеличении концентрации пузырьков возникает нехватка памяти вычислительной системы. Эта проблема решается заменой прямого метода решения методом обобщенных минимальных невязок (GMRES), которых является итерационным методом. Для ускорения расчетов разработан модуль матрично-векторного произведения и распараллелен на графических процессорах (ГПУ).

### Математическая модель

В акустической волне частоты  $\omega$  давление в среде и радиусы пузырьков изменяются согласно (1) [9–12].

$$p = p_0[1 + \operatorname{Re}\{Ae^{-\omega t}\}], a = a_0[1 + \varepsilon \operatorname{Re}\{-\Lambda(a_0)(Ae^{-\omega t})\}], \quad (1)$$

Комплексная амплитуда давления удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0, \quad (2)$$

Представим амплитуду давления полного поля как сумму падающей волны и рассеянной волны, обусловленной наличием пузырьков [11]

$$A = A^{in} + A^{scat}, \quad (3)$$

каждое, из которых в отдельности удовлетворяет уравнениям (4) и (5), соответственно

$$\nabla^2 A^{in} + k^2 A^{in} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 A^{scat} + k_l^2 A^{scat} = -\sum_{j=1}^N A(\mathbf{r})s(a_{0j})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j}), \quad (5)$$

где  $k_l$  – волновое число в чистой жидкости,  $a_{0j}$  – радиус  $j$ -го пузырька,  $\mathbf{r}_{0j}$  – координаты  $j$ -го пузырька. Падающая волна рассеивается благодаря наличию  $N$  пузырьков и  $s_j$  – рассеивающий коэффициент, который вычисляется по формуле (6):

$$s_j = \frac{4\pi\rho_l\omega^2 a_{0j}^3}{p_*} \Lambda(a_{0j}), \quad (6)$$

Сложим уравнения (4) и (5) и тогда получим уравнение (2) с волновым числом

$$k^2(\mathbf{r}) = k_l^2 + k_b^2, k_b^2 = \sum_{j=1}^N s(a_{0j})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j}), \quad (7)$$

Уравнение (5) имеет решение, представленное выражением (8):

$$A^{scat}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N A(\mathbf{r}_{0j})s(a_{0j})G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j}), \quad (8)$$

Тогда для полного поля (3) примет вид (9)

$$A(\mathbf{r}) = A^{in}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N A(\mathbf{r}_{0j})s(a_{0j})G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j}), \quad (9)$$

Для каждого пузырька уравнение (9) переписывается в виде (10):

$$A(\mathbf{r}_{0i}) = A^{in}(\mathbf{r}_{0i}) + \sum_{j=1}^N A(\mathbf{r}_{0j})s(a_{0j})G(\mathbf{r}_{0i} - \mathbf{r}_{0j}), i=1, \dots, N, \quad (10)$$

Поэтому поле, образованное рассеянной волной может быть найдено из поля падающей волны, решая систему (11) с плотно заполненной матрицей:

$$\mathbf{A} = L^{-1}\mathbf{A}^{(in)}, \quad (11)$$

Так как источник звука в безграничной жидкости находится в начале координат, поэтому имеет место быть, следующее выражение (12)

$$A^{in}(\mathbf{r}) = QG(\mathbf{r}), G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (12)$$

Позиция каждого пузырька отслеживается согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{r}_{0j}}{dt_s} = \mathbf{v}_{0j}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{v}_{0j}$  – скорость  $j$ -го пузырька.

### Вычислительный эксперимент

Рассмотрим ограниченный объем пузырьковой жидкости без стенок. В начальный момент времени пузырьки равномерно распределены по пространству от  $-\lambda$  до  $\lambda$ , в кубе размером  $2\lambda \times 2\lambda \times 2\lambda$ . Расстояние между соседними пузырьками вычисляется как  $h = \frac{2\lambda}{N-1}$ , где  $\lambda = 0.015$  м – длина волны,  $N$  – число пузырьков. Точечный источник звука расположен в центре куба, в начале координат. Тестовые расчеты проводились для пузырьков радиуса  $a_0 = 50$  мкм и частоты акустического поля  $f = 100$  кГц ( $a_0 = 30$  мкм – резонансный радиус пузырька для данной частоты акустического поля).

Результаты численного моделирования для первого режима представлены на рис. 1. В верхнем ряду показано распределение амплитуды давления, в нижнем ряду позиции пузырьков в трех координатах  $x, y, z$  с течением времени. Результаты представлены (рис. 1) в безразмерных координатах по пространству и по времени, где  $L = \frac{1}{k_l}$ ,  $k_l$  – волновое число,  $t_0 = h_t$ ,  $h_t$  – шаг по времени,  $h_t$  выбирался из выполнения условия:  $h_t \cdot v_{max} < h$ , где  $v_{max}$  максимальная скорость пузырька на первом шагу,  $h$  – расстояние между пузырьками в начальный момент времени.

Из рис. 1 видно, что пузырьки после включения поля, сгруппировались в узлах давления, что подтверждается теорией, что пузырьки сверхрезонансного радиуса движутся в узлы давления. Влияние пузырьков несущественно на распространение звуковых волн, в данном случае при  $N \sim 1000$ .

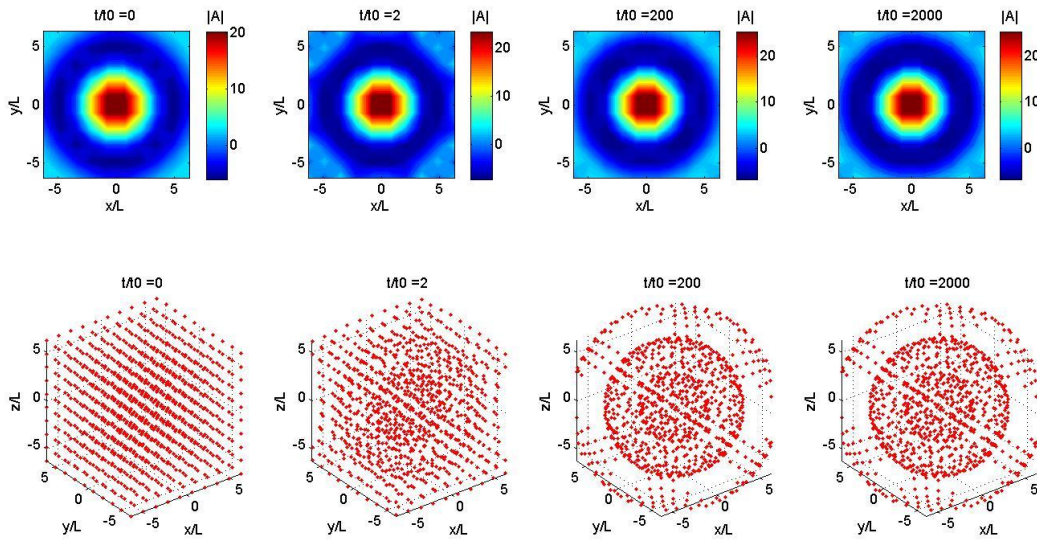


Рис. 1. Распределение амплитуды давления (верхних ряд) и позиции пузырьков (нижний ряд) сверхрезонансного радиуса  $a_0 = 50$  мкм, для первого режима,  $N = 1000$ .

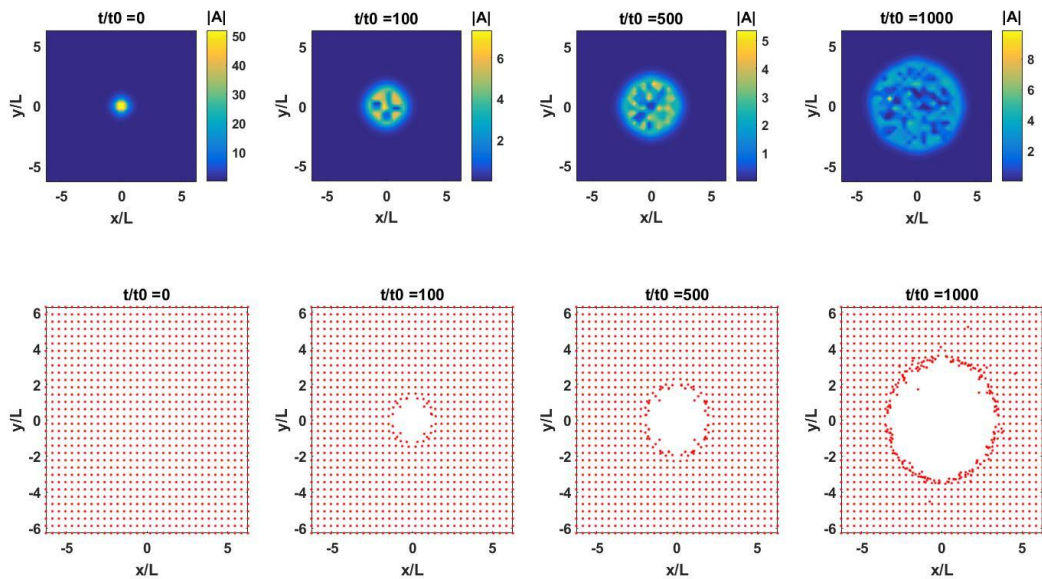


Рис. 2. Распределение амплитуды давления (верхних ряд) и позиции пузырьков (нижний ряд) сверхрезонансного радиуса  $a_0 = 50$  мкм, для второго режима,  $N = 32^3 = 32768$ .

С увеличением концентрации пузырьков, нелинейность возрастает, и увеличивается размерность задачи. При реализации второго режима возникли две проблемы: 1) нехватка оперативной памяти для хранения матрицы; 2) передача комплексных чисел с центрального процессора (ЦПУ) на графический процессор (ГПУ) и обратно. Первая проблема решается заменой прямого метода решения итерационным методом GMRES. Для ускорения расчетов разработан модуль матрично-

векторного произведения без хранения матрицы и распараллелен на графических процессорах (ГПУ). Так как амплитуда давления является комплексным числом, то при передаче данных с ЦПУ на ГПУ возникли ошибки несогласования типов данных. Поэтому расчеты проводились на ГПУ только с действительными числами, т.е. на графический процессор поступали отдельно мнимая и действительная части, и обратно отправлялись на ЦПУ отдельно, а затем собирались в комплексное число.

На графическом процессоре производится матрично-векторное произведение  $L \cdot f$ ,  $f$  – искомый вектор. Это произведение представляется в виде суммы действительной и комплексной частей:  $L \cdot f = \text{re}(L \cdot f) + i \cdot \text{im}(L \cdot f)$ . Для проверки работы данной методики (разделения на мнимую и действительные части) проведены тестовые расчеты для маленьких матриц размером  $1000 \times 1000$ . Относительная погрешность составляет  $\delta = \frac{|x_c - x_g|}{|x_g|} \approx 10^{-12}$ , где  $x_c$  – решение системы прямым методом на ЦПУ,  $x_g$  – решение системы итерационным методом на ГПУ. На рисунке 2 показаны результаты численного моделирования для второго режима: распределение амплитуды давления и позиции пузырьков, вблизи источника, в сечение по оси  $z = 0$ , во времени.

Из рис. 2 видно, что после включения поля образуется зона, практически чистая от пузырьков. То есть наблюдается явление самоиндуцированной акустической прозрачности.

### Выводы

Разработана трехмерная модель процесса самоорганизации пузырьков под действием акустического поля в жидкости без границ. Малые концентрации пузырьков несущественно влияют на распространение звуковой волны. Для образования волны самоиндуцированной прозрачности необходимо, чтобы пузырьки тоже влияли на поле, это достигается за счет высокой концентрации пузырьков в заданной области. С увеличением масштаба задачи возникает проблема нехватки памяти компьютера, это проблема решена благодаря использованию графического процессора в вычислениях матрично-векторного произведения. Дальнейшие исследования будут направлены на моделирование процесса самоорганизации пузырьков под действи-

ем акустического поля в жидкости с границами с использованием метода граничных элементов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Skoltech Partnership Program.*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mettin R. Bubble structures in acoustic cavitation // Bubble and particle dynamics in acoustic fields: Modern trends and applications. 2005. P. 1–36.
2. Mettin R. From a single bubble to bubble structures in acoustic cavitation // Oscillations, Waves and Interactions. 2007. P. 171–198.
3. Commander K. W., Prosperetti A. Linear pressure waves in bubbly liquids: comparison between theory and experiments // J. Acoust. Soc. Am., 1989. Vol. 85. №2. P. 732–746.
4. Leighton T. G. Bubble population phenomena in acoustic cavitation // Ultrasonics Sonochemistry. 1995. Vol. 2. №2. P. 123–S136.
5. Parlitz U., Mettin R., Luther S., Akhatov I., Voss M., Lauterborn W. Spatiotemporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1999. Vol. 357. P. 313–334.
6. Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W. Pattern formation in acoustic cavitation // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96. P. 3627–3635.
7. Kobelev Yu. A., Ostrovsky L. A. Nonlinear acoustic phenomena due to bubble drift in a gas-liquid mixture // J. Acoust. Soc. Am. 1989. Vol. 85. P. 621–627.
8. Mettin R., Luther S., Ohl C., Lauterborn W., “Acoustic cavitation structures and simulations by a particle model,” Ultrason. Sonochem. 1999. Vol. 6. P. 25–30.
9. Gumerov N. A., Ohl C.-D., Akhatov, I. S., Sametov S. P., Khasimullin M. V. Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: Theory and Experiment // Proc. of Meetings on Acoustics, 2013. Vol. 19. №045012.
10. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Ohl C. D., Sametov S. P., Khasimulin M. V., Gilmanova G. I. Waves of acoustically induced transparency in bubbly liquids: theoretical prediction and experimental validation // Proceedings of the ASME 2013 (IMECE2013), November 15–21, 2013, San Diego, CA. №63200.
11. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Ohl C.-D., Sametov S. P., Khazimulin M. V., Gonzalez-Avila S. R., Robust acoustic manipulation of bubbly liquids. Appl. Phys. Lett., 2016. Vol. 108. №134102.
12. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Modes of self-organization of diluted bubbly liquids in acoustic fields: One-dimensional theory. Journal of Acoustical Society of America, 2017. №141(2), P. 1190–1202.

*Поступила в редакцию 30.11.2018 г.*

## USING OF GRAPHIC PROCESSORS IN NUMERICAL SIMULATION OF BUBBLE DYNAMICS IN ACOUSTIC FIELD IN UNBOUNDED LIQUID

© G. I. Gilmanova<sup>1,2\*</sup>, N. A. Gumerov<sup>1,3</sup>, I. Sh. Akhatov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Bashkir State University*

*32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

<sup>2</sup>*Ufa State Petroleum Technological University*

*1 Kosmonavtov Street, 450062, Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

<sup>3</sup>*Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, College Park*

<sup>4</sup>*Skoltech Center for Design, Manufacturing and Materials, Moscow, Russia*

*Phone: +7 (347) 229 96 70.*

*\*Email: gilmanova.galia@gmail.com*

In many industries, gases dissolved in used or processed liquids have a negative effect on technological processes. It is known that ultrasonic vibrations provide a faster and deeper decrease in the concentration of dissolved gas, compared to other methods. Thus, the study of the influence of an acoustic field on the dynamics of bubbles is an actual problem. In the present paper, three-dimensional modeling of the dynamics of bubbles in unbounded liquid in acoustic field is presented. The authors considered a cluster of bubbles in an unbounded liquid. When the field was active, two variants of bubble dynamics were observed, depending on the bubble concentration. In the first case, with a small number of bubbles, there was a one-way interaction field-bubble, so their effect on the field was insignificant. In the second case, with a high concentration of bubbles, there was a two-way interaction bubbles-field-bubbles, and the authors observed formation of a shock wave, which rapidly propagates through the bubbly medium leaving a region almost free of bubbles behind its front. To accelerate calculations, the matrix-vector product algorithm was parallelized on GPUs using CUDA technology, without storing the matrix in the computer memory.

**Keywords:** self-organization of bubbles, Helmholtz equation, acoustic field, high-performance computing, GPU, CUDA.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at [bulletin\\_bsu@mail.ru](mailto:bulletin_bsu@mail.ru) if you need translation of the article.

### REFERENCES

1. Mettin R. Bubble and particle dynamics in acoustic fields: Modern trends and applications. 2005. Pp. 1–36.
2. Mettin R. Oscillations, Waves and Interactions. 2007. Pp. 171–198.
3. Commander K. W., Prosperetti A. J. *Acoust. Soc. Am.*, 1989. Vol. 85. No. 2. Pp. 732–746.
4. Leighton T. G. *Ultrasonics Sonochemistry*. 1995. Vol. 2. No. 2. Pp. 123–136.
5. Parlitz U., Mettin R., Luther S., Akhatov I. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 1999. Vol. 357. Pp. 313–334.
6. Akhatov I., Parlitz U., Lauterborn W. J. *Acoust. Soc. Am.* 1994. Vol. 96. Pp. 3627–3635.
7. Kobelev Yu. A., Ostrovsky L. A. J. *Acoust. Soc. Am.* 1989. Vol. 85. Pp. 621–627.
8. Mettin R., Luther S., Ohl C., Lauterborn W., “Acoustic cavitation structures and simulations by a particle model,” *Ultrason. Sonochem.* 1999. Vol. 6. Pp. 25–30.
9. Gumerov N. A., Ohl C.-D., Akhatov, I. S., Sametov S. P., Khasimullin M. V. *Proc. of Meetings on Acoustics*, 2013. Vol. 19. No. 045012.
10. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Ohl C. D., Sametov S. P., Khasimulin M. V., Gilmanova G. I. *Proceedings of the ASME 2013 (IMECE2013)*, November 15–21, 2013, San Diego, CA. No. 63200.
11. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Ohl C.-D., Sametov S. P., Khasimulin M. V., Gonzalez-Avila S. R., Robust acoustic manipulation of bubbly liquids. *Appl. Phys. Lett.*, 2016. Vol. 108. No. 134102.
12. Gumerov N. A., Akhatov I. S., Modes of self-organization of diluted bubbly liquids in acoustic fields: One-dimensional theory. *Journal of Acoustical Society of America*, 2017. No. 141(2), Pp. 1190–1202.

*Received 30.11.2018.*