

УДК 532.5.013.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНЕ ВСКРЫТОЙ ТРЕЩИНОЙ ГРП

© Ф. Ф. Назмутдинов*, И. Л. Хабибуллин, Н. К. Вахитова

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

*Email: mnx_@mail.ru

В работе рассматривается моделирование процесса фильтрации в пласте вскрытой вертикальной скважины с трещиной ГРП. Модель рассматривается в приближении билинейного потока, которая включает два взаимно перпендикулярных потока жидкости в пласте и в трещине. Реализация модели проведена с использованием метода преобразований Лапласа. Конечным результатом моделирования являются выражения для распределения давления в пласте, трещине и на забое скважины. Модель учитывает скин-эффект на границе раздела пласт-трещина и эффект влияния на распределение давления объема ствола скважины. Результаты моделирования могут быть использованы при интерпретации данных гидродинамических исследований скважин.

Ключевые слова: моделирование, фильтрация, пласт, трещина, ГРП, скин-эффект, распределение давления.

В настоящее время наиболее результативным геолого-техническим мероприятием, обеспечивающим повышение эффективности разработки низкопроницаемых коллекторов, является гидравлический разрыв пласта (ГРП). Геометрия и динамика фильтрационных потоков в системах пласт-скважина при наличии вертикальных трещин ГРП значительно отличаются от классического случая отсутствия трещин. Поэтому в целях прогнозирования показателей добычи нефти и развития методов гидродинамических исследований скважин необходимо развить нестационарную теорию фильтрационных потоков в таких системах. При этом актуальным становится учет таких эффектов как влияние объема ствола скважины и скин-эффект на границе раздела трещины и пласта. Такие модели начали развиваться в 80-х гг. [1–3]. Наиболее полная теория этих процессов построена недавно [4–5]. В данной работе рассматривается дальнейшее развитие этих исследований.

В трещине конечной проводимости рассматривается стационарный поток несжимаемой жидкости. В пласте, перпендикулярно к боковой поверхности трещины, реализуется нестационарная фильтрация.

Тогда потоки в трещине и в пласте можно описать следующей задачей в безразмерных переменных [2]:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + \frac{2}{C_f} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \quad \bar{t} > 0 \quad (1)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0, \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \bar{P}_f = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = -\frac{\pi}{C_f} \left(1 - S_f \frac{\partial \bar{P}_w}{\partial \bar{t}} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (4)$$

$$\bar{P}(\bar{y}, \bar{t} = 0) = 0, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{P} = 0, \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{P}_f = 0, \quad (5)$$

$$\bar{P}(\bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}) + \frac{2}{\pi} \frac{\partial \bar{P}(\bar{y} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{y}} S_{fs} \quad (6)$$

Здесь индексы f и w относятся соответственно к трещине и скважине, \bar{C}_f – безразмерная проводимость трещины, S_f – безразмерный коэффициент влияния ствола скважины, S_{fs} – скин-эффект трещины, \bar{P} , \bar{P}_f и \bar{P}_w – безразмерные давления соответственно в пласте, трещине и на забое скважины, \bar{x} , \bar{y} и \bar{t} – безразмерные координаты и время.

Безразмерные величины определяются по следующим формулам:

$$\bar{t} = \frac{\beta_0 k t}{\phi \mu C_i X_f^2}, \quad \eta_f = \frac{k_f \phi C_i}{k \phi_f C_f}, \quad \bar{C}_f = \frac{b_f \phi_f C_{ft}}{\pi X_f \phi C_i}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_f},$$

$$\bar{y} = \frac{y}{x_f}, \quad \bar{P}_f = \frac{k h (P_i - P_f)}{\alpha_0 q B \mu}, \quad \bar{P} = \frac{k h (P_i - P)}{\alpha_0 q B \mu},$$

$$\bar{P}_w = \frac{k h (P_i - P_w)}{\alpha_0 q B \mu}, \quad S_f = \frac{C}{2 \pi h \phi C_i X_f^2}$$

Здесь x , y и t – размерные значения координат и времени, индекс i соответствует начальному состоянию, k – проницаемость, ϕ – пористость, b_f и x_f – ширина и полудлина трещины, B и μ – объемный коэффициент и вязкость нефти, C – коэффициент влияния ствола скважины, h – толщина пласта, $k_f b_f$ – проводимость трещины, C_i и C_{ft} – полная сжимаемость пласта и трещины, η_f – безразмерный коэффициент пьезопроводности. В системе СИ $\beta_0 = 3.6 \cdot 10^{-9}$, $\alpha_0 = 1.842$, в Американской промышленной системе единиц $\beta_0 = 0.000264$, $\alpha_0 = 141.2$.

Граничное условие (3) учитывает влияние объема ствола скважины на динамику изменения со временем давления на забое скважины. Это обстоятельство проявляется при малых временах и используется при интерпретации данных гидродинамических исследований скважин. Граничное усло-

вие (6) характеризует скин-эффект трещины и учитывает дополнительное падение давления на границе раздела трещина-пласт. В работе [2] предложена методика определения параметров S_f и S_{fs} на основе использования типовых кривых зависимости давления на забое скважины от времени, полученных на основе модели (1)–(6).

Задача (1)–(6) решается методом преобразования Лапласа по переменной t :

$$P_l(s) = L[\bar{P}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \bar{P}(t) dt$$

С учетом начальных условий для давления (2) и (5), задача (1) – (6) в пространстве изображений имеет вид (черточки означающие безразмерность величин опускаем).

$$\frac{\partial^2 P_{fl}}{\partial x^2} + \frac{2}{C_f} \frac{\partial P_{fl}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_{fl}(x=0)}{\partial x} = -\frac{\pi}{C_f} \left(\frac{1}{s} - S_f s P_{wl} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P_{fl} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 P_l}{\partial y^2} = s P_l, \quad 0 < y < \infty \quad (9)$$

$$P_l(y=0) = P_{fl}(x) + \frac{2}{\pi} S_{fs} \frac{\partial P_l(y=0)}{\partial y}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} P_l = 0 \quad (10)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (9) известно, с учетом второго граничного условия (10), оно имеет вид:

$$P_l = C_1(x, s) e^{-\sqrt{s}y} \quad (11)$$

Постоянную интегрирования $C_1(x, s)$ находим используя первое условие (10):

$$C_1(x, s) = \frac{P_{fl}}{1 + \frac{2}{\pi} S_{fs} \sqrt{s}}$$

Таким образом имеем:

$$P_l(x, y, s) = P_{fl}(x, s) = \frac{e^{-\sqrt{s}y}}{1 + \frac{2}{\pi} S_{fs} \sqrt{s}} \quad (12)$$

Подставляя это выражение в (7), для нахождения \bar{P}_{fl} получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 P_{fl}}{\partial x^2} - \frac{2}{C_f} \frac{P_{fl}}{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}} = 0$$

Решение этого уравнения с учетом второго условия (8) имеет вид:

$$P_{fl} = C_1 \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{C_f}} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}}} \right)$$

Из первого условия (8) определяется постоянная интегрирования C_1 :

$$C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \frac{\frac{1}{s} - S_f \bar{P}_{wl} s}{\sqrt{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}}}$$

Тогда

$$P_{fl}(x, s) = \frac{\pi \left(\frac{1}{s} - S_f P_{wl} s \right)}{\sqrt{2C_f} \sqrt{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}}} \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{C_f}} \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}}} \right) \quad (13)$$

Таким образом, выражения (12) и (13) определяют давление в пласте и в трещине в пространстве изображений преобразования Лапласа.

При $x=0$ из (13) следует выражение для определения давления на забое скважины:

$$P_{wl} = \frac{\pi}{s \sqrt{2C_f} \sqrt{\frac{2}{\pi} S_{fs} + \frac{1}{\sqrt{s}}}} + \pi S_f s^2 \quad (14)$$

Осуществляя здесь обратное преобразование Лапласа находится выражение для изменения давления на забое скважины со временем. Из (14) видно, что давление на скважине зависит от проводимости C_f и скина трещины S_{fs} и определяется эффектом влияния ствола скважины (через параметр S_f).

Рассмотрим некоторые частные случаи. При отсутствии влияния объема ствола скважины ($S_f=0$) для идеальной трещины ($S_{fs}=0$), из (14) имеем:

$$P_{wl} = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \frac{1}{s^{5/4}} \quad (15)$$

Используя таблицы обратных преобразований Лапласа [6] получим (черточки над величинами обозначают их безразмерность):

$$\bar{P}_w(\bar{t}) = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \frac{\bar{t}^{-1/4}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \quad (16)$$

Здесь Γ – гамма-функция, $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=0.9064$.

Этот результат совпадает с данными, полученными в [1]. Согласно данным, полученной в этой работе, давление на забое скважины с вертикальной трещиной определяется проводимостью трещины и зависит от безразмерного времени \bar{t} в степени 1/4. Такая зависимость давления в скважине от времени является характерным признаком так называемого билинейного режима фильтрации в системе пласт- трещина- скважина.

В случае, когда скин-зона вокруг трещины отсутствует и не рассматривается влияние объема ствола скважины, то есть $S_{fs}=0$ и $S_f=0$, из (12) и (13) следует:

$$P_l(x, y, s) = P_{fl}(x, s) e^{-\sqrt{s}y} \quad (17)$$

$$P_{fl}(x, s) = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\frac{2}{\sqrt{C_f}}x\sqrt{s}} \quad (18)$$

Для нахождения оригинала выражение (18) представим в виде:

$$P_{fl}(x, s) = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \frac{1}{s} \Phi(s) \quad (19)$$

Тогда, согласно теореме об интегрировании изображения [2], имеем:

$$P_f(x, t) = \frac{\pi}{\sqrt{2C_f}} \int_0^t F(\tau) d\tau \quad (20)$$

здесь $F(\tau) = L^{-1}\Phi(s)$.

Для нахождения $F(\tau)$ используем следующее правило операционного исчисления[2]:

$$L^{-1}F(\sqrt{s}) = \int_0^\infty \frac{u}{2\sqrt{\pi t}^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{4t}} f(u) du, \quad (21)$$

здесь $f(u) = L^{-1} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(e^{-\sqrt{\frac{2}{C_f}}x\sqrt{s}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} e^{-\frac{x^2}{2C_f u}}$.

Тогда

$$F(t) = L^{-1}\hat{O}(s) = L^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right) e^{-\sqrt{\frac{2}{C_f}}x\sqrt{s}} = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4t} - \frac{x^2}{2C_f u}} \sqrt{u} du.$$

Подставляя (22) в (20) получим:

$$P_{fl}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2C_f}} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4\tau} - \frac{x^2}{2C_f u}} \sqrt{u} du \quad (23)$$

В этом выражении изменим порядок интегрирования и вычислим интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{u} \operatorname{erfc} \frac{u}{2\sqrt{\tau}}.$$

Тогда, в окончательном виде выражение для распределения давления в трещине имеет вид:

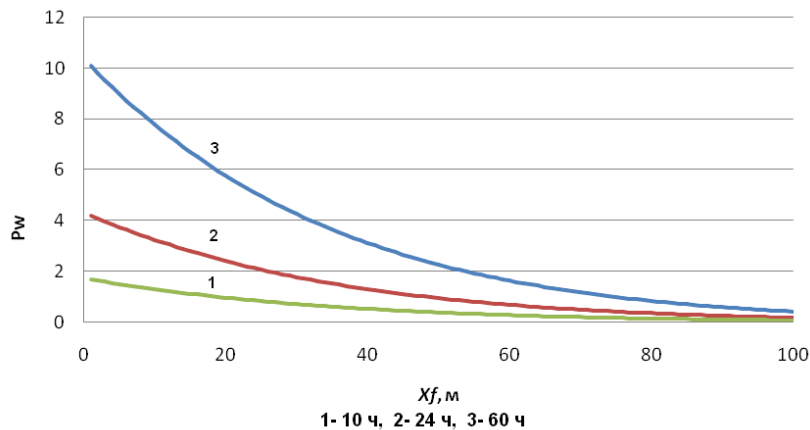


Рис.1. Профиль безразмерного давления в различные моменты времени. Скин-фактор = 0, ВСС = 0, безразмерная проницаемость =10.

$$P_{fl}(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{C_f}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2C_f u}} \operatorname{erfc} \frac{u}{2\sqrt{t}} \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (24)$$

Осуществляя переход от изображения к оригиналу по аналогичной методике в (17) можно найти выражение для давления в пласте.

Полагая в (24) $x=0$ получаем выражение для давления в скважине:

$$P_{fl}(0, t) = P_w = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{C_f}} \int_0^\infty \operatorname{erfc} \frac{u}{2\sqrt{t}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Интеграл в этом выражении известен [7]:

$$\int_0^\infty \operatorname{erfc} \frac{u}{2\sqrt{t}} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) t^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда

$$\bar{P}_w(\bar{t}) = \frac{2}{\sqrt{C_f}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \bar{t}^{\frac{1}{4}} \quad (25)$$

Нетрудно показать, что выражения (16) и (25) тождественно равны. Используя таблицы гамма-функции, из этих выражений получаем следующую типовую кривую, описывающую изменение давления на забое скважины от времени

$$\bar{P}_w(\bar{t}) = \frac{2,4508}{\sqrt{C_f}} \bar{t}^{\frac{1}{4}}$$

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов по формулам (13)–(24).

При этом обратное преобразование Лапласа проводилось численно методом Гавера–Стефеста [8].

Расчеты проводились при следующих базовых значениях параметров. Длина трещины, $X_f = 100$ м, время расчетной области, $t = 60$ ч, ширина трещины, $b_f = 5$ мм, пористость пласта $\varphi = 0.18$, пористость трещины $\varphi_f = 0.18$, общая сжимаемость $C_t = 0.15 \cdot 10^{-5}$ 1/Па, сжимаемость трещины $C_{if} = 9 \cdot 10^{-5}$ 1/Па, проницаемость пласта, $k = 1 \cdot 10^{-13}$ м², коэффициент пьезопроводности, $\eta_f = 1.5$ м²/сек, вязкость пластовой жидкости, $\mu = 1.5$ мПа·с.

На рис.1. представлены профили давления в моменты времени 10, 24, и 60 ч. За 60 ч давление вблизи скважины для данных параметров повышается примерно в 5 раз.

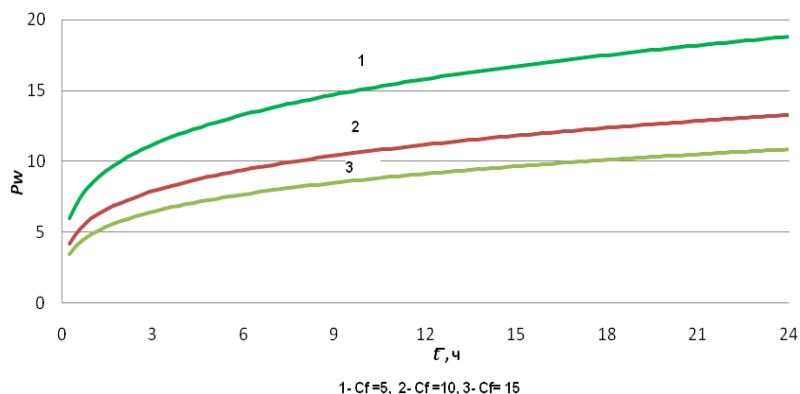


Рис.2. Давление на скважине от времени в зависимости от проводимости. Скин-фактор = 0, ВСС = 0, безразмерная проводимость = 5, 10 и 15.

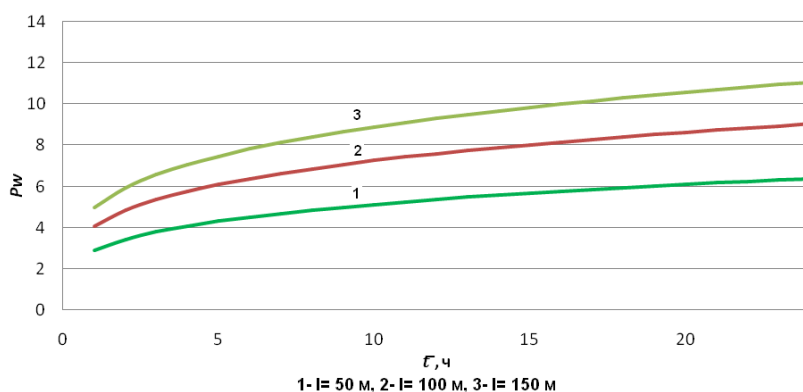


Рис. 3. Зависимость давления на скважине от времени для различных значений длины трещины.

Рис. 2 демонстрирует повышение давления на скважине со временем для различных значений проводимости. С увеличением проводимости перепад давления в трещине уменьшается. За 24 ч изменение проводимости в 3 раза снижает давление на скважине примерно в 1.5 раза.

Рис. 3 демонстрирует профили давления и давление на скважине от времени для различных значений длины трещины.

Расчеты по полученным в работе формулам позволяют количественно определить влияние параметров пласта и трещины, скин-эффекта и объема ствола скважины на распределение давления на забое скважины, в трещине и пласте. Сравнительный анализ полученных зависимостей давления с реальными кривыми восстановления или падения давления служат основой для гидродинамических методов исследования свойств пласта с трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cinco-Ley H., Samaniego V. F. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells // J. Petrol. Technol. 1981. V.33. №9. P. 1749–1766.
2. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco Ley H. Application of the Pressure-derivative Function in the Pressure-transient of Fractured wells. SPE 13056, October 1986, P. 470–480.
3. Каневская Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр». 1999. 212 с.
4. Нагаева З. М., Шагапов В. Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 3. С. 319–329.
5. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // «Математика, механика и физика». Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22. №2. С. 309–314.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Физматлит. 2003. 664 с.
8. H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. Commun. ACM, 13(1):47–49, 1970.

Поступила в редакцию 30.11.2018 г.

FILTRATION MODELING FOR THE WELL WITH VERTICAL HYDRAULIC FRACTURING

© F. F. Nazmutdinov*, I. L. Khabibullin, N. K. Vakhitova

*Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

**Email: mmx_@mail.ru*

The authors of the article studied modeling of filtration process in the layer with vertical hydraulic fracturing well. The model was considered for bilinear flow approximation, which includes two mutually perpendicular fluid flows in the layer and in the fracture. In this case, the pressure distribution is described by one-dimensional pressure conductivity equations taking into account the flow of fluid through the fracture-layer interface. The model was implemented using the Laplace transform method. The final result of the modeling are expressions describing pressure distribution in the layer, fracture, and at the bottom hole. The model takes into account the skin effect at the layer-fracture interface and the effect on the pressure distribution of the wellbore volume. In the particular case, where the skin effect and the effect of the wellbore volume are not taken into account, an analytical expression was obtained for the pressures by finding the original from the image of the Laplace transform. The asymptotic representation of the solution for small values of time was also considered. The results of the modeling can be used in interpreting data of pressure transient analysis of hydraulic fracturing crack.

Keywords: modeling, filtration, layer, fracture, hydraulic fracturing, skin effect, pressure distribution.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Cinco-Ley H., Samaniego V. F. *J. Petrol. Technol.* 1981. V.33. No. 9. Pp. 1749–1766.
2. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco Ley H. Application of the Pressure-derivative Function in the Pressure-transient of Fractured wells. *SPE* 13056, October 1986, Pp. 470–480.
3. Kanevskaya R. D. *Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdenii nefi i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta*. Moscow: OOO «Nedra-Biznestsentr». 1999.
4. Nagaeva Z. M., Shagapov V. Sh. *PMM*. 2017. Vol. 81. No. 3. Pp. 319–329.
5. Khabibullin I. L., Khisamov A. A. «*Matematika, mekhanika i fizika*». *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2017. Vol. 22. No. 2. Pp. 309–314.
6. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoe ischislenie [Operational calculus]*. Moscow: Vysshaya shkola, 1975.
7. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Vol. 2. Spetsial'nye funktsii [Integrals and series. Vol. 2. Special functions]*. Moscow: Fizmatlit. 2003.
8. H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. *Commun. ACM*, 13(1):47–49, 1970.

Received 30.11.2018.