УДК 517.52, 517.53

РАЗБИЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫЕ ГРУППЫ

© О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Тел.: +7 (347) 229 96 65.
Email: kriolesya2006@yandex.ru

В работе рассматриваются кратные последовательности комплексных чисел. Изучается разбиение таких последовательностей на относительно малые группы. Это группы, отношение диаметра которых к модулям точек этих групп стремится к нулю. Кроме того, стремится к нулю также отношение числа точек в группе к модулям этих точек. Возможность разбиения на относительно малые группы играет важную роль в вопросах представления элементов инвариантного относительно оператора дифференцирования подпространства функций, аналитических в выпуклой области комплексной плоскости, при помощи ряда экспоненциальных многочленов. Выясняются необходимые и достаточные условия, при которых кратная последовательность комплексных чисел может быть разбита на относительно малые группы таким образом, что групповой индекс конденсации А. С. Кривошеева последовательности для данного разбиения равен нулю или конечен. Для произвольной кратной последовательности комплексных чисел получен критерий разбиения ее на относительно малые группы с нулевым или конечным индексом конденсации. Этот критерий формулируется при помощи индекса концентрации А. С. Кривошеева кратной комплексной последовательности. Он должен быть соответственно равен нулю или конечен. Кроме того, приводятся простые достаточные условия на кратную последовательность комплексных чисел, при которых существует ее разбиение на относительно малые группы с нулевым индексом конденсации. Эти условия используют локальные числовые характеристики последовательности, связанные с числом точек этой последовательности с учетом их кратностей в кругах с центрами в этих точках и относительно малыми радиусами.

Ключевые слова: *ряд экспоненциальных мономов, относительно малая группа, индекс конденсации, выпуклая область.*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Всюду в дальнейшем будем считать, что $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|, k \geq 1$, и $|\lambda_k| \to \infty, k \to \infty$. В работе выясняются условия, при которых последовательность Λ можно разбить на так называемые относительно малые группы, которые в некотором смысле отделены друг от друга. Необходимость подобного разбиения возникает при исследовании задач представления функций из инвариантных подпространств посредством рядов экспоненциальных многочленов (см., например, [1–2]).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ – разбиение последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на группы $U_m, m \geq 1$. Перенумеруем члены последовательности Λ. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности – $n_{m,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m – число точек λ_k, попавших в группу U_m. Положим еще

$$N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}.$$

Таким образом, N_m – число точек λ_k, попавших в группу $U_m, m \geq 1$, с учетом их кратности. Будем считать, что $|\lambda_{m+1,1}| \geq |\lambda_{m,1}|, m \geq 1$.

Пусть последовательность Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, *где* $U_m = \{\lambda_{m,v}\}_{v=1}^{M_m}$. Будем говорить, что $U_m, m \geq 1,$ – группы относительно малого диаметра, если

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leq j,l\leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0. \quad (1)$$

Будем также говорить, что группы U_m относительно малы, если они являются группами относительно малого диаметра и верно равенство $N(\Lambda, U) = 0$, где

$$N(\Lambda, U) = \lim_{m\to\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|}.$$

Положим

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, q_{\Lambda,U}^{m,l}(z, \delta) = \prod_{\lambda_{k,v} \in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|), k\neq m} \left(\frac{z - \lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\right)^{n_{k,v}}, m \geq 1,$$

где $B(z,r)$ – открытый круг с центром в точке z и радиуса $r>0$. Если круг $B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|)$ не содержит точек $\lambda_{k,v}, k\neq m$, то считаем, что $q_{\Lambda,U}^{m,l}(z,\delta)\equiv 1$. Пусть $\delta\in(0,1)$. Тогда модуль каждого сомножителя функции $q_{\Lambda,U}^{m,l}$ в круге $B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|)$ оценивается сверху числом $2\big(3(1-\delta)\big)^{-1}$. Поэтому

$$\frac{z-\lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|}\leq 1, z,\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|), \delta\in(0,1/3)\,. (2)$$

Отсюда следует, что

$$\left|q_{\Lambda,U}^{m,l}(z,\delta_1)\right|\geq\left|q_{\Lambda,U}^{m,l}(z,\delta_2)\right|, z\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|), 0<\delta_1\leq\delta_2<1/3\,. (3)$$

Для разбиения U определим групповой индекс конденсации А.С. Кривошеева ([1])

$$\mathcal{S}_\Lambda(U)=\lim_{\delta\to 0}\mathcal{S}_\Lambda(U,\delta)\,, \mathcal{S}_\Lambda(U,\delta)=\varliminf_{m\to\infty}\min_{1\leq l\leq M_m}\frac{\ln\left|q_{\Lambda,U}^{m,l}(\lambda_{m,l},\delta)\right|}{|\lambda_{m,l}|}.$$

В силу *(3)* функция $\mathcal{S}_\Lambda(U,\delta)$ монотонна. Поэтому предел всегда существует. При этом согласно *(2)* верно неравенство $\mathcal{S}_\Lambda(U)\leq 0$.

Символом $n_\Lambda(z,\delta)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, попавших в круг $B(z,\delta|z|)$. Положим

$$M_\Lambda(\delta)=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{n_\Lambda(\lambda_k,\delta)}{|\lambda_k|}, M_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}M_\Lambda(\delta).$$

Второе равенство корректно, т.к. функция $M_\Lambda(\delta)$, очевидно, неубывающая. При условии $M_\Lambda=0$ величина $\mathcal{S}_\Lambda(U)$ не изменится, если в определении функции $q_{\Lambda,U}^{m,l}$ число 3 заменить на любое другое отличное от нуля (см. по этому поводу замечание к теореме 5.1 в работе [3]). Коэффициент 3 выбран лишь для удобства в процессе рассуждений. Примеры вычисления величины $\mathcal{S}_\Lambda(U)$ имеются в работах [1–2; 4–5].

Символом $n(r,\Lambda)$ обозначим считающую функцию Λ, т.е. $n(r,\Lambda)$ – число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, которые попадают в круг $B(0,r)$. Верхней плотностью последовательности Λ называется величина

$$\overline{n}(\Lambda)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Согласно лемме 2.1 из работы [2] верно утверждение: если $M_\Lambda<\infty$, то $\overline{n}(\Lambda)<\infty$.

Рассмотрим некоторые свойства индекса конденсации. Но прежде введем еще одну характеристику. Положим

$$M_\Lambda^1=\varliminf_{\delta\to 0}\ln\delta\, M_\Lambda(\delta)=\varliminf_{\delta\to 0}\ln\delta\,\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{n_\Lambda(z,\delta)}{|z|}.$$

Лемма 1. *Пусть последовательность* Λ *разбита на относительно малые группы* $U=\{U_m\}_{m=1}^\infty$, $U_m=\{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$. *Тогда* $\mathcal{S}_\Lambda(U)\leq M_\Lambda^1$.

Доказательство. Если $\mathcal{S}_\Lambda(U)=-\infty$, то утверждение тривиально. Пусть $\mathcal{S}_\Lambda(U)>-\infty$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Согласно определению $\mathcal{S}_\Lambda(U)$ выберем $\alpha\in(0,1/3)$ и номер m_0 такой, что

$$\min_{1\leq l\leq M_m}\ln\left|q_{\Lambda,U}^{m,l}(\lambda_{m,l},\alpha)\right|/|\lambda_{m,l}|\geq\mathcal{S}_\Lambda(U)-\varepsilon, m\geq m_0.$$

Пусть $\delta\in(0,\alpha)$. Тогда по определению $q_{\Lambda,U}^{m,l}$ с учетом *(2)* для всех $l=\overline{1,M_m}$ и $m\geq m_0$ имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\Lambda(U)-\varepsilon&\leq\frac{1}{|\lambda_{m,l}|}\sum_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,l},\alpha|\lambda_{m,l}|),k\neq m}n_{k,v}\ln\frac{|\lambda_{m,l}-\lambda_{k,v}|}{3\alpha|\lambda_{k,v}|}\leq\\&\leq\frac{1}{|\lambda_{m,l}|}\sum_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|),k\neq m}n_{k,v}\ln\frac{|\lambda_{m,l}-\lambda_{k,v}|}{3\alpha|\lambda_{k,v}|}\leq\\&\leq\frac{1}{|\lambda_{m,l}|}\sum_{\lambda_{k,v}\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|),k\neq m}n_{k,v}\ln\frac{\delta|\lambda_{m,l}|}{3\alpha(1-\delta)|\lambda_{m,l}|}\leq\\&\leq\frac{n_\Lambda(\lambda_{m,l},\delta)-N_m}{|\lambda_{m,l}|}\ln\frac{\delta}{3\alpha(1-\delta)}.\end{aligned}$$

По условию $N(\Lambda,U)=0$. Поэтому в силу определения $M_\Lambda(\delta)$ получаем:

$$\mathcal{S}_\Lambda(U)-\varepsilon\leq\ln\frac{\delta}{3\alpha(1-\delta)}\varlimsup_{m\to\infty}\max_{1\leq l\leq M_m}\frac{M_\Lambda(\lambda_{m,l},\delta)}{|\lambda_{m,l}|}=M_\Lambda(\delta)\ln\frac{\delta}{3\alpha(1-\delta)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon \le \lim_{\delta\to 0}\left(M_\Lambda(\delta)\ln\frac{\delta}{3\alpha(1-\delta)}\right) = \lim_{\delta\to 0}\ln\delta\, M_\Lambda(\delta) = M_\Lambda^1.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то это дает нам требуемое утверждение. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 1 получаем

Следствие. *Пусть последовательность* Λ *разбита на относительно малые группы* $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$. *Если* $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -\infty$, *то* $M_\Lambda = 0$.

Неравенство $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -\infty$ означает, что группы U_m в каком-то смысле отделены друг от друга. Этот смысл проясняется в следующем утверждении. Но, прежде, введем некоторые обозначения. Для каждого $m \ge 1$ символом $\beta_{m,l}, l = \overline{1, M_m}$, обозначим минимальное расстояние от точки $\lambda_{m,l}$ до точек $\lambda_{s,j}$, не входящих в группу U_m. Положим

$$\gamma_{m,l}(\tau) = \tau\min\{N_m, \beta_{m,l}\}, \tau \in (0,2^{-1}], l = \overline{1, M_m}, m \ge 1,$$

$$B_{m,\tau}(\Lambda, U) = \bigcup_{l=1}^{M_m} B\left(\lambda_{m,l}, \gamma_{m,l}(\tau)\right), B_\tau(\Lambda, U) = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{m,\tau}(\Lambda, U). \quad (4)$$

По построению множества $B_{m,\tau}(\Lambda, U)$ попарно не пересекаются. При этом точки группы U_m принадлежат $B_{m,\tau}(\Lambda, U), m \ge 1$.

Частным случаем леммы 2.3 из работы [2] является следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть последовательность* Λ *разбита на относительно малые группы* $U = \{U_m\}$, $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$, $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -\infty$, *и* $\tau \in (0,2^{-1}]$. *Тогда*

1) Диаметры d_m *множеств* $B_{m,\tau}(\Lambda, U)$ *удовлетворяют условию*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0;$$

2) Для каждого $\varepsilon > 0$ *существуют* $R > 0$ *и число* $\delta \in (0, 1/3)$ *такое, что*

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \ge (2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon)|z|, z \in \partial B_\tau(\Lambda, U) \cap B(w, \delta|w|), |w| \ge R.$$

В силу леммы 2.4 из работы [2] имеет место и обратное к лемме 2 утверждение в следующей форме.

Лемма 3. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *и последовательность открытых множеств* $B_m, m \ge 1$, *обладает следующими свойствами:*

1) $B_m, m \ge 1$, *попарно не пересекаются, их объединение* B *содержит все точки* λ_k, *и каждое множество* B_m *содержит хотя бы одну* λ_k;

2) Диаметры d_m *множеств* $B_m, m \ge 1$, *удовлетворяют условию*

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{z\in B_m}\frac{d_m}{|z|} = 0;$$

3) Для некоторого $a > 0$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $R > 0$ *и* $\delta \in (0, 1/3)$ *такие, что*

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \ge -(a + \varepsilon)|z|, z \in \partial B \cap B(w, \delta|w|), |w| \ge R.$$

Тогда разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ *последовательности* Λ, *где* U_m *состоит из всех точек* $\lambda_k \in B_m$, *является разбиением на относительно малые группы и* $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -a$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\alpha > \delta > 0$. Рассмотрим функцию

$$q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta) = \prod_{\lambda_s \in B(w,\alpha|w|)\setminus B(w,\delta|w|)}\left(\frac{z-\lambda_k}{3\alpha|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

Если кольцо $B(\lambda_k, \alpha|\lambda_k|)\setminus B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ не содержит точек λ_s, то полагаем $q_\Lambda^k \equiv 1$. Отметим, что в силу *(2)* функция $\ln|q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta)|$ не возрастает по $\alpha \in (0, 1/3)$ и не убывает по $\delta \in (0, \alpha)$. Кроме того, верно неравенство

$$|q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta)| \ge |q_\Lambda(z, w, \alpha)|, z \in B(w, \alpha|w|), \alpha \in (0, 1/3).$$

Определим индекс концентрации А. С. Кривошеева ([2]) последовательности Λ:

$$S_\Lambda^1 = \lim_{\alpha\to 0} S_\Lambda^1(\alpha), S_\Lambda^1(\alpha) = \lim_{\delta\to 0} S_\Lambda^1(\alpha, \delta), S_\Lambda^1(\alpha, \delta) = \lim_{|w|\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^1(w, w, \alpha, \delta)|}{|w|}.$$

Эти величины не положительны по тем же причинам, что и $\mathcal{S}_\Lambda$. Положим еще

$$M_\Lambda^2 = \int_0^1 \frac{M_\Lambda(\delta)}{\delta}\, d\delta.$$

Непосредственно из теоремы 3.1 в работе [2] вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Тогда*

1) $M_\Lambda^1 \geq S_\Lambda^1(\alpha), \alpha \in (0,1/3)$;

2) Если $M_\Lambda^2 < \infty$, *то* $S_\Lambda^1 = 0$.

Приведем условия на Λ, при которых существует разбиение U на относительно малые группы такое, что $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -\infty$. Но прежде докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Предположим, что* $S_\Lambda^1(\alpha_0) > -\infty$ *для некоторого* $\alpha_0 \in (0,1/3)$. *Тогда существуют последовательности открытых множеств* $B_m, m \geq 1$, *и чисел* $r_j, j \geq 1$, со *свойствами:*

1) $B_m, m \geq 1$, *попарно не пересекаются, их объединение содержит все точки* λ_k, *и каждое множество* B_m *содержит хотя бы одну точку* λ_k;

2) Диаметры d_m *множеств* $B_m, m \geq 1$, *удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sup_{z\in B_m} d_m/|z| = 0.$$

3) Верны соотношения

$$1 < r_{j+1}/r_j \to 1, j \to \infty.$$

4) Для каждых $\varepsilon > 0, \alpha \in (0,\alpha_0)$ *существует* $R > 0$ *такое, что*

$$\ln|q_\Lambda(z,w,\alpha/6)| \geq \left(S_\Lambda^1(\alpha) + 2M_\Lambda^1 - 2M_\Lambda(3\alpha)\ln 3 - \varepsilon\right)|z|,$$
$$z \in \left(\partial B_m \cup \partial B\left(0,r_j\right)\right) \cap B(w,\alpha|w|/6), m, j \geq 1, |w| \geq R.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Выберем $\varphi(\delta) \in (0,\pi/2)$ такое, что угол $\Gamma(-\varphi/2, \varphi/2]$ лежит в объединении кругов $B((1+\delta)^\mu, \delta(1+\delta)^\mu), \mu = 0,1,\ldots$, и $B(0,1)$. Пусть $l(\delta)$ обозначает максимальное из натуральных чисел l, для которых $l\varphi(\delta) < 2\pi$. Очевидно, числа $\varphi(\delta)$ можно выбрать так, что для некоторого $c_0 > 0$ будет верно неравенство

$$l(\delta) + 1 \leq c_0(\delta)^{-1}, \delta > 0. (5) \tag{5}$$

По лемме 4 $M_\Lambda^1 \geq S_\Lambda^1(\alpha_0) > -\infty$. Поэтому $M_\Lambda = 0$. В силу определения M_Λ^1 для любого $p \geq 1$ найдем $\delta_p \in (0, \alpha_0/8p)$ такое, что

$$\ln(2^{11}ec_0\alpha_0) \varlimsup_{|w|\to\infty} \frac{n_\Lambda(w,8\delta_p)}{|w|} \leq 1/p, \ln(8\delta_p) \varlimsup_{|w|\to\infty} \frac{n_\Lambda(w,8\delta_p)}{|w|} \geq M_\Lambda^1 - 1/p.$$

Так как $S_\Lambda^1(\alpha,\delta)$ не убывает по δ, то

$$S_\Lambda^1(\alpha_0/s, 3\delta_p) \geq S_\Lambda^1(\alpha_0/s), s = \overline{1,p}.$$

Согласно этим неравенствам выберем $R_p > p$ такое, что

$$\frac{ln|q_\Lambda^1(w,w,\alpha_0/s,3\delta_p)|}{|w|} \geq S_\Lambda^1(\alpha_0/s) - \frac{2}{p}, s = \overline{1,p}, |w| \geq R_p. \tag{6}$$

$$ln(2^{11}ec_0\alpha_0)\frac{n_\Lambda(w,8\delta_p)}{|w|} \leq \frac{2}{p}, |w| \geq R_p. \tag{7}$$

$$ln(8\delta_p)\frac{n_\Lambda(w,8\delta_p)}{|w|} \geq \left(M_\Lambda^1 - \frac{2}{p}\right), |w| \geq R_p. (8)й \tag{8}$$

Можно считать, что при этом выполнены также соотношения

$$\delta_{p+1} \leq \delta_p, 50R_p \leq R_{p+1}, R_{p+1} = \left(1+\delta_p\right)^{\mu_p} R_p, p \geq 1. \tag{9}$$

где μ_p – некоторое натуральное число. Положим $\varphi_p = \varphi(\delta_p), l_p = l(\delta_p)$ и

$$z_{p,\mu,l} = R_p\left(1+\delta_p\right)^\mu e^{il\varphi_p}, l = \overline{0,l_p}, \mu = \overline{1,\mu_p}, p \geq 1.$$

Тогда в силу равенства из *(9)* объединение кругов $B(0,R_1)$ и $B\left(z_{p,\mu,l}, \delta_p|z_{p,\mu,l}|\right)$ покрывает плоскость. Для каждых p, l, μ и $b = 12 - 2M_\Lambda^1$ рассмотрим множество

$$B_0^{p,\mu,l} = \left\{z \in \mathbb{C}: \sum_{\lambda_k \in B\left(z_{p,\mu,l}, 3\delta_p|z_{p,l,\mu}|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} < (2M_\Lambda^1 - \frac{b}{p})|z_{p,\mu,l}|\right\}.$$

Пусть $B^{p,\mu,l}$ – объединение всех его связных компонент, каждая из которых имеет непустое пересечение с кругом $B\left(z_{p,\mu,l}, \delta_p|z_{p,\mu,l}|\right)$ и содержит хотя бы одну точку λ_k. Положим

$$B = \bigcup_{l=0,\mu=1,p=1}^{l_p,\mu_p,\infty} B^{p,\mu,l} \cup B(0,R_1).$$

Если $B(0,R_1)$ не содержит точек λ_k, то исключим его из объединения. Обозначим через $B_m, m \geq 1$, все связные компоненты B. Покажем, что $B_m -$ искомая последовательность множеств. По построению они попарно не пересекаются, и каждое из них содержит хотя бы одну λ_k. Кроме того, любая точка λ_k, не лежащая в $B(0,R_1)$, принадлежит некоторому кругу $B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$. Тогда она принадлежит $B^{p,\mu,l}$, а вместе с ним и какому-то из множеств B_m. Таким образом, пункт 1) выполнен. Докажем 2). Фиксируем p,μ,l. Для каждого $\lambda_k \in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$ имеем: $|\lambda_k| < \left(1+8\delta_p\right)\left|z_{p,l,\mu}\right| < 4\left|z_{p,l,\mu}\right|/3$. Следовательно,

$$\sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \geq \sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{4\alpha_0\left|z_{p,\mu,l}\right|}.$$

Тогда по теореме Картана об оценке снизу многочлена ([6], гл. I, §4, теорема 4.1) для каждого $H > 0$ верно неравенство

$$\sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \geq n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\right)\ln\frac{H}{4e\alpha_0\left|z_{p,\mu,l}\right|}. \ (10) \qquad (10)$$

Оно выполнено вне исключительных кругов $B_{p,\mu,l,s}, s=\overline{1,s(p,\mu,l)}$, сумма радиусов которых равна $2H$. Пусть $H=\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|/\left(8\left(l_p+1\right)\right)$. Тогда сумма диаметров всех кругов $B_{p,\mu,l,s}, s=\overline{1,s(p,\mu,l)}, l=\overline{0,l_p}$, равна $\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|/2$. Поэтому найдутся $\tau_{p,\mu}\in(1{,}2), \gamma_{p,\mu}\in(0{,}1)$ такие, что окружности $\partial B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$ и $\partial B\left(0,\left(1+\delta_p\gamma_{p,\mu}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$ не пересекают все эти круги. Поэтому в силу *(10)* и *(5)* имеем:

$$\sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \geq n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\right)\ln\frac{\left(\delta_p\right)^2}{32ec_0\alpha_0},$$
$$z\in\partial B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)\cup\partial B\left(0,\left(1+\delta_p\gamma_{p,\mu}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|\right).$$

В силу *(8)* и *(7)*

$$n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\right)\ln\frac{\left(\delta_p\right)^2}{32ec_0\alpha_0} \geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{2}{p}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right| - n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\right)\ln\left(2^{11}ec_0\alpha_0\right) \geq$$
$$\geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{3}{p}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|.$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{3}{p}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|,$$
$$z\in\partial B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)\cup\partial B\left(0,\left(1+\delta_p\gamma_{p,\mu}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|\right). \qquad (11)$$

В силу выбора числа δ_p каждое слагаемое в *(11)* неположительно. Поэтому

$$\sum_{\lambda_k\in B\left(z_{p,\mu,l},3\delta_p\left|z_{p,l,\mu}\right|\right)} n_k \ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{3}{p}\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|, z\in\partial B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right).$$

Отсюда с учетом определения множеств $B^{p,\mu,l}$ следует вложение

$$B^{p,\mu,l}\subset B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right). \qquad (12)$$

Пусть B_m содержит точки, не лежащие в круге $B(0,R_3)$, и $w_0 -$ одна из них. Выберем максимальное число $p \geq 3$, для которого $R_p \leq |w_0|$, и какой-нибудь круг $B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$, который содержит w_0. Покажем, что $B_m\subset B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$. Предположим, что это не так. Тогда B_m пересекает границу круга $B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)$. Пусть $z\in\partial B\left(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}\left|z_{p,\mu,l}\right|\right)\cap B_m$. По построению точка $z\in B^{j,\nu,n}$ для некоторых j,ν,n (поскольку $z\notin B(0,R_1)$ в силу второго соотношения в *(9)*). Предположим, что $j\geq p$. Тогда согласно *(9)* верно неравенство $\delta_j\leq\delta_p$. В силу *(12)* $z\in B\left(z_{j,\nu,n},\delta_j\tau_{j,\nu}\left|z_{j,\nu,n}\right|\right)$. Следовательно,

$$\left(1-2\delta_j\right)\left|z_{j,\nu,n}\right| < |z| < \left(1+2\delta_p\right)\left|z_{p,\mu,l}\right|,$$
$$\left(1-2\delta_p\right)\left|z_{p,\mu,l}\right| < |z| < \left(1+2\delta_j\right)\left|z_{j,\nu,n}\right|. \qquad (13)$$

Отсюда с учетом выбора чисел δ_p для каждого $w\in B\left(z_{j,\nu,n},3\delta_j\left|z_{j,\nu,n}\right|\right)$ получаем:

$$\left|w-z_{p,\mu,l}\right| \leq \left|w-z_{j,\nu,n}\right| + \left|z_{j,\nu,n}-z\right| + \left|z-z_{p,\mu,l}\right| < 3\delta_j\left|z_{j,\nu,n}\right| + 2\delta_j\left|z_{j,\nu,n}\right| +$$
$$2\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right| < \delta_p\left(5\frac{1+2\delta_p}{1-2\delta_j}+2\right)\left|z_{p,\mu,l}\right| < 8\delta_p\left|z_{p,\mu,l}\right|.$$

Это означает, что $B(z_{j,\nu,n},3\delta_j|z_{j,\nu,n}|)\subset B(z_{p,\mu,l},8\delta_p|z_{p,\mu,l}|)$. Тогда, учитывая неположительность слагаемых в *(11)* и *(13)*, получаем:

$$\sum_{\lambda_k\in B(z_{j,\nu,n},3\delta_j|z_{j,\nu,n}|)} n_k\ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|}\geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{3}{p}\right)|z_{p,\mu,l}|\geq$$
$$\geq 2\left(M_\Lambda^1-\frac{3}{p}\right)\frac{1+2\delta_j}{1-2\delta_p}|z_{j,\nu,n}|.$$

Поскольку $8\delta_p<1/p$, то

$$\frac{1+2\delta_j}{1-2\delta_p}\leq\frac{1+2\delta_p}{1-2\delta_p}=1+4\frac{\delta_p}{1-2\delta_p}\leq 1+\frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\lambda_k\in B(z_{j,\nu,n},3\delta_j|z_{j,\nu,n}|)} n_k\ln\frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|}\geq\left(2M_\Lambda^1-\frac{b}{p}\right)|z_{j,\nu,n}|.$$

Это противоречит включению $z\in B^{j,\nu,n}$.

Предположим теперь, что $j<p$. Из *(13)* и *(9)* следует, что $j=p-1$. Компонента B_m либо лежит в круге $B(z_{j,\nu,n},\delta_j\tau_{j,\nu}|z_{j,\nu,n}|)$ либо имеет общую точку x с его границей. Пусть $x\in B^{i,\tau,s}$ (множество $B^{i,\tau,s}$ существует, т.к. $x\notin B(0,R_1)$). Тогда в силу *(12)* и *(9)* с учетом неравенств $\delta_k<\alpha_0<1/3\,,k\geq 1$, имеем:

$$|z_{i,\tau,s}|\geq|x|(1+2\delta_i)^{-1}\geq|z_{j,\nu,n}|\frac{3}{5}(1-2\delta_j)\geq\frac{1}{5}|z|(1+2\delta_j)^{-1}\geq$$
$$\geq\frac{3}{25}|z_{p,\mu,l}|(1-2\delta_p)\geq\frac{1}{25}R_p\geq 2R_{p-1}.$$

Отсюда следует, что $i\geq p-1=j$. Мы оказываемся в ситуации, которую уже рассмотрели. Она приводит к противоречию. Таким образом, каждая из указанных выше компонент B_m лежит в одном из кругов $B(z_{p,\mu,l},\delta_p\tau_{p,\mu}|z_{p,\mu,l}|)$. Это дает нам пункт 2) леммы.

Докажем пункт 3). Пусть $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ — перенумерованная последовательность чисел

$$\{(1+\delta_p\gamma_{p,\mu})R_p(1+\delta_p)^{\mu}\}_{\mu=1.p=1}^{\mu_p,\infty}.$$

Так как $\delta_p\to 0$ и $\gamma_{p,\mu}\in(0,1)$, то свойство 3) выполнено по построению.

Докажем, наконец, 4). Пусть $\varepsilon>0$, $\alpha\in(0,\alpha_0)$ и p_0 — минимальный номер, для которого $\alpha_0/p_0\leq\alpha$. Выберем номер $p_1>p_0$ такой, что

$$\frac{b}{p}<\frac{\varepsilon}{4},\frac{2\delta_p(S_\Lambda^1(\alpha)+2M_\Lambda^1-2M_\Lambda(3\alpha)ln3-3\varepsilon/4)}{1-2\delta_p}>-\frac{\varepsilon}{4},p\geq p_1. \qquad (14)$$

В силу определения M_Λ можно считать, что

$$n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l},\frac{\alpha_0}{p_0}\right)ln3\leq\left(2M_\Lambda(3\alpha)ln3+\frac{\varepsilon}{4}\right)|z_{p,\mu,l}|,p\geq p_1. \qquad (15)$$

Пусть $R=R(\varepsilon,\alpha)=(1-\alpha)^{-1}R_{p_1+1}$, $|w|\geq R$ и $z\in\partial B_m\cap B(w,\alpha|w|/6)$. В силу определения компонент B_m и *(12)* имеем: $z\in\partial B^{p,\mu,l}\subset B(z_{p,\mu,l},2\delta_p|z_{p,\mu,l}|)$ для некоторых p,μ,l. Нетрудно заметить, что $|z_{p,\mu,l}|\geq R_{p_1}$. Поэтому $p\geq p_1$. Пусть $x\in B(w,\alpha|w|/6)$. Тогда

$$|x-z_{p,\mu,l}|\leq|x-w|+|w-z|+|z-z_{p,\mu,l}|<\frac{\alpha|w|}{3}+2\delta_p|z_{p,\mu,l}|.$$
$$|w|\leq|z|\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)^{-1}\leq|z_{p,\mu,l}|\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)^{-1}(1+2\delta_p).$$

Следовательно, в силу выбора номера p_0 и числа δ_p имеем:

$$|x-z_{p,\mu,l}|\leq|z_{p,\mu,l}|\left(\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{\alpha}{6}\right)^{-1}(1+2\delta_p)+2\delta_p\right)\leq$$
$$\leq|z_{p,\mu,l}|\left(\frac{\alpha}{3}\frac{18}{17}\frac{25}{24}+\frac{\alpha_0}{4p}\right)\leq|z_{p,\mu,l}|\left(\frac{25\alpha}{68}+\frac{\alpha_0}{4p_0}\right)\leq|z_{p,\mu,l}|\left(\frac{25\alpha_0}{34p_0}+\frac{\alpha_0}{4p_0}\right)<\frac{\alpha_0}{p_0}|z_{p,\mu,l}|.$$

Таким образом, имеет место вложение

$$B\left(w,\frac{\alpha|w|}{6}\right)\subset B\left(z_{p,\mu,l},\frac{\alpha_0|z_{p,\mu,l}|}{p_0}\right).$$

Поскольку $\alpha/6 \le \alpha_0/p_0$, то в силу (1.3.1) получаем:

$$|q_\Lambda(z, w, \alpha/6)| \ge |q_\Lambda(z, z_{p,\mu,l}, \alpha_0/p_0)|. \qquad (16)$$

Найдем оценку снизу для $|q_\Lambda(z, z_{p,\mu,l}, \alpha_0/p_0)|$. Согласно определению множества $B^{p,\mu,l}$ с учетом первого неравенства из *(14)* имеем:

$$\sum_{\lambda_k \in B(z_{p,\mu,l}, 3\delta_p|z_{p,l,\mu}|)} n_k ln \frac{p_0|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \ge \sum_{\lambda_k \in B(z_{p,\mu,l}, 3\delta_p|z_{p,l,\mu}|)} n_k ln \frac{|z-\lambda_k|}{3\alpha_0|\lambda_k|} \ge$$
$$\ge \left(2M_\Lambda^1 - \frac{b}{p}\right)|z_{p,\mu,l}| \ge \left(2M_\Lambda^1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)|z_{p,\mu,l}|. \qquad (17)$$

Кроме того, из этого же неравенства и (6) получаем:

$$ln\left|q_\Lambda^1\left(z_{p,\mu,l}, z_{p,\mu,l}, \frac{\alpha_0}{p_0}, 3\delta_p\right)\right| \ge \left(S_\Lambda^1\left(\frac{\alpha_0}{p_0}\right) - \frac{\varepsilon}{4}\right)|z_{p,\mu,l}|. \qquad (18)$$

Пусть $|z_{p,\mu,l} - \lambda_k| \ge 3\delta_p|z_{p,\mu,l}|$. Тогда

$$|z-\lambda_k| \ge |z_{p,\mu,l} - \lambda_k| - |z - z_{p,\mu,l}| \ge |z_{p,\mu,l} - \lambda_k| - 2\delta_p|z_{p,\mu,l}| \ge 3^{-1}|z_{p,\mu,l} - \lambda_k|.$$

Отсюда с учетом определения функции q_Λ^1 и *(18)*, *(15)* имеем:

$$\ln\left|q_\Lambda^1\left(z, z_{p,\mu,l}, \frac{\alpha_0}{p_0}, 3\delta_p\right)\right| \ge \ln\left|q_\Lambda^1\left(z_{p,\mu,l}, z_{p,\mu,l}, \frac{\alpha_0}{p_0}, 3\delta_p\right)\right| - n_\Lambda\left(z_{p,\mu,l}, \frac{\alpha_0}{p_0}\right)\ln 3 \ge$$
$$\ge \left(S_\Lambda^1\left(\frac{\alpha_0}{p_0}\right) - 2M_\Lambda(3\alpha)\ln 3 - \frac{\varepsilon}{2}\right)|z_{p,\mu,l}|.$$

Поскольку функция $S_\Lambda^1(\beta)$ не возрастает, то

$$ln\left|q_\Lambda^1\left(z, z_{p,\mu,l}, \frac{\alpha_0}{p_0}, 3\delta_p\right)\right| \ge \left(S_\Lambda^1(\alpha) - 2M_\Lambda(3\alpha)ln3 - \frac{\varepsilon}{2}\right)|z_{p,\mu,l}|. \qquad (19)$$

Таким образом, согласно определению функций q_Λ и q_Λ^1 с учетом *(16)*, *(17)* и *(14)* получаем:

$$ln\left|q_\Lambda\left(z, w, \frac{\alpha}{6}\right)\right| \ge \left(S_\Lambda^1(\alpha) + 2M_\Lambda^1 - 2M_\Lambda(3\alpha)ln3 - \frac{3\varepsilon}{4}\right)|z_{p,\mu,l}| \ge$$
$$\ge \left(S_\Lambda^1(\alpha) + 2M_\Lambda^1 - 2M_\Lambda(3\alpha)ln3 - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\left(1 - 2\delta_p\right)^{-1}|z| \ge$$
$$\ge (S_\Lambda^1(\alpha) + 2M_\Lambda^1 - 2M_\Lambda(3\alpha)ln3 - \varepsilon)|z|. \qquad (20)$$

Пусть теперь $z \in \partial B\left(0, \left(1 + \delta_p\gamma_{p,\mu}\right)|z_{p,\mu,l}|\right) \cap B(w, \alpha|w|/6)$, где $|w| \ge R(\varepsilon, \alpha)$. Тогда $p \ge p_1$. По построению найдется $l = \overline{0, l_p}$ такое, что $z \in B\left(z_{p,\mu,l}, \delta_p|z_{p,\mu,l}|\right)$. Как и выше, имеет место вложение $B(w, \alpha|w|/6) \subset B\left(z_{p,\mu,l}, \alpha_0|z_{p,\mu,l}|/p_0\right)$. Из *(11)* и *(14)* следует *(17)*. Используя теперь *(16)*, *(17)*, *(19)* и *(14)* получаем *(20)*. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Верны следующие утверждения*

1) Если $U = \{U_m\}$ *− разбиение* Λ *на относительно малые группы, то* $S_\Lambda^1 \ge 2\mathcal{S}_\Lambda(U)$.

2) Если $S_\Lambda^1 > -\infty$, *то существует разбиение* U *на относительно малые группы такое, что* $\mathcal{S}_\Lambda(U) \ge 3S_\Lambda^1$.

Доказательство. 1) Если $\mathcal{S}_\Lambda(U) = -\infty$, то утверждение тривиально. Пусть $\mathcal{S}_\Lambda(U) > -\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 2 верно неравенство

$$ln|q_\Lambda(z, w, \delta(\varepsilon))| \ge (2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon)|z|, z \in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|), m \ge 1, \qquad (21)$$

где $\delta(\varepsilon) \in (0, 1/3), |w| \ge R(\varepsilon)$ и $B_m \supset U_m$ − попарно не пересекающиеся открытые множества с относительно малыми диаметрами d_m: $\lim_{m\to\infty} d_m/|\lambda_{m,1}| = 0$. Пусть $\alpha \in (0, \delta(\varepsilon)/5), \delta \in (0, \alpha)$. Тогда найдется номер m_0 такой, что

$$sup_{w \in B_m} d_m/|w| < \delta, m \ge m_0. \qquad (22)$$

Выберем число $R_1 \ge R(\varepsilon)$, для которого любой круг $B(w, \alpha|w|), |w| \ge R_1$, может пересекать множества B_m лишь с номерами $m \ge m_0$. Пусть $|w| \ge R_1$. Из определения q_Λ и *(21)*, *(2)* следует неравенство:

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \alpha)| \ge (2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon)|z|, z \in \partial B_m \cap B(w, 5\alpha|w|), m \ge m_0.$$

Кроме того из определения q_Λ вытекает также неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \alpha)| \ge 0, z \in \partial B(w, 5\alpha|w|).$$

Таким образом, с учетом *(2)* и определения функции q_Λ^1 получаем:

$$\ln|q_\Lambda^1(z, w, \alpha, \delta)| \ge \ln|q_\Lambda(z, w, \alpha)| \ge (2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon)|w|(1 + 5\alpha), \qquad (23)$$
$$z \in \left(\partial B_m \cap B(w, 5\alpha|w|)\right) \cup \partial B(w, 5\alpha|w|), m \ge m_0.$$

Поскольку $B_m \supset U_m$, то функция $q^1_\Lambda(z, w, \alpha, \delta)$ не имеет нулей на множестве $B(w, 5\alpha|w|)\backslash(\cup B_m)$. Тогда по принципу минимума для гармонических функций неравенство *(23)* продолжается на это множество. Если w принадлежит ему, то

$$\ln\left|q^1_\Lambda(w, w, \alpha, \delta)\right| \geq (2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon)|w|(1 + 5\alpha). \qquad (24)$$

Пусть теперь $w \in B_m$. В силу *(22)* верно вложение $B_m \subset B(w, \delta|w|)$. Поэтому согласно определению функции $q^1_\Lambda(z, w, \alpha, \delta)$ она не имеет нулей на множестве B_m. Поэтому в силу *(23)* мы вновь получаем неравенство *(24)*. Из него следует, что $S^1_\Lambda \geq 2\mathcal{S}_\Lambda(U) - \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $S^1_\Lambda \geq 2\mathcal{S}_\Lambda(U)$.

2) Пусть $S^1_\Lambda > -\infty$. Тогда $S^1_\Lambda(\alpha_0) > -\infty$ для некоторого числа $\alpha_0 \in (0, 1/3)$. По лемме 4 $M^1_\Lambda \geq S^1_\Lambda(\alpha), \alpha \in (0, 1/3)$. Тогда по лемме 5 существует последовательность открытых множеств B_m, которая обладает свойствами 1), 2) из этой леммы и для каждых $\varepsilon > 0, \alpha \in (0, \alpha_0)$ выполнено неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \alpha/6)| \geq \left(3S^1_\Lambda(\alpha) - 2M_\Lambda(3\alpha)\ln 3 - \varepsilon\right)|z|,$$
$$z \in \partial B \cap B(w, \alpha|w|/6), |w| \geq R(\varepsilon, \alpha),$$

где $B = \bigcup_{m\geq 1} B_m$. Так как $M^1_\Lambda > -\infty$, то $M_\Lambda = 0$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)| \geq \left(3S^1_\Lambda - \varepsilon\right)|z|, z \in \partial B \cap B(w, \delta), |w| \geq R.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы 3. Тогда согласно ей разбиение $U = \{U_m\}$, где U_m состоит из всех точек $\lambda_k \in B_m$, является разбиением на относительно малые группы и $\mathcal{S}_\Lambda(U) \geq 3S^1_\Lambda$. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 6 получаем

Следствие 1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Эквивалентны следующие утверждения*

1) существует разбиение U на относительно малые группы такое, что $\mathcal{S}_\Lambda(U) = 0$.

2) $S^1_\Lambda = 0$.

Введем еще одну величину

$$M^0_\Lambda = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{M_\Lambda(\delta)}{\delta}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий: 1.* $M^2_\Lambda < \infty$; *2.* $M^0_\Lambda < \infty$. *Тогда* $S^1_\Lambda = 0$ *и существует разбиение U на относительно малые группы такое, что* $\mathcal{S}_\Lambda(U) = 0$.

Доказательство. Если $M^0_\Lambda < \infty$, то $M^2_\Lambda < \infty$. Из последнего неравенства и леммы 4 следует, что $S^1_\Lambda = 0$. Тогда по теореме 6 существует разбиение U на относительно малые группы такое, что $\mathcal{S}_\Lambda(U) = 0$. Следствие доказано.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций. Матем. сб. 2013. Т. 204, №12. С. 49–104.
2. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Базис в инвариантном подпространстве целых функций. Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, №2. С. 132–195.
3. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №2. С. 71–136.
4. Кривошеева О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости. Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, №2. С. 162–205.
5. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Абдулнагимов А. И. Целые функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле. Монография. Уфа, РИЦ БашГУ, 2015. 196 с.
6. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 176 с.

Поступила в редакцию 30.09.2018 г.

A CONSTRUCTION OF A COMPLEX SEQUENCE BY RELATIVELY SMALL GROUPS

© O. A. Krivosheeva

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (347) 229 96 65.
Email: kriolesya2006@yandex.ru

Multiple sequences of complex numbers are considered in this paper. The author studied the construction of such sequences by relatively small groups. These are groups whose diameter ratio to the point modules of these groups tends to zero. In addition, the ratio of the number of points in the group to the modules of these points tends to zero. The possibility of construction by relatively small groups plays an important role in the representation of elements of invariant under differentiation operator subspace of analytical functions in convex domain of complex plane using a series of exponential polynomials. The necessary and sufficient conditions were found under which the multiple sequence of complex numbers can be constructed by relatively small groups in such a way that the A. S. Krivosheev's group index of the condensation of sequence for a given construction is zero or finite. For an arbitrary multiple sequence of complex numbers, a criterion for its construction by relatively small groups with zero or finite condensation index was obtained. This criterion is formulated with the help of the A. S. Krivosheev's index of the concentration of the complex sequence. It must be zero or finite respectively. Moreover, the author gave simple sufficient conditions for a multiple sequence of complex numbers under which there is a construction by relatively small groups with zero condensation index. These conditions use the local numerical characteristics of the sequence associated with the number of points of this sequence, taking into account their multiplicities in circles with centers at these points and relatively small radii.

Keywords: series of exponential monomials, relatively small group, condensation index, convex domain.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Bazis v invariantnom podprostranstve analiticheskikh funktsii. Matem. sb. 2013. Vol. 204, No. 12. Pp. 49–104.
2. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Bazis v invariantnom podprostranstve tselykh funktsii. Algebra i analiz. 2015. Vol. 27, No. 2. Pp. 132–195.
3. Krivosheev A. S. Fundamental'nyi printsip dlya invariantnykh podprostranstv v vypuklykh oblastyakh. Izv. RAN. Ser. matem. 2004. Vol. 68. No. 2. Pp. 71–136.
4. Krivosheeva O. A. Osobye tochki summy ryada eksponentsial'nykh monomov na granitse oblasti skhodimosti. Algebra i analiz. 2011. Vol. 23, No. 2. Pp. 162–205.
5. Krivosheeva O. A., Krivosheev A. S., Abdulnagimov A. I. Tselye funktsii eksponentsial'nogo tipa. Ryady Dirikhle. Monografiya [Entire functions of exponential type. Dirichlet series. Monograph]. Ufa, RITs BashGU, 2015.
6. Leont'ev A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent [Entire functions. Exponent series]. Moscow: Nauka, 1983.

Received 30.09.2018.