УДК: 517.95:515.172.22

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

© В. Н. Орлов*, Б. Б. Ив

Национальный исследовательский московский государственный строительный университет
Россия, 129337 г. Москва, Ярославское шоссе, 26.

Тел.: +7 (495) 781 99 88.
**Email: orlovVN@mgsu.ru*

Особеностью нелинейных дифференциальных уравнений являются подвижные особые точки, наличие которых относит эти уравнения к классу в общем случае не разрешимых в квадратурах. Более того для этой котегории дифференциальных уравнений классическая теория (теорема существования решения и методы решения) не эффективны. Следует отметить, что нелинейное дифференциальное уравнение с подвижными особыми точками имеет широкое предложение в разных областях техники науки. Эти обстоятельства актуализирует формулировку и докозательство новых теорем существования решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками как в области аналитичности, так и окресности подвижных особых точек. А также развитие на основе этих теорем аналитического приближенного метода решения этой котегории уравнений. В работе представлен вариант доказательства теоремы существования решения рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второго степени в окрестности подвижной особой точки. Построено аналитическое приближенное решение для рассматриваемого класса уравнений в окрестности особой точки, получена априорная оценка погрешности.

***Ключевые слова**: задача Коши, нелинейное дифференциальное уравнение, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение, априорная оценка погрешности, подвижная особая точка.*

Введение

Отметим публикации, подтверждающие приложения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками в теории оптимального уравнения [1–3], теории эволюционных процессов [4–6], нелинейной оптике для описания сверхизлучательной лавины [7–9], теории упругости [10], нелинейной диффузии [11], оптимизации стержня реактора [12], нелинейной теплопроводности установившегося режима [13], нелинейной волновой теории [14].

В данной работе представляем развитие метода мажорант, не к правой части дифференциального уравнения, как это дается в классической литературе [15–16], а к решению самого дифференциального уравнения, предложенного в работах[17–18].

Такой подход позволяет воспользоваться теоремой существования для построения аналитического приближеного решения нелинейного диффереациального уравнения в окрестности подвижой особой точки.

Результаты исследования и их обсуждение.

Нелинейное дифференциальное уравнение

$$y^{IV} = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x) \text{ ,}$$

когорое с помощью замены переменной

$$y = u(x)q(x) + v(x)$$

приводится к нормальному виду:

$$y^{IV} = y^2 + r(x),$$

при условиях

$$\begin{cases} q(x) = C = const \neq 0 \\ v(x) = -\dfrac{C}{2}a_1(x) \\ a_0(x) = \dfrac{1}{C} \\ r(x) = -\dfrac{q_1^2(x)}{4} + \dfrac{C}{2}a_1^{IV}(x) + \dfrac{a_2(x)}{C} \text{ .} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y^{IV} = y^2 + r(x) \,, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y^{'}(x_0) = y_1, \\ y^{''}(x_0) = y_2, \\ y^{'''}(x_0) = y_3. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть x^* – подвижная особая точка решения задачи Коши *(1)–(2);*

2. $r(x) \in C^{\infty}$

в области $\left|x - x^*\right| < \rho_1$ где $0 < \rho_1 = const$;

3. $\exists M_n : \dfrac{\left|r^n(x^*)\right|}{n!} \le M_n$, где $n = 0,1,2,3,...,$ $M_n = const,$ тогда существует единстенное решение задачи Коши *(5)–(6),* представимое в виде

$$y(x) = (x - x^*)^{-4} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n \,,$$

в области $\left|x - x^*\right| < \rho_2$, где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{\sqrt[8]{M+1}}\right\}$, $M = \max\left\{\left|y_0\right|, \left|y_1\right|, \left|y_2\right|, \left|y_3\right|, \sup\limits_n \left|\dfrac{r^n(x^*)}{n!}\right|\right\}$.

Доказательство. Учитывая структуру решения уравнения (1) в окрестного подвижной особой точки в общем случае

$$y(x) = (x - x^*)^{\rho} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n \;\; C_0 \ne 0 \tag{3}$$

и представляя функцию $r(x)$ в виде ряда

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n \,,$$

на основании условия теоремы, из уравнения (1) получаем

$$\sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^{n+\rho-4} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2)(n+\rho-3) =$$

$$= (x - x^*)^{2\rho} \sum_0^{\infty} C_n^{**} (x - x^*)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n \,,$$

где $C_n^{**} = \sum\limits_0^n C_i C_{n-i}^*$, $C_n^* = \sum\limits_0^n C_i C_{n-i}$, $n = 0,1,2,3,...,$

Из последного соотношения следует необходимость выполния следующих условий:

1. $n + \rho - 4 = n + 2\rho$;
2. $C_n (n-4)(n-5)(n-6)(n-7) = C_n^* + A_{n-8}$. (4)

Первое условие позволяет определить $\rho = -4$, установить характер подвижной особой точки, а второе представляет рекурретное соотношения, позвдляющее однозначно определить все коэффициенты C_n :

$$C_0 = 840, C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 0 \,,$$

$$C_8 = -\frac{A_0}{1656}, C_9 = -\frac{A_1}{1560}, C_{10} = -\frac{A_2}{1320}, C_{11} = -\frac{A_3}{840} \,,$$

$$C_{12} = \alpha = const,$$

$$C_{13} = \frac{A_5}{1344}, C_{14} = \frac{A_6}{3360}, C_{15} = \frac{A_7}{4140}, ...$$

В силу однозначности определения коэффициентов C_n следует единственность полученного формального решения.

На основе програмного обеспечения персонального компьютера Maple получены аналитические выражения коэффекциентов на основе когорых построены гипотезы оценок для коэффекциента C_n :

$$\left|C_{8n+i}\right| \le \frac{M(M+1)^{n-1}}{(8n-4+i)(8n-5+i)(8n-6+i)(8n-7+i)-1680} = V_{8n+i},$$

где $i = 0,1,2,...7$, $M = \max\left\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,|y_3|,\sup\limits_n\left|\frac{r^n(x^*)}{n!}\right|\right\}$ $n = 0,1,2,3,...,$

Методом математический индукции докажем справедливость построенных гипотез.

Ограничимся случаем оценки для коэффициента C_{8n+8} :

$$\left|C_{8n+8}\right| \le \frac{M(M+1)^{n-1}}{(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1)-1680}.$$

Из рекуррентного соотношения (4), следует

$$C_{8n+8}(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1) = C^*_{8n+8} + A_{8n}$$

$$C_{8n+8}(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} C_{8i}C_{8(n+1-i)} + A_{8n}$$

$$C_{8n+8}(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1) = 2C_0C_{8n+8} + \sum_{i=1}^{n} C_{8i}C_{8(n+1-i)} + A_{8n}$$

Тогда, с учетом оценок для коэффициентов C_n

$$\left|C_{8n+8}\right| \le \frac{1}{(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1)-1680}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_1^n \frac{M(M+1)^{i-1}}{(8i+4)(8i+3)(8i+2)(8i+1)}\cdot\frac{M(M+1)^{n-i-1}}{(8n-8i+4)(8n-8i+3)(8n-8i+2)(8n-8i+1)} + M\right] \le$$

$$\le \frac{M(M+1)^n}{(8n+4)(8n+3)(8n+2)(8n+1)-1680}.$$

Аналогичным образом подтверждаются остальные гипотезы оценок коэффециентов C_n.

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty V_n(x-x^*)^n &= \sum_{k=1}^\infty V_{8k}(x-x^*)^{8k} + \sum_{k=1}^\infty V_{8k+1}(x-x^*)^{8k+1} + \\ &+\sum_{k=1}^\infty V_{8k+2}(x-x^*)^{8k+2} + \sum_{k=1}^\infty V_{8k+3}(x-x^*)^{8k+3} + \sum_{k=1}^\infty V_{8k+4}(x-x^*)^{8k+4} \\ &+\sum_{k=1}^\infty V_{8k+5}(x-x^*)^{8k+5} + \sum_{k=1}^\infty V_{8k+6}(x-x^*)^{8k+6} + \sum_{k=1}^\infty V_{8k+7}(x-x^*)^{8k+7},\end{aligned} \tag{5}$$

который является межорирующим для правильной части ряда (3).

Для первого ряда, находящегося в правой части последного равенства, с учетом выражения коэффекциетов C_{8n} на основании признака Даламбера имеем область сходимости

$$\left|x-x^*\right| \le \frac{1}{\sqrt[8]{M+1}}. \tag{6}$$

Аналогичную область получаем и для остальных рядов.

Таким образом, рад *(5)* сходится в области $\left|x-x^*\right| \le \dfrac{1}{\sqrt[8]{M+1}}$.

Полагая $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{\sqrt[8]{M+1}}\right\}$, получаем сходимость правильной части ряда (1) в области $\left|x-x^*\right| < \rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = (x-x^*)^{-4}\sum_{0}^{N} C_n (x-x^*)^n, \tag{7}$$

получить его априоную оценку.

Теорема 2. Пусть x^* является подвижной особой точкой решения задачи *(1)–(2)* и выполняются пункты 2 и 3 *теоремы* 1, тогда для аналитического приближенного решения *(7)* в окрестности подвижной особой точки x^* задача *(1)–(2)* в области

$$\left|x-x^*\right| < \rho_2,$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = \left|y(x) - y_N(x)\right| \le \Delta,$$

где

$$\begin{aligned}\Delta \le \frac{M(M+1)^N\cdot\left|x-x^*\right|^{8N+4+i}}{1-\left|x-x^*\right|^8}\cdot\Bigg(&\frac{1}{(8N+4+i)(8N+3+i)(8N+2+i)(8N+1+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|}{(8N+5+i)(8N+4+i)(8N+3+i)(8N+2+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^2}{(8N+6+i)(8N+5+i)(8N+4+i)(8N+3+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^3}{(8N+7+i)(8N+6+i)(8N+5+i)(8N+4+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^4}{(8N+8+i)(8N+7+i)(8N+6+i)(8N+5+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^5}{(8N+9+i)(8N+8+i)(8N+7+i)(8N+6+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^6}{(8N+10+i)(8N+9+i)(8N+8+i)(8N+7+i)-1680}+\\
&+\frac{\left|x-x^*\right|^7}{(8N+11+i)(8N+10+i)(8N+9+i)(8N+8+i)-1680}\Bigg),\end{aligned} \tag{8}$$

$i = 0,1,2,\ldots 7$ для $N+1$ равное соответствено: $8n, 8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6, 8n+7,$

при этом $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \dfrac{1}{\sqrt[8]{M+1}}\right\}$, $\quad 0 < \rho_1 = const,$ $M = \max\left\{\left|y_0\right|, \left|y_1\right|, \left|y_2\right|, \left|y_3\right|, \sup\limits_n \left|\dfrac{r^n(x^*)}{n!}\right|\right\},$

$n = 0,1,2,3,\ldots,$

Доказательства. Докажем теорему для случая $N+1=8n$. Имеем

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|=\left|\sum_0^{\infty}C_n(x-x_0)^{n-4}-\sum_0^{N}C_n(x-x_0)^{n-4}\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}C_n(x-x^*)^{n-4}\right|.$$

Или, с учетом оценок для C_n:

$$\Delta y_N(x)\le\frac{M(M+1)^N\cdot|x-x^*|^{8N+4}}{1-|x-x^*|^8}\left(\frac{1}{(8N+4)(8N+3)(8N+2)(8N+1)-1680}+\right.$$

$$+\frac{|x-x^*|}{(8N+5)(8N+4)(8N+3)(8N+2)-1680}+$$

$$+\frac{|x-x^*|^2}{(8N+6)(8N+5)(8N+4)(8N+3)-1680}+$$

$$+\frac{|x-x^*|^3}{(8N+7)(8N+6)(8N+5)(8N+4)-1680}+$$

$$+\frac{|x-x^*|^4}{(8N+8)(8N+7)(8N+6)(8N+5)-1680}+$$

$$+\frac{|x-x^*|^5}{(8N+9)(8N+8)(8N+7)(8N+6)-1680}+$$

$$+\frac{|x-x^*|^6}{(8N+10)(8N+9)(8N+8)(8N+7)-1680}+$$

$$\left.+\frac{|x-x^*|^7}{(8N+11)(8N+10)(8N+9)(8N+8)-1680}\right).$$

Аналогичным образом получаем выражение для Δ в случи $N+1=8n+1, 8n+2, 8n+3, 8n+4, 8n+5, 8n+6, 8n+7,$ которые вместе с вариантом $N+1=8n$ можно компактно записать в виде (8). Оценка приближенного решения (7) получена в области $|x-x_0|<\rho_2$, где $\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[8]{M+1}}\right\}$,

$0<\rho_1=\text{const}$, $M=\max\left\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,|y_3|,\sup_n\left|\frac{r^n(x^*)}{n!}\right|\right\}$, $n=0,1,2,3,\ldots,$

Вывод

Доказанная *теорема* 1 позволяет получить оценки для коэффициентов разложения решения в ряд, а *теорема* 2 позволяет в дальнейшем построить аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки и получить априорную оценку погршности. Для численного эксперимента необходим математический аппарат получения подвижной особой точки. Это предстоит выполнить в следующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сю Д. Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 552 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.
3. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matemantica Matematica Mehanica. Segunde serie. 1960. V. 5, No 1. P. 102–119.
4. Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. V. 61. No 1. July. P. 31–53.
5. Ablowitz M. I. Exact linearization of a Painleve transcendent // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38, No 20. P. 1103–1106.
6. Грамак В. И. О решении второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения.1982. Т. 18. Вып. 5. С. 753–763.
7. Чудновский В. М. Теория сверхизлучательных лавин радиоволного диапазона // Физика твердого тела. 1982. Т. 24, №4. С. 1118–1123.
8. Чудновский В. М. Лавинный распад инвертированного состояния квантовой системы : автореф. канд. ... физ.-мат. наук. Минск: БГУ, 1983. 16 с.
9. Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержни сверхизучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, №1. С. 9–10.
10. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. 13. С. 93–104.

11. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.
12. Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in rector core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. P. 1–14.
13. Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA – 4514, UC – 34).
14. Hill J. M. Abel’s Differential Equation // J. Math. Scientist. 1982. V. 7, №2. S. 115–125.
15. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
16. Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996. 37 с.
17. Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, №10. С. 1829–1832.
18. Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциальной уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2010. №2(8). С. 399–405.

Поступила в редакцию 28.06.2018 г.

THE EXISTENCE THEOREM FOR THE SOLUTION OF A CLASS OF FOURTH-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A POLYNOMIAL RIGHT-HAND PART OF SECOND DEGREE IN PROXIMITY OF A MOVING SINGULAR POINT

© V. N. Orlov*, B. B. Iv

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University)
26 Yaroslavskoye Highway, 129337 Moscow, Russia.

Phone: +7 (495) 781 99 88.
**Email: orlovvn@mgsu.ru*

The peculiarity of nonlinear differential equations is moving singular points. Due to the presence of these points, these equations are related to the class that in general is not solvable in quadrature. Moreover, classical theory (theorem of existence of solutions and methods of solutions) is not effective dealing with this category of differential equations. It should be noted that nonlinear differential equations with movable singular points have wide application in different fields of science. These facts actualize the formulation and proof of the new theorems for the existence of solutions of nonlinear differential equations with moving singular points both in the domain of analyticity and in proximity of movable singular points. It also actualizes development of the analytical approximate method of solution of this category of equations on the basis of these theorems. The authors of the article presented a variant of proof of existence theorem for solution of the considered class of fourth order nonlinear differential equations with polynomial right-hand part of second degree in proximity of a moving singular point. An analytical approximate solution for the considered class of the equations in proximity of a singular point was constructed; a priori error estimate was obtained.

Keywords: Cauchy problem, nonlinear differential equation, majorant method, proximity of moving singular point, analytical approximate solution, a priori error estimate, moving singular point.

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at bulletin_bsu@mail.ru if you need translation of the article.

REFERENCES

1. Syu D. Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ee primenenie [Modern theory of automatic control and its application]. Moscow: Mashinostroenie, 1972.
2. Roitenberg Ya. N. Avtomaticheskoe upravlenie [Automatic control]. Moscow: Nauka, 1971.
3. Kalman R. Boletin de la Sociedad Matemantica Matematica Mehanica. Segunde serie. 1960. Vol. 5, No 1. Pp. 102–119.
4. Airault H. Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61. No 1. July. Pp. 31–53.
5. Ablowitz M. I. Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, No 20. Pp. 1103–1106.
6. Gramak V. I. Differents. uravneniya.1982. Vol. 18. No. 5. Pp. 753–763.
7. Chudnovskii V. M. Fizika tverdogo tela. 1982. Vol. 24, No. 4. Pp. 1118–1123.
8. Chudnovskii V. M. Lavinnyi raspad invertirovannogo sostoyaniya kvantovoi sistemy : avtoref. kand. ... fiz.-mat. nauk. Minsk: BGU, 1983.
9. Samodurov A. A. Dokl. AN BSSR. 1985. Vol. 29, No. 1. Pp. 9–10.
10. Hill J. M. Internat. J. Solids Structures. 1977. 13. Pp. 93–104.
11. Ockendon J. R. Proc. Symp. Moving Boundary Problems / ed. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. Pp. 129–145.
12. Axford R. A. Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. Pp. 1–14.
13. Axford R. A. Los Alamos Report. 1970. (LA – 4514, UC – 34).
14. Hill J. M. J. Math. Scientist. 1982. Vol. 7, No. 2. Pp. 115–125.
15. Golubev V. V. Lektsii po analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii [Lectures on the analytic theory of differential equations]. Moscow: Gostekhizdat, 1950.
16. Matveev N. M. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Saint Petersburg: Spetsial'naya literatura, 1996.
17. Orlov V. N., Lukashevich N. A. Differents. uravneniya. 1989. Vol. 25, No. 10. Pp. 1829–1832.
18. Orlov V. N. Vestnik Chuvashskogo gos. ped. un-ta im. I. Ya. Yakovleva. Ser.: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2010. No. 2(8). Pp. 399–405.

Received 28.06.2018.