

УДК 532.5.013.2

## К ТЕОРИИ БИЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТАХ С ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА

© И. Л. Хабибуллин, А. А. Хисамов\*

Башкирский государственный университет  
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

\*Тел.: +7 (917) 469 62 63.

\*Email: khisamovartur@list.ru

Рассмотрена задача о нестационарном притоке жидкости из пласта в скважину с вертикальной трещиной гидроразрыва. При этом реализуется билинейный режим фильтрации, представляющий собой два одновременно существующих взаимно-перпендикулярных фильтрационных потока в системе пласт-трещина.

Моделируется случай, когда в скважине поддерживается постоянное давление. Используя метод преобразования Лапласа, получены выражения для распределения давления в трещине и в пласте. Приведены два вида решения рассматриваемой задачи, отличающиеся использованием различных методов перехода от изображений к оригиналам. Из полученных решений в частных случаях следуют известные в литературе соотношения, имеющие самостоятельный интерес. Полученные решения позволяют количественно оценить влияние коллекторских параметров пласта и трещины на распределение давления и дебит скважины.

**Ключевые слова:** пласт, трещина гидроразрыва, нестационарная фильтрация, билинейный режим фильтрации, аналитическое решение, метод преобразований Лапласа.

### Введение

Билинейный режим фильтрации впервые был описан в работе [1], посвященной моделированию фильтрации флюида к скважине, пересеченной вертикальной трещиной гидроразрыва. Билинейный режим течения представляет собой совокупность двух взаимно перпендикулярных одномерных потоков сжимаемой жидкости из пласта в трещину через ее боковую поверхность и из трещины в скважину. В плотных коллекторах малой проницаемости гидравлическая связь скважины и пласта реализуется не непосредственно через призабойную зону пласта, а через трещину гидроразрыва, которая пересекает ствол скважины и имеет длину на несколько порядков большую, чем радиус скважины. При этом ширина (раскрытие) трещины намного меньше, чем другие ее размеры (высота и длина). Указанные соотношения характерных размеров системы пласт-трещина-скважина обуславливают сложную геометрию течения флюида.

В настоящее время считается общепринятым, что период неустановившегося течения жидкости в пласте вскрытой скважиной с вертикальной трещиной гидроразрыва разделяется на несколько этапов (режимов), которые последовательно сменяют друг друга и имеют разные длительности. Это – линейный поток жидкости в трещине, билинейный режим фильтрации, линейный поток жидкости в пласте, трелинейный поток в системе пласт-трещина, псевдоразрадный режим фильтрации в пласте [1–3]. В классическом случае отсутствия трещины, поток в пласте считается радиальным, при этом скважина рассматривается как цилиндрический источник или сток малого радиуса.

Данная классификация режимов течения получена на основе аналитических и численных (по-

луаналитических) исследований различных моделей течения [2]. Она служит основой для создания графоаналитических методик интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин с трещинами. Выделение режимов течения и анализ кривых изменения давления на забое скважины в зависимости от времени позволяют определять коллекторские характеристики трещины и пласта. Поэтому конечной целью расчетов по моделям было определение давления на забое скважины или дебита скважины (если скважина эксплуатировалась в режиме заданного давления). Полное решение задачи, позволяющее определить распределение давления и расходов жидкости в трещине и в пласте, не рассматривалось. Такие решения для случая полубесконечного пласта и трещины неограниченной длины построены впервые в [4–5]. Данная работа является логическим продолжением этих исследований.

Рассмотрим первую краевую задачу, когда на скважине задано давление. Схема фильтрационного потока приведена на рис. 1.

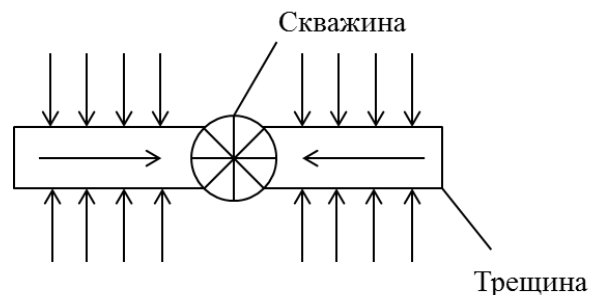


Рис 1. Схема билинейного потока (вид сверху).

В безразмерном виде постановка задачи имеет вид [4–5]:

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \tag{2}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t} = 0) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0 \tag{3}$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) \tag{4}$$

$$\bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t}) = 1, P_i(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty) = 0 \tag{5}$$

Здесь  $a = \frac{\kappa_f}{\kappa_r}, b = a \frac{k_r \kappa_f}{k_f w_f}, \bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P_c - P_0}, \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P_c - P_0}, \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \bar{t} = t \frac{\kappa_r}{x_f^2}.$

Уравнения (1) и (2) соответственно описывают распределения давления в пласте и в трещине,  $x, y, t$  – координаты и время,  $\kappa_f, \kappa_r, k_f$  и  $k_r$  – коэффициенты пьезопроводности и проницаемости трещины и пласта.  $x_f$  – половина длины трещины,  $P_c$  – давление на скважине,  $P_0$  – начальное давление в пласте и в трещине, индексы  $f$  и  $r$  – относятся к трещине и пласту.

В пространстве изображений преобразования Лапласа

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, s) = \int_0^\infty \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, t) e^{-s\bar{t}} d\bar{t} = L(\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, t))$$

задача (1)–(5) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{dy^2} = s \bar{P}_r \tag{6}$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} - \frac{s}{a} \bar{P}_f + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_f}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0 \tag{7}$$

$$\bar{P}_r(x, y = 0, s) = \bar{P}_f(x, s) \tag{8}$$

$$\bar{P}_f(0, s) = \frac{1}{s} \bar{P}_i(x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty) = 0 \tag{9}$$

Решение задачи (6) – (9), полученное традиционными методами имеет вид [4]:

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \frac{1}{s} e^{-\bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s} - y \sqrt{s}}} \tag{10}$$

$$\bar{P}_f(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}} \tag{11}$$

Для перехода к оригиналу в этих выражениях используем формулу обращения Меллина. Тогда, для (11) имеем [6]:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{s\bar{t} - \bar{x} \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}} \frac{ds}{s} \tag{12}$$

Подинтегральная функция имеет точку ветвления в начале координат, поэтому она является однозначной и аналитической на всей плоскости комплексной переменной  $s = \gamma + i\sigma$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси, соединенной с дугой окружности, включающей начало координат. Известно, что интегрирование по отрезку  $(\gamma - i\sigma, \gamma + i\sigma)$  может быть заменено интегрированием вдоль любой кривой, которая имеет концы в точках  $\gamma \pm i\sigma$  и не пересекает разрез [6]. При этом можно воспользоваться контуром интегрирования (рис. 2)

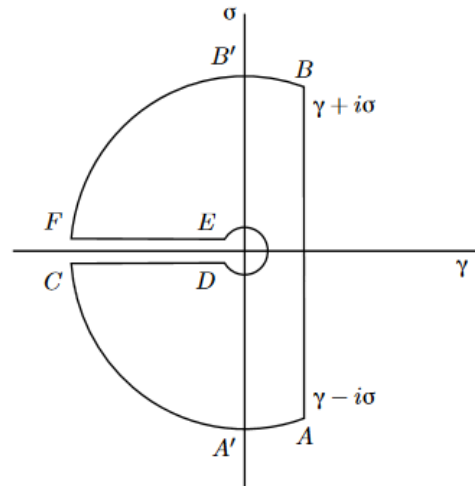


Рис. 2. Контур интегрирования.

Тогда

$$\int_{\gamma - i\sigma}^{\gamma + i\sigma} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}$$

Можно показать [6], что интегралы вдоль дуг AC и FB при  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. На прямых CD и EF соответственно  $s = \rho e^{i\pi} = -\rho, \sqrt{s} = i\sqrt{\rho}, s = \rho e^{-i\pi} = -\rho, \sqrt{s} = -i\sqrt{\rho}$ , здесь  $\rho = |s|$ .

Тогда, переходя к пределу при  $r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  имеем

$$\int_{CD} + \int_{EF} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^R e^{-\rho \bar{t} - x \sqrt{-\frac{\rho}{a} + \frac{b}{a} i \sqrt{\rho}}} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2\pi i} \int_r^R e^{-\rho \bar{t} - x \sqrt{-\frac{\rho}{a} - \frac{b}{a} i \sqrt{\rho}}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \bar{t} - \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2 \rho}}} \frac{\rho}{a} \sin \left[ \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2 \rho} + \frac{\rho}{a}} \right] \frac{d\rho}{\rho}.$$

Рассмотрим интеграл по кругу DE.

Полагая  $s = \varepsilon e^{i\varphi}, ds = \varepsilon e^{i\varphi} i d\varphi, \frac{ds}{s} = i d\varphi$  получаем  $\sqrt{s} = \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ .

$$\int_{DE} = \int_{DE} e^{st - x \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{s}}} \frac{ds}{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[ t \varepsilon e^{i\varphi} - x \sqrt{\frac{\varepsilon}{a} e^{i\varphi} + \frac{b}{a} \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right] i d\varphi$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{DE} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} i d\varphi = i[\pi - (-\pi)] = 2\pi i.$$

В итоге выражение (12) принимает вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[ -\rho \bar{t} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\rho^2 + b^2 \rho - \rho} \right] \cdot \sin \left( \frac{\bar{x}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\rho^2 + b^2 \rho + \rho} \right) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (13)$$

Аналогично осуществляется переход к оригиналу в выражении (10).

Таким образом, окончательное решение задачи, определяющее распределение давления в трещине и в пласте имеет вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \bar{t} - f_1(\rho) \bar{x}} \sin[f_2(\rho) \bar{x}] \frac{d\rho}{\rho} \quad (14)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \bar{t} - f_1(\rho) \bar{x}} \sin[f_2(\rho) \bar{x} + \sqrt{\rho} \bar{y}] \frac{d\rho}{\rho} \quad (15)$$

Здесь

$$f_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\rho^2 + b^2 \rho - \rho}, f_2(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\rho^2 + b^2 \rho + \rho}.$$

Отметим, что непосредственной подстановкой можно показать, что выражения (14)–(15) удовлетворяют исходной задаче, то есть уравнениям (1) – (2) и краевым условиям (3)–(5).

Другой вид решения рассматриваемой задачи построено в [4]. Согласно этой работе, распределение давления в трещине и в пласте определяются выражениями:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 e^{-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}z^2}} \operatorname{erfc} \frac{z^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-z^2}} \frac{dz}{z^2}, \quad (16)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \int_0^1 e^{-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}z^2}} \operatorname{erfc} \frac{\bar{y} + z^2 b \bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}(1-z^2)}} \frac{dz}{z^2}. \quad (17)$$

Здесь  $\operatorname{erfc} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty e^{-u^2} du$  – дополнительная функция ошибок.

Эти выражения эквивалентны (14)–(15), так как они представляют решения одной и той же задачи, построенные методом преобразования Лапласа, но переход от изображений к оригиналу получен разными методами. При получении выражений (14)–(15) выше использована теорема Меллина (общая формула перехода от изображений к оригиналу), а (16) и (17) получены в [4] используя общие правила преобразования Лапласа.

Рассмотрим частные случаи.

В случае, когда трещина с насыщающим ее флюидом считается несжимаемой ( $\kappa_f \rightarrow \infty$  и  $a \rightarrow \infty$ ) из (14) (с учетом того, что  $\frac{b}{a} = \frac{k_r x_f}{k_f w_f}$ ), следует выражение, аналогичное полученному в [7]:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[ -\rho \bar{t} - \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a} \sqrt{\rho}} \right] \sin \left[ \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a} \sqrt{\rho}} \right] \frac{d\rho}{\rho} \quad (18)$$

Также можно получить эквивалентную (18) формулу решения задачи, когда трещина с насыщающим флюидом считается несжимаемой средой. Из вышеизложенного очевидно, что при этом выражение для давления в трещине в пространстве изображений Лапласа имеет вид (в (2) принимается, что  $\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = 0$ ):

$$\bar{P}_f = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{b}{a}} x \sqrt{s}} \quad (19)$$

Это выражение соответствует приближению  $\frac{s}{a} \ll \frac{b}{a} \sqrt{s}$  (см (11)), то есть  $\sqrt{s} \ll b$  или  $\frac{1}{\sqrt{t}} \ll b$ . В работе [7] оригинал этого выражения найден с использованием интеграла Меллина и в наших обозначениях имеет вид (18).

Здесь рассмотрим другой метод перехода в (19) к оригиналу. Выражение (19) представим в виде:

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{s}} L[V], L[V] = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-c \sqrt{s}}, c = \sqrt{\frac{b}{a}} x. \quad (20)$$

Используя теорему о свертке и соответствие [6]

$$L^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

получим

$$P_f = \int_0^t \frac{V(x, \tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau. \quad (21)$$

Таким образом, необходимо найти  $V(x, t)$  из (20), тогда искомое значение оригинала находится из (21).

Используя правило операционного исчисления [6]

$$L^{-1} \left[ \frac{g(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{u^2}{4t}} du,$$

где  $f(t) = L^{-1}g(s) = L^{-1}[e^{-c \sqrt{s}}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{c}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{c^2}{4t}}$ , из (20) имеем:

$$V(x, t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4t} - \frac{c^2}{4u}} \frac{du}{u\sqrt{u}}$$

Подставим это выражение в (21) и изменим порядок интегрирования:

$$P_f = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4u}} \frac{du}{u\sqrt{u}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}$$

Внутренний интеграл вычисляется:

$$\int_0^t e^{-\frac{u^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} = \operatorname{perfc} \left( \frac{u}{2\sqrt{t}} \right)$$

Тогда, в окончательном виде для распределения давления в трещине получается следующее выражение:

$$P_f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} x \int_0^\infty e^{-\frac{bx^2}{4au}} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{t}}\right) \frac{du}{u\sqrt{u}} \quad (22)$$

Рассмотрим предельный случай  $b = 0$  (отсутствие притока флюида из пласта в трещину). При этом из (14) и (16), вычисляя интегралы получим:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho \bar{t}} \sin\left(\frac{\bar{x}\sqrt{\rho}}{\sqrt{a}}\right) \frac{d\rho}{\rho}.$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = \operatorname{erfc}\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\bar{x}}{2\sqrt{a\bar{t}}}} e^{-\rho^2} d\rho.$$

Как и следовало ожидать, эти выражения совпадают с решением классической задачи о плоско-параллельной фильтрации упругой жидкости в полубесконечном пласте [8].

Таким образом, выше представлены решения следующих задач:

1) билинейный режим течения упругой жидкости в системе пласт-трещина (нестационарная задача).

2) билинейный режим течения в системе пласт-трещина в приближении несжимаемости трещины и насыщающего ее флюида (квазистационарное приближение).

3) Классическая задача о плоско-параллельной фильтрации упругой жидкости в полубесконечной области (предельный случай рассматриваемых задач при  $b \rightarrow 0$ ).

Решения этих задач построены методом преобразования Лапласа. Для перехода от изображений к оригиналам использованы два метода: вычисление оригинала используя контурный интеграл Меллина; вычисление оригинала, используя общие правила теории преобразований Лапласа и таблицы перехода от изображений к оригиналам.

При этом для всех рассмотренных задач решения получены в различной форме. Для распределения давления в трещине это выражения (14) и (16) для билинейного режима течения упругой жидкости, (18) и (22) – для билинейного режима в квазистационарном приближении, (23) и (24) – для задачи о плоско-параллельной фильтрационном потоке.

Представляет интерес строго математически доказать тождественность соответствующих выражений (14) и (16), (15) и (17), (18) и (22), (23) и (24). Тождественное равенство выражений (23) и (24) показывается достаточно просто. Для этого необ-

ходимо в (23) использовать подстановку  $\rho = \xi^2$  и вычислить интеграл методом дифференцирования по параметру  $\frac{\bar{x}}{\sqrt{a}}$ . Установление тождественности остальных выражений не тривиально и этот вопрос требует специального исследования. Отметим, что численные расчеты по этим выражениям показывают совпадение значений для соответствующих случаев в рамках принятой степени точности расчетов. В табл. приведены значения  $\bar{P}_f$ , вычисленные по выражениям (14) и (16) при  $a = 1000$ ,  $b = 2$  для трех значений  $\bar{t}$ :  $\bar{t}_1 = 0.002$ ,  $\bar{t}_2 = 0.02$  и  $\bar{t}_3 = 0.2$ .

Из этой табл. также видно, что для рассматриваемого случая  $\frac{a}{b} = 500$  (трещина высокой проводимости), падение давления вдоль трещины является незначительным.

Как отмечено в литературе, квазистационарное приближение имеет самостоятельный интерес с точки зрения развития методов гидродинамических исследований скважин [9, 10] и общей теории фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва [7]. В частности это приближение также соответствует билинейному режиму течения, для которого характерна зависимость давления в скважине от времени в степени одна четвертая. Из приведенного выше неравенства  $\sqrt{s} \ll b$  (см. формулу (20)) следует, что данное приближение имеет место при выполнении условия

$$t \gg t_* = \left(\frac{m_f}{m_r}\right)^2 \frac{w_f^2}{\kappa_r}.$$

Отметим, что выражение для  $t_*$  с точностью до множителя  $\frac{1}{4\pi}$  совпадает с аналогичным выражением в [7], т.е. различие значение  $t_*$  достигает одного порядка.

На рис. 3 представлены распределения давления вдоль трещины, вычисленные по формулам (14) и (18) при разных значениях безразмерной проводимости трещины. По оси абсцисс отложена величина  $\bar{x} = \frac{x}{x_f}$ , по оси ординат  $P_f = P_0 + \bar{P}_f(P_c - P_0)$  (принято  $P_c = 200$  атм,  $P_0 = 300$  атм). Из рис. 3 следует, что падение давления вдоль трещины зависит от ее безразмерной проводимости, с уменьшением этой величины падение давления в трещине существенно увеличивается. При этом значения давления, вычисленные по формулам (14) и (18), практически совпадают.

Таблица

$\bar{x}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\bar{t}_1$ (14)	1	0.9571	0.9146	0.8726	0.8311	0.7902	0.7500	0.7106	0.6721	0.6346	0.5980
$\bar{t}_1$ (16)	1	0.9574	0.9149	0.8729	0.8313	0.7905	0.7503	0.7109	0.6725	0.6349	0.5984
$\bar{t}_2$ (14)	1	0.9845	0.969	0.9537	0.9384	0.9233	0.9082	0.8932	0.8783	0.8635	0.8489
$\bar{t}_2$ (16)	1	0.9847	0.9693	0.954	0.9387	0.9235	0.9085	0.8935	0.8786	0.8638	0.8491
$\bar{t}_3$ (14)	1	0.9934	0.9869	0.9804	0.9739	0.9674	0.961	0.9546	0.9482	0.9418	0.9355
$\bar{t}_3$ (16)	1	0.9937	0.9871	0.9806	0.9741	0.9677	0.9612	0.9548	0.9484	0.9421	0.9357

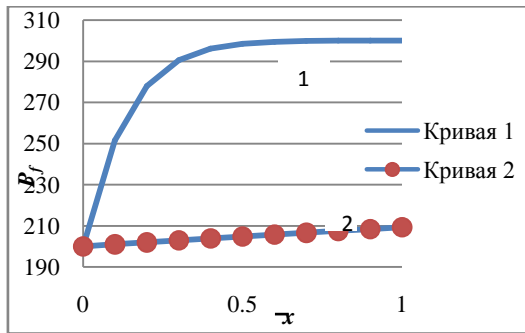


Рис 3. Распределение давления вдоль трещины, кривая 1 -  $\frac{a}{b} = 0,1$ , кривая 2 -  $\frac{a}{b} = 500$ ,  $\bar{t} = 0,002$ .

Учитывая геометрическую симметрию задачи и предположение о том, что жидкость из пласта в скважину поступает через поверхность пересечения скважины и трещины площадью  $4w_f h$ , дебит скважины можно определить по формуле:

$$Q = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f(0, t)}{\partial x} 4w_f h.$$

Очевидно, что при этом безразмерный дебит определяется согласно выражению:

$$\bar{Q} = -\frac{\partial \bar{P}_f(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \text{ и } Q = \bar{Q} \frac{4w_f h k_f (P_c - P_0)}{\mu x_f} \quad (25)$$

Из (14) имеем:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi \sqrt{2a}} \int_0^{\infty} e^{-\rho \bar{t}} \sqrt{\sqrt{\rho^2 + b^2} \rho + \rho} \frac{d\rho}{\rho} \quad (26)$$

В квазистационарном приближении из (18) следует:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{\infty} e^{-\rho \bar{t}} \rho^{-\frac{3}{4}} d\rho = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b}{2a}} \bar{t}^{-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \quad (27)$$

Здесь  $\Gamma$  – символ гамма-функции,  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{x-1} d\rho$ .

На рис. 4 представлены зависимости дебита от времени, вычисленные по формулам (26) и (27) для нестационарного распределения давления и квазистационарного приближения. Видно, что различие в дебитах является заметным.

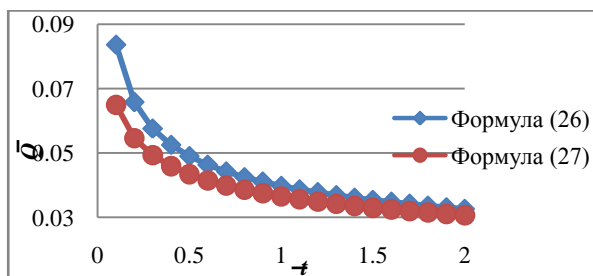


Рис 4. Зависимость дебита от времени,  $a = 1000, b = 2$

Модели билинейного потока в приближении несжимаемости трещины с флюидом рассмотрены также в работах [9–10].

В работе [9] рассматривается трещина конечной длины, при этом условие для давления в трещине на бесконечности заменяется условием отсутствия потока на торцевом конце трещины. Также рассматривается случай трещины бесконечной длины, когда учитывается влияние объема ствола скважины на распределение давления.

В работе [10] рассматривается модель фильтрации в окрестности скважины с вертикальной трещиной ГРП, с учетом влияния ствола скважины и наличия скин-зоны вокруг трещины. Аналитические решения получены в пространстве изображений преобразования Лапласа. Численная инверсия этих решений с использованием метода Стеффеста позволила авторам построить теоретические (типовые) кривые зависимостей давления на скважине и производных по давлению от времени с учетом эффекта ВСС и скин-эффекта. В работе на основе конкретных примеров показана возможность использования этих кривых для определения коллекторских параметров пласта и трещины.

Полученные в данной работе аналитические решения позволяют исследовать влияние коллекторских свойств пласта и трещины на распределение давления в системе пласт-трещина и на дебит скважины, а так же представляют теоретическую основу гидродинамических методов исследования скважин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heber Cinco-Ley, Fernando Samaniego-V. Transient Pressure Analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33, №9, P. 1749–1766.
2. Blasingame T. A. B.D. Loe Semianalytic Solutions For a Well with a Single Finite-Conductivity Vertical Fracture. SPE. October 1993. P. 89–100.
3. Каневская Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: ООО «Недра – Бизнесцентр». 1999. 212 с.
4. Хабибуллин И. Л., Евграфов Н. А., Хисамов А. А. Моделирование нестационарного потока жидкости из пласта в скважину через трещину гидроразрыва // Физико-химическая гидродинамика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 184–192.
5. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва. Математика, механика и физика. Вестник Баш. ун-та. 2017. Т. 22. №2. С. 309–314.
6. Диткин А. В., Прудников А. П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975, 407 с.
7. Нагаева З. М., Шагапов В. Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте. ПММ, 2017. Т. 81. Вып. 3. С. 319–329.
8. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2006. 488 с.
9. Edward J. Hanley and Pratip Bandyu-padhyay. Pressure Transient Behavior of the uniform flux Finite Capacity Fracture. SPE 8278.
10. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. Application of the Pressure-Derivative Function in the Pressure-Transient Testing of Fracture Wells. Paper SPE 13056. SPE formation Evaluation, October 1986: С. 470–480.

Поступила в редакцию 16.04.2018 г.

## ON THE THEORY OF BILINEAR FLOW REGIME IN THE LAYERS WITH HYDRAULIC FRACTURING CRACKS

© I. L. Khabibullin, A. A. Khisamov\*

*Bashkir State University  
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.*

*Phone: +7 (917) 469 62 63.*

*\*Email: khisamovartur@list.ru*

The authors of the article considered mathematical model of unsteady fluid influx from the layer to well with hydraulic fractured crack. In this case, bilinear flow is implemented; this flow regime is caused by simultaneous transient flow in both fracture and layer. Nowadays, the filtration theory in the layers with hydraulic fracturing crack is well developed in the case of steady-state filtration. In this regard, it is of interest to deduce problem definition of unsteady filtration around the hydraulic fractured well. In the filtration process, nonstationary effects are strongly manifested in the initial stages of pressure distribution manifestation for short time; the main well tests are carried out during these moments. The production well operates under conditions of a constant pressure. Analytical solution of pressure distribution problem of unsteady filtration around the vertical hydraulic fractured well was calculated. Pressure distribution in a crack and in the layer was determined by application of the Laplace transformation. The results of analytical solution enables one to estimate the influence of some parameters of the layer and fracture on pressure distribution and flow rate.

**Keywords:** layer, hydraulic fractured crack, unsteady filtration, bilinear flow regime, analytical solution, mathematical modeling, Laplace transformation.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin\_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

### REFERENCES

1. Heber Cinco-Ley, Fernando Samaniego-V. J. *Petrol. Technol.* 1981. Vol. 33, No. 9, Pp. 1749–1766.
2. Blasingame T. A. B.D. *Log Semianalytic Solutions For a Well with a Single Finite-Conductivity Vertical Fracture.* SPE. October 1993. Pp. 89–100.
3. Kanevskaya R. D. *Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdenii nefti i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta* [Mathematical modeling of oil and gas field development using hydraulic fracturing]. Moscow: OOO «Nedra – Biznestsentr». 1999.
4. Khabibullin I. L., Eygrafov N. A., Khisamov A. A. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika.* Ufa: RITs BashGU, 2016. Pp. 184–192.
5. Khabibullin I. L., Khisamov A. A. *Modelirovanie nestatsionarnoi fil'tratsii vokrug skvazhiny s vertikal'noi treshchinoi gidrorazryva.* Matematika, mekhanika i fizika. Vestnik Bash. un-ta. 2017. Vol. 22. No. 2. Pp. 309–314.
6. Ditkin A. V., Prudnikov A. P. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow: Vysshaya shkola, 1975.
7. Nagaeva Z. M., Shagapov V. Sh. *Ob uprugom rezhime fil'tratsii v treshchine, raspolozhennoi v neftyanom ili gazovom plaste.* PMM, 2017. Vol. 81. No. 3. Pp. 319–329.
8. Basniev K. S., Dmitriev N. M., Kanevskaya R. D., Maksimov V. M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydromechanics]. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. 2006.
9. Edward J. Hanley and Pratip Bandyu-padhyay. *Pressure Transient Behavior of the uniform flux Finite Capacity Fracture.* SPE 8278.
10. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. *Application of the Pressure-Derivative Function in the Pressure-Transient Testing of Fracture Wells.* Paper SPE 13056. SPE formation Evaluation, October 1986: Pp. 470–480.

*Received 16.04.2018.*